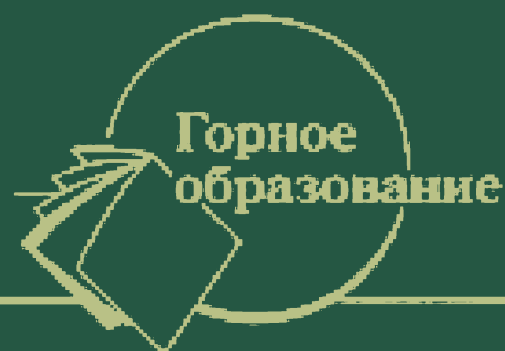


В.Н. Попов  
С.И. Чекалин

# ГЕОДЕЗИЯ



**В. Н. Попов, С. И. Чекалин**

# **Г Е О Д Е З И Я**

**МОСКВА**

2007

В. Н. Попов, С. И. Чекалин. Геодезия: Учебник для вузов. – М.: «Горная книга», 2007.

Освещены основные вопросы геодезии как науки, рассмотрены вопросы, связанные с построением картографических изображений, и решением задач по топографической карте и плану. Приведены основные элементы теории погрешностей измерений, а также методы уравнивания геодезических построений. Основные разделы посвящены геодезическим приборам, геодезическим работам при ступении геодезических сетей и создании планового и высотного обоснования, при разбивке и строительстве инженерных сооружений различного назначения, в том числе и подземных горных выработок, при выполнении геологических поисков и разведки месторождений полезных ископаемых, при выполнении комплекса нивелирных работ и др.

Учебник предназначен для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям геодезического, горного и геологоразведочного направлений, а также будет полезным для специалистов, выполняющих соответствующие работы.

ISBN: 5-91003-028-6

## Предисловие

Настоящий учебник представляет собой курс геодезии для студентов, обучающихся по специальностям геодезического, горного и геологических направлений. Вместе с тем, им могут пользоваться и студенты других негеодезических специальностей в соответствии с программами общего курса геодезии и топографии, предусмотренными учебными планами, а также специалисты, выполняющие инженерно-геодезические работы.

Вопросы, рассмотренные в учебнике, являются одними из основных для указанных выше специальностей. В связи с этим изучение многих вопросов, связанных с производством геодезических работ различного назначения, распределено практически на весь период обучения: *геодезические приборы; геодезические работы в строительстве; геодезические разбивочные работы; методы наблюдений за деформациями сооружений; уравнивание геодезических построений* и др. Поскольку учебными планами предусматривается изучение *геодезии* на младших курсах, то авторы при составлении учебника учитывали, что объем подготовки по математике, практическим расчетным работам и др. является недостаточным для полного изложения сравнительно сложных вопросов *геодезии*. По мере учебы на старших курсах возникнет необходимость в решении многих геодезических задач при изучении соответствующих дисциплин, что и потребует знания полного курса высшей математики, математической статистики. К этому времени появятся и практические навыки в производстве и обработке геодезических измерений, которые студенты получают на учебных и производственных геодезических и маркшейдерских практиках. Здесь имеется в виду, что потребность в пользовании настоящим учебником у студентов будет проявляться в течение всего периода обучения.

В вводной части указано, что *геодезия* изучает форму и размеры Земли. В общем, широком смысле слова – это так. Вместе с тем, *геодезия*, как обобщающее понятие, включает в себя большое число связанных с ней дисциплин. Таких, например, как *инженерная геодезия, топография, картография, аэрофотосъемка, стереофотограмметрия, высшая геодезия, теоретическая геодезия, маркшейдерия, морская геодезия, морская (акваториальная) маркшейдерия* и др. В этом смысле название курса *геодезия* является не совсем правомочным как с точки зрения содержания, так и по объему учебных часов, предусмотренных учебным планом. Поэтому объектом изучения данной дисциплины является сравнительно небольшой круг вопросов *геодезии*, знание которых необходимо специалистам при выполнении геодезических работ. Основными из них являются: *топографические работы, нивелирные работы, геодезические разбивочные работы, составление топографических планов местности, работа с топографическими картами и планами, уравнивательные вычисления.*

На старших курсах геодезических и части горных специальностей изучается дисциплина *фотограмметрия*, являющаяся также одним из разделов геодезии.

Целью изучения дисциплины *геодезия* является получение общего представления о ее задачах и проблемах в целом, получение практических навыков в производстве основных геодезических работ, в обработке результатов измерений и их использовании для решения различных инженерных задач.

В соответствии с содержанием отдельных разделов *геодезии*, в настоящем учебнике рассматриваются отдельные вопросы *топографии* и *инженерной геодезии*, а также и другие вопросы, необходимые для полного понимания содержания указанных выше дисциплин. Вообще говоря, все перечисленные выше дисциплины правильно было бы назвать со словом «общий» (*общая топография* и т.п.), поскольку сами по себе указанные курсы довольно большие и сложные. Для реализации же цели изучения *геодезии* студентами указанных выше специальностей авторы попытались преподнести основной материал в сжатом виде, проиллюстрировать примерами решения многих геодезических задач, встречающихся на практике. Очевидно, что в таком сжатом по времени курсе невозможно охватить весьма большой круг геодезических задач, которые приходится решать на производстве не только геодезистам, но и маркшейдерам, при проведении геологических поисков и разведки месторождений полезных ископаемых и др. Например, при строительстве инженерных сооружений различного назначения (зданий, мостов, дорог, подземных выработок и т.п.), съемке текущих изменений при открытой и подземной разработке месторождений полезных ископаемых, обслуживании геологоразведочных предприятий, создании опорной и съемочной сетей местного значения, наблюдениях за деформациями земной поверхности и инженерных сооружений и мн.др. В связи с этим, целью настоящего учебника является обучение основным приемам ведения геодезических работ и обработки данных геодезических измерений, а также формирование навыков и умения в решении различных инженерно-геодезических задач в соответствии с действующими на предприятиях методиками, руководствами и инструкциями.

Авторы будут благодарны за все замечания по содержанию учебника, улучшению его качества.

# Глава 1. ВВОДНАЯ ЧАСТЬ

## § 1. Предмет и задачи геодезии

*Геодезия* как наука занимается изучением формы и размеров Земли в целом и отдельных ее частей.

Изучением общей формы и размеров Земли, а также ее отдельных частей, для которых необходимо учитывать кривизну Земли, исследованиями ее внешнего гравитационного поля занимается *высшая геодезия, теоретическая геодезия*. Кроме этого, к *высшей геодезии* относятся вопросы построения Государственных геодезических сетей, определение координат точек земной поверхности в единой системе координат, изучения вертикальных и горизонтальных движений земной коры, изучение фигур планет Солнечной системы, а также их гравитационных полей. Изучение малых участков, элементов физической поверхности и расположенных на ней объектов естественного и искусственного происхождения, а также способов отображения этой поверхности на плоскости, относятся к *топографии*. *Инженерная геодезия*, как часть *топографии*, изучает методы специальных геодезических работ, выполняемых при изыскании, строительстве и эксплуатации инженерных сооружений. *Аэрофотосъемка* и *фотограмметрия* в сочетании с *аэрофототопографией* и *фототопографией* позволяют разрабатывать методы создания топографических карт по фотографическим изображениям, полученным с летательных аппаратов или в результате наземной *фототеодолитной съемки*.

*Геодезия* использует результаты измерений, полученных при *гравиметрической съемке*, пользуется исследованиями *космической геодезии, астрономии, небесной механики*. Расчетный аппарат геодезии базируется на знании *высшей математики* и *математической статистики*. Большая связь геодезии с *геодезическим приборостроением*, в основном и определяющем, чаще всего, точность измерений.

Изучение формы и размеров Земли является не только научной задачей. Данные исследований позволяют обеспечивать, кроме того, создание на поверхности Земли сети точек с известными координатами, что является весьма важным для топографии, картографии, а также для обороны страны.

## § 2. Краткие исторические сведения

Геодезия, наряду с геометрией и математикой, относится к древним наукам и практически является их современницей. У человека была не только потребность в счете или геометрических построениях на земной поверхности. Ему нужны были и карты на обширные территории, геодези-

ческие методы и приборы при строительстве храмов, дворцов, оросительных систем и каналов, например, таких, как канал между Нилом и Красным морем, построенный в 6 веке до н.э. Имеются сведения, что топографические работы проводились на территории современного Китая еще 10 веков назад, в Египте – за 4000 лет до н.в. В Вавилонии 4500 лет назад решали уравнения с двумя неизвестными, там же строили здания высотой почти 100 м. Прimitивные картографические изображения местности на камнях, бересте, бивнях мамонта, обнаруженные археологами, имеют возраст в 15 тысяч лет. На рис. 1.1 приведено изображение рисунка местности, выполненное на бивне мамонта, обнаруженного при раскопках в Черкасской обл. На рисунке показаны четыре строения, которые впоследствии были найдены археологами. На рис. 1.2 – изображение морской акватории с островами (морская карта полинезийцев), представляющее собой плетение из прутиков, похожее на рельефную карту, на которой острова изображались раковинами улиток, а наиболее удобные для плавания маршруты – жилками пальмовых веток. На таких картах дополнительно указывались и основные океанические течения, места рыбной ловли.

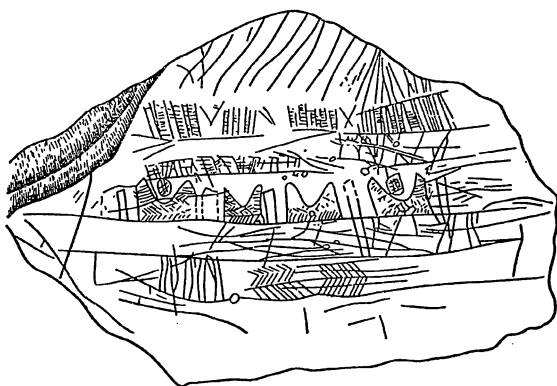


Рис. 1.1. Карта местности, выполненная на бивне мамонта

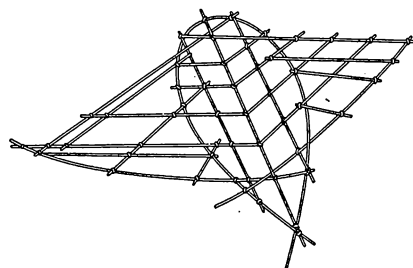


Рис. 1.2. Морская карта полинезийцев

Первые карты Земли стали появляться еще в V в. до н.э., но они были весьма примитивными и не очень точными. Ориентирование по сторонам света не производилось. Подобная карта была составлена, например, *Дикархом Мессинским* (350 – 290 гг. до н.э.).

Попытки определения размеров Земли и производства измерений на земной поверхности известны у египтян еще 6 тысяч лет тому назад, а примерно 2230 лет назад *Эратосфен* (276 – 196 гг. до н.э.) впервые сравнительно точно для того времени определил размеры Земли. Радиус Земли по его определению в переводе в метрическую систему мер составил 6370 км (практически такую же величину, которая используется в настоящее время при грубых расчетах). Он же написал и первую книгу по геодезии, составил карты с параллелями и меридианами. Еще раньше Эратосфена *Аристотель* (384 – 322 гг. до н.э.), правда, без доказательства, в своем труде «О небе» привел размеры Земли. Но приоритет в этом отдают все-таки Эратосфену. Картой Земли Эратосфена пользовались до 100 г. н.в.

О методах выполнения геодезических работ и описание простейших с нашей точки зрения геодезических инструментов приведено в работе «Диоптрика» *Герона Александрийского* (род. ок. 155 г. до н.э.), и примерно в то же время александрийский астроном *Гиппарх* (180 – 125 гг. до н.э.) изобрел астролябию (дословно – «беру звезду»), ввел определение места точки на земной поверхности по долготе и широте.

Примерно такой инструмент приобрел в 1687 г. во Франции Петр I через своего посла князя Я.Ф.Долгорукова. Князь сообщил царевичу, что у него был украден инструмент, которым «можно брать дистанции или расстояния, не доходя до того места». Привезенный князем другой такой же инструмент и оказался астролябией.

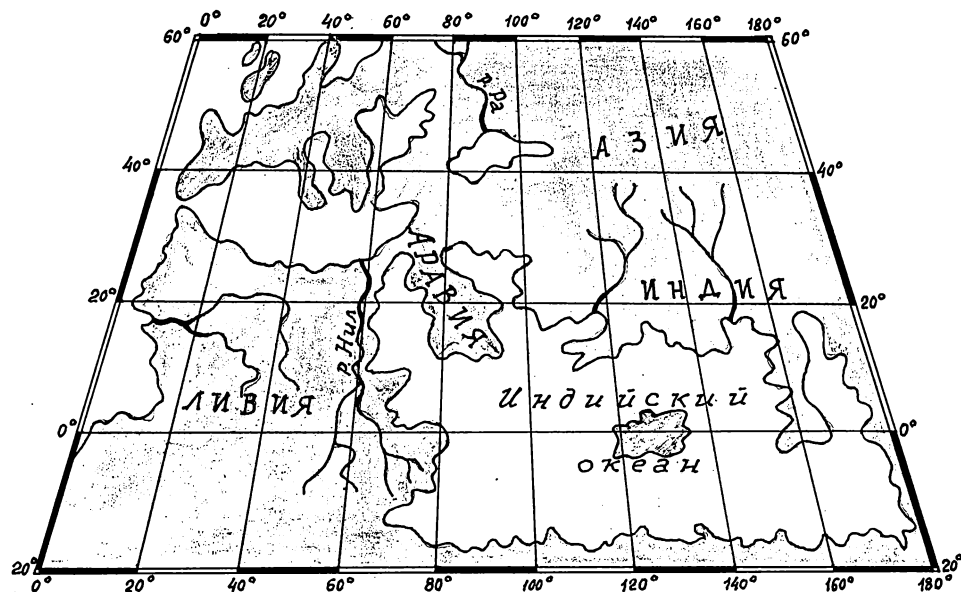


Рис. 1.3. Карта Земли Птолемея



Метод проекций при составлении карт впервые применил *Птолемей* (87 – 165 гг.), он же ввел деление окружности на  $360^\circ$  (хотя такими вопросами занимались и халдейские жрецы, современники Пифагора; они определяли величину в  $1^\circ$  как угловой размер двух последовательных солнечных дисков). Картой Земли Птолемея (рис. 1.3) пользовались довольно долго. На этой карте Индийский океан изображен в виде огромного внутреннего моря, Африка простиралась вплоть до Антарктиды и имела соединение с Китаем, Скандинавский полуостров был изображен в виде острова по своим размерам даже меньше Ирландии, Азовское море изображалось весьма большим, его размеры на север доходили до половины Руси. На этой карте изображена река Волга (Ра) и Каспийское море, очертания которого далеки от действительных. Картой Птолемея пользовался *Х.Колумб* при поисках берегов Индии. Ошибки на карте Птолемея и привели в то время к открытию Америки.

Открытие и доказательство шарообразности Земли, равно как и достижения теоретической геодезии (да и не только геодезии), с древних времен и практически до конца средневековья были долгие столетия под запретом церкви.

Самые ранние датированные сведения о геодезических работах на территории России относятся к 996 году (Киевская Русь). По приказанию князя *Глеба* (старшего сына киевского князя Святослава Ярославовича) в 1068 году выполнено измерение расстояния по льду от Тамани до Керчи. Для измерений использовалась, вероятно, веревка. Геодезические работы на Руси проводились во времена Ивана Грозного, причем с использованием прообраза инструкции: «*Книга, именуемая геометрия или землемерие радиусом и циркулем*». В ней описывались способы измерений на местности, а также измерений недоступных мест. Большой вклад в развитие геодезии внесла созданная в начале 18 века Петром I «Школа математических и навигационных наук», основанный в 1822 году «Корпус военных топографов», в 1919 году – «Высшее Геодезическое Управление». Первые фотограмметрические съемки в России были выполнены в 1890 – 1899 гг. для изысканий при строительстве железной дороги. В 1986 году по снимкам была составлена карта на часть территории Новой Земли.

Можно сказать, что примерно с 1500 года геодезические работы и исследования в области геодезии занимают весьма важное место в науке и практике. Большой скачок в области приборостроения был сделан известным ученым *Г.Галилеем* (1564 – 1642 гг.), изготовившем в 1609 году зрительную трубу (телескоп). В 1611 году *Кеплером* (1571 – 1630 гг.) была создана зрительная труба с сеткой нитей, но первый теодолит появился только в 1730 году (Англия, *Д.Сиссон*). Первые нивелиры появились гораздо позже, в середине 19 века.

Совершенствование геодезических приборов позволило выполнять все более точные геодезические измерения с целью определения длины дуги меридиана в  $1^\circ$  на разных широтах (так называемые *градусные измерения*). Градусные измерения предпринимались в разное время и в разных частях

Земли: Эратосфен – на территории Ассуана; *Посидоний* (135 – 50 гг. до н.э.) – Александрия – остров Родос; арабы в 827 г. – на территории реки Тигр; *Фернель* (1497 – 1558 гг.) – недалеко от Парижа и мн. др. С 1816 по 1855 гг. под руководством русских ученых *К.И.Теннера* (1783 – 1860 гг.) и *В.Я.Струве* (1793 – 1864 гг.) была измерена дуга меридиана в 25°30' от Северного Ледовитого океана до берегов Дуная. Комплекс градусных измерений в течение 1700 – 1900 гг. позволил сравнительно точно определить параметры Земли (сфероида).

Для определения фигуры и размеров Земли необходимы были результаты градусных измерений на большой ее территории. Работы эти были весьма трудоемкими и часто даже опасными для исполнителей. Об этом очень подробно написал русский геодезист *В.В.Витковский* [6]. Например, во время работы Перуанской экспедиции, организованной в 1735 г. французской Академией Наук, работе мешали местные индейцы. Они нападали на геодезическую группу, уничтожали триангуляционные знаки. Во время одного из нападений был убит врач экспедиции. Несмотря на это, основные работы продолжались семь лет, а сама экспедиция закончилась через 17 лет, в 1752 г. Градусные измерения во Франции, проводимые в 1792 – 1798 гг., совпали с Французской Революцией. *Деламбер*, руководивший экспедицией, писал, что им всевозможными способами мешали в работе группы восставших с окрестных населенных пунктов. Они разбивали лампы, использовавшиеся на триангуляционных пунктах ночью, срывали с пунктов белые холсты (белое знамя было эмблемой Бурбонов), которые служили маяками. Чтобы в дальнейшем избежать народного гнева, пришлось в качестве маяков использовать революционный флаг – холст с белой, красной и синей полосами.

Развитие геодезии связано с разработкой методов измерений и обработки их результатов, разработкой новых геодезических приборов, обеспечивающих проведение геодезических работ различной точности, разработкой принципиально новой геодезической техники для обеспечения инженерно-геодезических работ на уникальных инженерных сооружениях. Большую известность в области приборостроения имеют такие фирмы как «Вильд» (Швейцария), «Карл Цейсс» (Йена, Германия), «Соккиша» (Япония), «Оптон» (Германия), и др. До Великой Отечественной войны потребности нашей страны в геодезических приборах частично удовлетворялись за счет поставок из-за рубежа. Затем объем выпуска геодезических приборов внутри страны уже был достаточным для обеспечения всех геодезических предприятий. Основными производителями геодезических приборов были предприятия «Геодезия», «Геофизика», Ленинградское оптико-механическое объединение (ЛОМО), Уральский оптико-механический завод (г. Свердловск, ныне – Екатеринбург), большой вклад в разработку геодезической техники внес Государственный оптический институт (ГОИ) и др.

В области обработки геодезической информации большой вклад внесли русские ученые А.П.Болотов, А.Н.Савич, В.В.Витковский, Ф.Н.Красовский, В.В.Данилов, В.В.Попов, Н.А.Урмаев, А.С.Чеботарев, М.С.Молоденский, П.С.Закатов, Ю.И.Маркузе, П.А.Гайдаев, А.И.Мазмишвили и др. В области инженерной геодезии следует отметить вклад П.М.Орлова, П.И.Шилова, А.В.Маслова, В.Д.Большакова, П.Н.Кузнецова, Г.П.Левчука, К.К.Ямбаева и др. Учеными и инженерами Н.О.Виллером, Р.Ю.Тиле, П.И.Шуровым, Б.Б.Голицыным, Ф.Н.Чернышовым, Ф.В.Дробышевым, А.С.Валуевым и

мн.др. разработаны методы и приборы для обработки фотографической информации с целью получения карт и планов местности.

### § 3. Единицы измерений, применяемые в геодезии

Измеряемые при геодезических работах величины выражаются в метрической и угловой системах счета.

Единицей линейных расстояний является метр и производные от него (километр, сантиметр, миллиметр):  $1 \text{ км} = 1000 \text{ м}$ ;  $1 \text{ м} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм}$ .

Для определения площадей основной единицей измерения является квадратный метр и производная от него единица – квадратный километр:  $1 \text{ км}^2 = 1000000 \text{ м}^2$ , а также гектар:  $1 \text{ га} = 10000 \text{ м}^2 = 0,01 \text{ км}^2$ .

Единицей измерения углов, направлений является градус, дробными частями которого являются минуты и секунды:  $1^\circ = 60' = 3600''$ . Часто в качестве угловой меры используют радиан, равный  $(180/\pi)$  градусам, т.е.  $1 \text{ рад} = 57,29577951^\circ = 3437,746770' = 206264,8062''$ , а  $1^\circ = 0,017453293 \text{ рад}$ .

Во многих приборах используется единица десятичной меры углов, которая равна  $1/100$  прямого угла – *град*. Град делится на 100 градовых минут, а каждая градовая минута – на 100 градовых секунд. Таким образом,  $1 \text{ град} = 0,9^\circ = 54' = 3240''$ .

### § 4. Фигура и размеры Земли

*«В природе все должно быть гармонично и совершенно. Земля должна быть тоже совершенна. Но совершеннейшим из геометрических тел является шар. Значит, Земля – шар».* Это первая зафиксированная гипотеза шарообразности Земли, была высказана известным древнегреческим ученым *Пифагором* (580 – 500 гг.). Сомнительная даже с точки зрения логики гипотеза оказалась во многом правильной.

Шарообразность Земли была установлена, как отмечалось выше, Эратосфеном примерно 2230 лет назад, однако такие же предположения были и у халдейских жрецов, изучавших движение Луны, Солнца, звезд и планет солнечной системы.

С открытием *Д.Кассием* (1625 – 1712 гг.) полярного сжатия Юпитера и доказательствами *И.Ньютона* (1642 – 1727 гг.) о форме вращающегося в пространстве жидкого тела (форма *сфероида* или *эллипсоида вращения*) началось детальное изучение формы Земли.

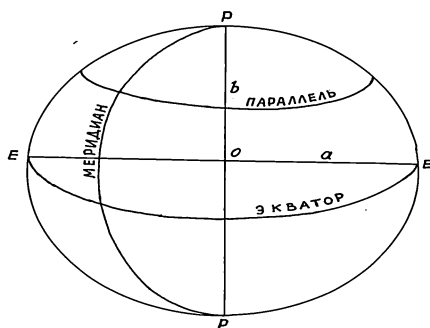


Рис. 1.4. Сфероид.

Очевидно, что шар и сфероид представляют собой математические фигуры с гладкими кривыми поверхностями (рис. 1.4), форма и размеры которых однозначно определяются по их основным параметрам: для шара – это радиус  $R$ , для сфероид – это размер одной из его полуосей (большой –  $a$  или малой –  $b$ ) и *полярное сжатие*  $a$ , определяемое как отношение  $(a - b)/a$ .

В действительности *физическая поверхность* Земли имеет весьма сложную форму, которую невозможно описать простыми математическими зависимостями. Под физической поверхностью Земли понимается поверхность суши и невозмущенная поверхность всех внешних морей и океанов. Известно, что распределение масс (плотностей) в теле Земли весьма неравномерно. Это приводит к тому, что направления отвесных линий, если форму Земли в первом приближении принять за сфероид, не будут совпадать с направлениями нормалей к поверхности сфероид. В результате образуется поверхность весьма сложной формы (*уровенная поверхность*), в каждой точке которой линия направления силы тяжести совпадает с нормалью к этой же поверхности. По предложению в 1873 г. немецкого физика Листинга (1808 – 1882 гг.) тело, ограниченное такой поверхностью, названо *геоидом* (землеподобным).

Геоид близок к сфероиду, но в общем случае не совпадает с ним. Отступления поверхности геоида от поверхности сфероид в некоторых местах Земли достигают  $\pm(100 - 150)$  м. На акватории мирового океана форма геоида с помощью спутниковых наблюдений определяется весьма точно, с погрешностями порядка 0,1 – 0,3 м. На суше погрешность определения формы геоида уже значительна, порядка 1,5 – 2,0 м. В связи с этим для суши принята вспомогательная поверхность, положение которой определяется весьма точно. Эта поверхность называется *поверхностью квазигеоида*, а тело, ограниченное этой поверхностью, называют *квазигеоидом*.

Таким образом, зная форму геоида (квазигеоида), можно подобрать форму Земли (общий земной эллипсоид – ОЗЭ), определяемую простыми для использования математическими зависимостями, для которой выполнялись бы следующие условия:

- центр ОЗЭ совпадает с центром масс Земли;
- малая полуось совпадает с осью вращения Земли;
- объем ОЗЭ равен объему геоида (квазигеоида);
- сумма квадратов отклонений поверхности ОЗЭ от поверхности геоида (квазигеоида) в целом для всей Земли должна быть минимальной.

Для практических целей физическую поверхность Земли проектируют на вспомогательную поверхность, имеющую простую форму. Эта поверхность называется *поверхностью относимости*. Поверхность относимости должна

незначительно отличаться от поверхности квазигеоида в пределах какой-либо территории, например, Европы, Азии, либо отдельного государства. В масштабах всей Земли удобно использовать общий земной эллипсоид, а в масштабах ограниченной территории за поверхность относимости удобно принимать другой эллипсоид (*референц-эллипсоид*), ориентировка которого в теле Земли может отличаться от ориентировки ОЗЭ, при этом малая ось референц-эллипсоида может и не совпадать с осью вращения Земли, а быть ей параллельной. В табл. 1.1 приведена историческая справка по определению параметров земного эллипсоида (референц-эллипсоидов).

До настоящего времени используются различные референц-эллипсоиды: в Германии – эллипсоид Бесселя (1841 г.), в Великобритании – эллипсоид Кларка (1880 г.), в США – эллипсоид Хейфорда (1909 г.). В России до 1942 г. использовался эллипсоид Бесселя. При детальном исследовании этого референц-эллипсоида оказалось, что он дает весьма большие погрешности в положении точек на поверхности Земли в пределах России. Под руководством русского ученого *Ф.Н.Красовского* (1878 – 1948 гг.) выполнены расчеты по определению параметров референц-эллипсоида для России. С 1946 г. параметры полученного референц-эллипсоида приняты для использования в геодезических расчетах: большая полуось  $a = 6378245$  м, полярное сжатие  $\alpha = 1 : 298,3$ . При этом следует отметить, что полученный референц-эллипсоид (*референц-эллипсоид Красовского*) в наибольшей степени определяет параметры общего земного эллипсоида. Это подтверждают и современные спутниковые измерения.

Таблица 1.1

Государство (ученый)	Год	Большая полуось, м	Полярное сжатие
Франция ( <i>Деламбер</i> )	1800	6 375 653	1 : 334,0
Германия ( <i>Бессель</i> )	1841	6 377 397	1 : 299,2
Великобритания ( <i>Кларк</i> )	1866	6 378 206	1 : 295,0
Россия ( <i>Слудский</i> )	1892	6 377 494	1 : 297,1
Россия ( <i>Жданов</i> )	1893	6 377 717	1 : 299,0
С Ш А ( <i>Хейфорд</i> )	1910	6 378 388	1 : 297,0
Россия ( <i>Красовский</i> )	1936	6 378 210	1 : 298,6
Россия ( <i>Красовский</i> )	1940	6 378 245	1 : 298,3
Спутниковые данные	Совр.	6 378 137	1 : 298,257

## § 5. Содержание курса и рекомендации по его изучению

Учебник предназначен для изучения общих вопросов *топографии* и *инженерной геодезии*. Вопросы, связанные с общими представлениями о фигуре и размерах Земли, рассмотрены в предыдущем параграфе. Более подробно они будут разъяснены в курсе *высшей геодезии*.

Что же касается объема изложения разделов *топографии* и *инженерной геодезии*, то часть из них, например, вопросы, касающиеся исследований и

поверок приборов, организации и выполнения съемок и других видов инженерно-геодезических работ и т.п., более подробно изучаются в курсах *геодезического инструментоведения, инженерной геодезии, маркшейдерского дела, оценки точности маркшейдерских съемок* и др.

Авторы не ставили целью подробное рассмотрение всех вопросов топографии и других дисциплин, и сам учебник не претендует на полное изложение всех вопросов, касающихся производства специальных геодезических работ. Однако приведенные в учебнике основные примеры производства работ и обработки результатов измерений позволят найти решение и в случаях нестандартных ситуаций, научат понимать содержание специальной литературы по соответствующим вопросам, обеспечивать выполнение работ строго по действующим руководствам и инструкциям.

Учебник состоит из 16 глав. С содержанием 1-й главы Вы уже ознакомились. Во 2-й главе рассмотрены вопросы, связанные с работой с топографическими картами и планами, даны краткие сведения о картографических проекциях, используемых для составления карт различного назначения. Рассмотрены основные системы координат, используемые в геодезии. В 3-й главе дается сравнительно общая информация о погрешностях измерений, а также приводятся простейшие правила обработки результатов равноточных и неравноточных измерений. Приведен метод получения погрешности функции измеренных величин. 4-я глава посвящена методам создания Государственной геодезической плановой и высотной сети. Приведена информация об опорных съемочных сетях и ходах съемочного обоснования. Приведены формулы оценки точности построения сетей триангуляции, полигонометрии и трилатерации. В 5-й главе рассказано об основных особенностях конструкций оптических геодезических приборов, изложены вопросы, связанные с поверками геодезических приборов и работе с ними. В главе 6 приведены сведения о современных оптико-электронных геодезических приборах, приходящих на смену оптическим приборам. В главе 7 подробно рассмотрены вопросы, связанные с построением съемочного обоснования. Приведены примеры обработки разомкнутых и замкнутых теодолитных ходов. Особое внимание уделено различным вариантам привязки теодолитных ходов к исходным геодезическим сетям. В главе 8 рассмотрены виды топографических съемок местности. Подробно приведены сведения о тахеометрической съемке и о горизонтальной (теодолитной) съемке. 9-я глава содержит сведения о нивелирных работах, производстве трассирования, нивелирования площадей и др. вопросов, связанных с геометрическим нивелированием и другими видами нивелирования. О геодезических разбивочных работах приводится информация в главе 10. В 11-й и 12-й главах изложены вопросы, связанные с геодезическими работами при строительстве различных инженерных сооружений, в том числе – строительстве подземных сооружений. Отдельно рассмотрены геодезические работы на геологических предприятиях (глава 13). Глава 14 посвящена вопросам организации и проведения наблюдений за деформациями инженерных сооружений. Об особенностях точных и высокоточных геодезических измерений

рассказано в главе 15. В главе 16 рассмотрены способы и методы уравнивания геодезических построений.

Содержание курса геодезии иллюстрировано примерами расчетов и обработки данных, чаще всего встречающимися на практике. Многие из приведенных примеров Вам встретятся и на лабораторных работах в Ваших заданиях, другие примеры приводятся для подкрепления теоретической части рассматриваемого в учебнике вопроса.

В конце учебника приведен предметный указатель, ссылки которого помогут быстро отыскать то место в учебнике, где наиболее полно можно будет посмотреть о данном понятии или определении.

При изучении курса геодезии, а также и при работе на производстве, Вам придется решать большое число разнообразных ответственных задач, связанных с полевыми измерениями и камеральными расчетами. В связи с этим авторы считают полезным привести отдельные весьма необходимые правила, сформулированные замечательным геодезистом В.В.Витковским [6] еще в начале 1900-х годов:

- *держат в порядке полевые журналы, так, чтобы ими мог пользоваться в последствии не только сам наблюдатель, но и другие лица;*

- *писать разборчиво, чтобы каждый мог понять сущность дела и отыскивать, если понадобится, необходимые числа;*

- *тщательно изучить и поверить инструменты, а также выработать такой порядок наблюдений, при котором по возможности исключались бы инструментальные погрешности, и получалась бы проверка всех наблюдений;*

- *не добиваться невозможного на практике полного устранения всех погрешностей и не избегать так называемых приведений (поправок); легче измерить и принять потом в расчет малую величину, чем сделать ее нулем;*

- *сообразно требуемой точности производить вычисления с различным числом десятичных знаков; не утруждать себя в вычислениях семизначными числами, если по точности можно обойтись и четырехзначными;*

- *стараться не ошибаться в числовых выкладках; если вычисление не удалось, то не впадать в отчаяние, а утешаться предвкушением удовольствия предстоящего открытия и исправления ошибки; опыт показывает, что если полученная ошибка вынуждает повторить вычисление по той же формуле, то весьма часто ошибаются вновь, и на том же месте;*

- *неуклонно добиваться проверок (контроля) и не начинать следующей ступени расчетов, пока предыдущая не поверена;*

- *каждый должен следить за успехами той отрасли знания, которую он избрал поприщем своей деятельности.*

Последнее правило касается, в частности, сбора литературы по своей специальности, в том числе и по геодезии. Этим надо заниматься в процессе учебы, с первого курса, поскольку дефицит учебной и научной литературы сейчас весьма ощутим. Тех руководств и инструкций, которыми Вам придется пользоваться на предприятии, будет недостаточно для решения большого круга задач, непосредственно относящихся к геодезическим и маркшейдерским работам. Редко в инструкциях или руководствах даются указания «как

делать», обычно в них приводятся указания «что делать». Вот здесь большую помощь Вам и может оказать своя библиотечка: справочники, учебная литература, методические указания, а также и Ваши записи (хотя бы на первых порах) на лекциях и практических занятиях по специальным дисциплинам.

В списке рекомендуемой литературы, приведенном в конце учебника, указана лишь небольшая часть изданий разных лет по различным направлениям инженерной геодезии, топографии и др., а также маркшейдерскому делу. Некоторые из них имеются в библиотеке вуза, другую литературу аналогичного содержания можно найти в букинистических магазинах.

## **Глава 2.**

### **ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ КАРТЫ И ПЛАНЫ**

#### **§ 6. Влияние кривизны Земли на измеренные расстояния**

При выполнении геодезических работ на сравнительно небольших территориях поверхность Земли можно принимать за плоскую, и измеренные расстояния на плоском изображении принимать равными соответствующим расстояниям на сферической поверхности. При измерениях значительных по величине расстояний необходимо учитывать влияние кривизны поверхности Земли.

Для простоты изложения примем, что Земля представляет собой шар радиусом  $R$  (радиус Земли, представляемой в виде шара, принимают равным 6371,11 км). Предположим, что по поверхности шара из точки  $A$  в точку  $B$  перемещается материальная точка (рис. 2.1), при этом расстояние  $S = AB$ , которое пройдет эта точка по поверхности шара, равно

$$S = R\alpha, \quad (2.1)$$

где  $\alpha$  - центральный угол дуги  $AB$  (в радианах).



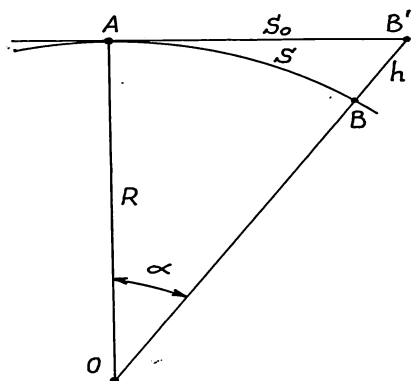


Рис. 2.1. Учет кривизны Земли

Предположим, что точка движется по касательной в точке  $A$  к поверхности шара и пройдет по нему путь  $S_o = AB'$ , соответствующий движению по поверхности шара на пути  $S$ . Для величины  $S_o$  можно записать:

$$S_o = R \operatorname{tg} \alpha \quad (2.2)$$

Разность в пройденных путях  $\Delta S = (S_o - S) = R (\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$  и будет являться погрешностью в измеренном расстоянии из-за кривизны Земли.

Для малых значений углов  $\alpha$  при разложении в ряд функции  $\operatorname{tg} \alpha$  полу-

чим

$$\Delta S = \frac{Ra^3}{3}, \quad (2.3)$$

а после подстановки в выражение для  $S$  -

$$\Delta S = \frac{S^3}{3R^2}, \quad (2.4)$$

поскольку  $\alpha = S/R$ .

Аналогично рассмотрим влияние кривизны Земли на определение вертикальных расстояний.

Погрешность (отклонение)  $h$ , равная разности отрезков  $OB'$  и  $OB = R$ , находится через принятые ранее параметры:

$$h = \frac{S^2}{2R + h} \quad (2.5)$$

или, ввиду малой разности  $S$  и  $S_o$  при малых  $\alpha$  и  $h$ ,

$$h = \frac{S^2}{2R} \quad (2.6)$$

Оценка возможных погрешностей при измерениях вертикальных и горизонтальных расстояний приведена в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Измеренное расстояние $S$ , км	0,1	1	2	5	10	50	100	200
Абсолютная погрешность $S$ , м	-	-	-	0,001	0,008	1,03	8,2	65,7
Относительная погрешность $\Delta S/S$	0	0	0	0	1/1250000	1/50000	1/25000	1/3000
Абсолютная погрешность $h$ , м	0,001	0,078	0,314	1,96	7,8	196	785	3139

Точность измерения линий в геодезических сетях высших классов определяется относительной погрешностью порядка 1:400000, что практически является соизмеримым для  $S = 10$  км (и, конечно, более 10 км). До 10 км при измерении горизонтальных расстояний во многих случаях влиянием кривизны Земли можно пренебречь.

Совсем другая картина наблюдается при оценке погрешностей в вертикальных отрезках. Точность определения высот при геодезических работах, например, при топографической съемке, определяется величиной 5 см, т.е. уже для расстояний  $S = 1000$  м необходимо учитывать кривизну Земли. Если же точность измерений выше, например 5 мм, то учет кривизны Земли следует начинать примерно для расстояний  $S = (250 - 300)$  м, что легко проверить обратным расчетом по формуле (2.6).

## § 7. Краткие сведения о картографических проекциях

*Картографическое изображение* – это представление исходной информации об объектах, а также о явлениях действительности, в графической, цифровой или другой форме на заданной поверхности (носителе информации) с применением системы специальных картографических условных знаков.

Очевидно, что на картах невозможно отобразить все детали объектов или явлений, поэтому на них показывают только типичные отличительные свойства в обобщенном виде с указанием связей, которые позволяют облегчить чтение карты и решение с помощью нее поставленных задач.

*Картографическая проекция* – это установленный способ изображения поверхности земного эллипсоида (референц-эллипсоида) на плоскости. Поверхность эллипсоида (шара, сфероида и т.п.) невозможно развернуть на плоскость без деформаций, в связи с чем при переходе на плоскость возникает сжатие или растяжение изображения, т.е. изменение его масштаба.

Под *масштабом карты* понимается отношение длины отрезка на изображении к длине соответствующего отрезка на местности, выраженном в тех же единицах измерения. Масштаб карты указывают в численном виде (1: 5 000; 1: 200 000 и т.п.) или именованном виде (в 1 см 250 м, т.е. в 1 см 25 000 см, или масштаб 1: 25 000).

Картографические проекции классифицируют по двум признакам: по характеру искажений углов (*равноугольные*) и площадей (*равновеликие*) и по виду координатной сетки *параллелей* и *меридианов* (*азимутальные*, *конические*, *цилиндрические* и др.).

*Меридианом* (рис. 1.4) является линия пересечения с поверхностью Земли плоскости, проходящей через ось  $PP$  вращения Земли. Меридиан, проходящий через определенную точку в Гринвичской обсерватории (Англия), называется *Гринвичским* (*нулевым*, *начальным*) меридианом.

Параллель получается от пересечения с поверхностью Земли плоскости, перпендикулярной к оси вращения Земли. Самая большая параллель называется экватором.

Равноугольные проекции передают без искажений углы геометрических фигур, а равновеликие не искажают площадей. Кроме того, существуют и произвольные проекции, которые не являются равновеликими или равноугольными, а используются для построения изображений в удобной для представления и чтения форме.

Азимутальные проекции (рис. 2.2) часто используются для изображения полярных областей. В нормальных азимутальных проекциях меридианы изображаются прямыми линиями, исходящими из точки северного или южного полюса, а параллели являются концентрическими окружностями, центром которых является точка полюса.

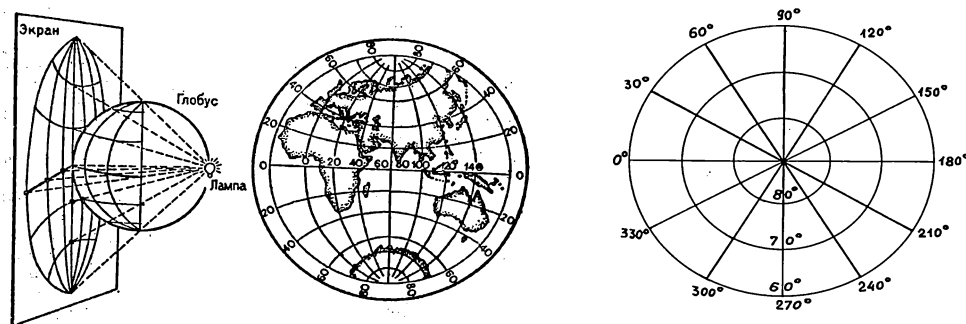


Рис.2.2. Азимутальная проекция.

Конические проекции (рис.2.3) получаются при проектировании поверхности эллипсоида на коническую поверхность, которая потом разворачивается в плоскость. Меридианы нормальных конических поверхностей являются прямыми линиями, а параллели – окружностями.

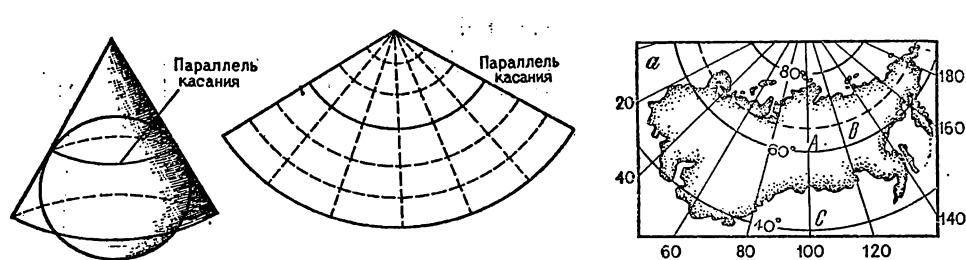


Рис. 2.3. Коническая проекция.

Как азимутальные, так и конические проекции, кроме нормальных могут быть поперечными и косыми. В этих случаях меридианы и параллели на них изображаются сложными кривыми.

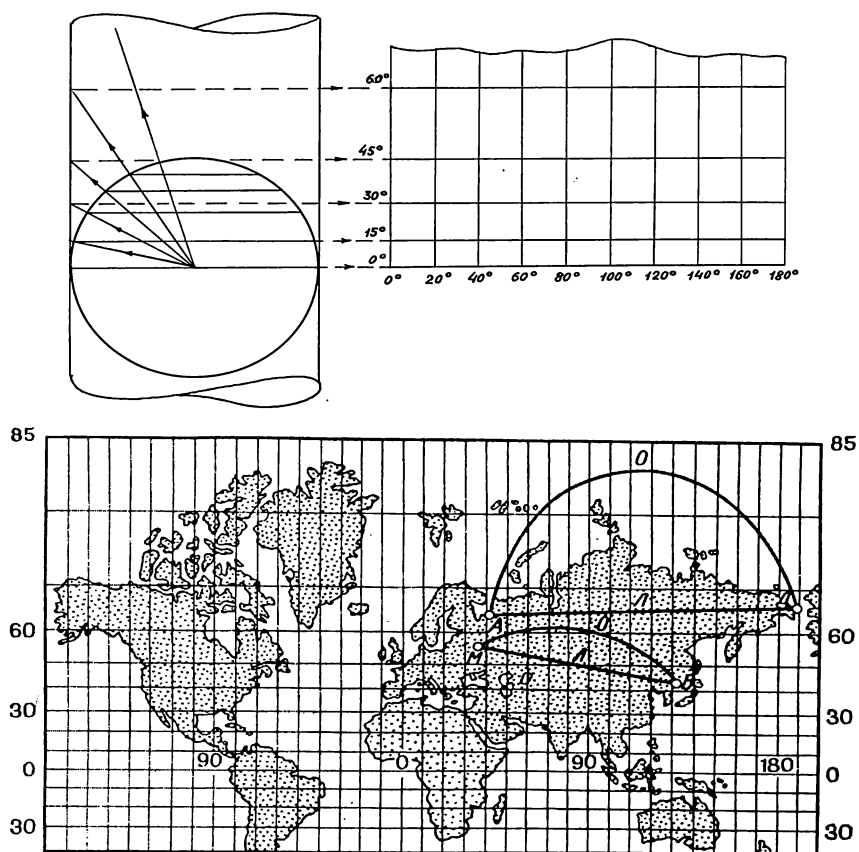


Рис. 2.4. Проекция Меркатора.

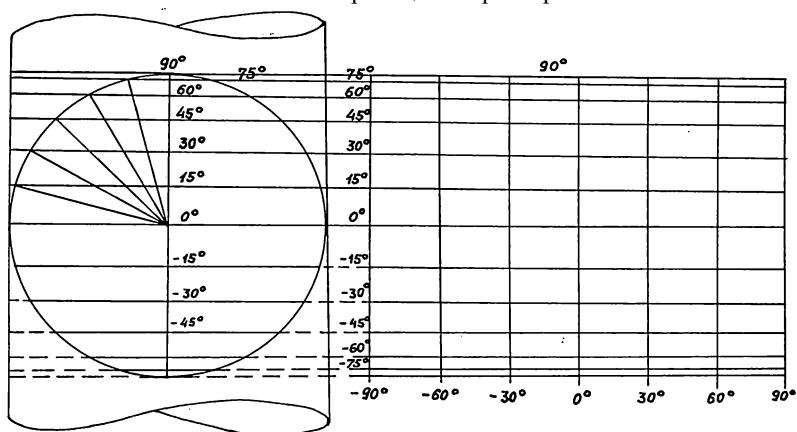


Рис.2.5. Проекция Ламберта.

Из цилиндрических проекций наиболее распространенными являются проекция Меркатора, изображенная на рис.2.4, проекция Ламберта (рис.2.5) и проекция Гаусса (1777 – 1855 гг.) – рис 2.7.

Проекция Меркатора используется при составлении морских навигационных карт. Она была разработана в середине 16 века фламандским картографом, математиком и географом *Г. Меркатором (Герард Кремер)*. Меркатор не успел дать теоретическую основу своей проекции, это сделали после него его сын *Румальд*, а затем, в 1599 г., английский ученый *Эдуард Райт*. Особенностью проекции является то, что масштаб длины в каждой точке сохраняется по всем направлениям, но изменяется при изменении широты и долготы. В связи с этим соотношение площадей на Земле и на карте не сохраняется. Другой особенностью проекции Меркатора является то, что *локсодромии* изображаются на ней прямыми линиями, которые пересекают меридианы под одним и тем же углом, что является весьма удобным в мореплавании.

*Локсодромия* в переводе с греческого означает «косой бег». На поверхности Земли она представляет собой спираль, которая приближается к полюсу, но никогда его не достигает. Локсодромия не является кратчайшим расстоянием между точками на поверхности земного эллипсоида. Кратчайшим расстоянием является линия *ортодромии* («прямой бег»), однако для небольших расстояний разница между локсодромией и ортодромией весьма незначительна.

Пространства около полюсов на карте Меркатора не изображаются. Районы около Северного и Южного полюсов даются отдельной врезкой, составленной, чаще всего, в азимутальной проекции.

В проекции Ламберта, наоборот, Северный и Южный полюсы изображаются, однако масштаб изображения при перемещении к полюсам значительно изменяется в зависимости от направления: изображение сжимается при приближении к полюсам, в связи с чем полярные области также изображают отдельно.

## § 8. Общие сведения о топографических картах и планах

*Картой* называют уменьшенное изображение на плоскости значительных по площади участков земной поверхности, построенное по определенным математическим законам с учетом кривизны Земли.

*План* является уменьшенным подобным изображением небольших участков поверхности Земли, построенным в ортогональной проекции без учета кривизны Земли.

Все карты делятся на две основные группы: *научно-технические карты* и *карты общего использования*.

Картами общего использования являются всевозможные *учебные карты, туристические карты, карты прогноза погоды, карты-схемы* и т.п.

К научно-техническим картам относятся *топографические карты, мелко-масштабные географические карты, тематические карты* и др.

Топографические карты, в свою очередь, делятся на *топографические карты суши* и *топографические карты шельфа и внутренних водоемов*. Основными из них являются топографические карты суши.

*Шельф* – это мелководная зона подводной окраины материков, распространяющаяся от береговой линии до резкого перегиба поверхности дна. Средний угол наклона шельфа составляет 7 угловых минут. Ширина шельфа колеблется от нескольких десятков метров до тысячи и более километров. Топографическая поверхность суши (береговой зоны) на картах шельфа передается с топографических карт суши. Другими элементами содержания карт шельфа являются математическая основа, ориентиры (в том числе навигационные), рельеф дна, берега, донные отложения (грунты), подводная растительность и донные организмы.

Топографические карты являются универсальными и могут использоваться в различных отраслях хозяйственной деятельности человека и в обороне страны. Они являются подробными картами, позволяющими определять как плановое, так и высотное положение точек на земной поверхности, а также характеристику и взаимосвязь объектов местности. Для топографических карт принят единый ряд масштабов: 1:1000000; 1:500000; 1:200000; 1:100000; 1:50000; 1:25000; 1:10000; 1:5000; 1:2000. Условно их делят на три группы:

- крупномасштабные (от 1:2000 до 1:50000);
- среднемасштабные (1:100000 и 1:200000);
- мелкомасштабные (1:500000 и 1:1000000).

Кроме того, поверхность Земли изображают и в более крупном масштабе: 1:1000 и 1:500. Топографические изображения в масштабах от 1:10000 до 1:1000000 называют топографическими картами, а в масштабах от 1:500 до 1:5000 – *топографическими планами*. Отнесение масштабов 1:2000 и 1:5000 одновременно к топографическим картам и планам зависит от того, каким образом получены для них рамки: если рамки являются параллелями и меридианами, то данные изображения относят к картам; если рамки являются линиями сетки прямоугольных координат, то их относят к планам.

Поскольку топографические карты составляют на значительные по площади территории, то с геометрической точки зрения они представляют собой более или менее искаженное изображение земной поверхности. При этом *большие* по размерам территории получают и *большие* искажения в положении отображенных на карте объектов. Существует понятие *частного масштаба* карты в каждой конкретной ее точке и по направлениям, исходящим из этой точки. Под частным масштабом понимается отношение длины бесконечно малого отрезка на карте к длине соответствующего отрезка на поверхности эллипсоида или шара, которые используются в геодезии для описания формы Земли. На самой карте указывают *главный масштаб*, который отличается от частного масштаба тем, что он показывает степень уменьшения линейных размеров эллипсоида или шара при изображении на горизонтальной плоскости. В отличие от карты топографические планы составляют в ортогональной проекции без учета кривизны Земли, в связи с чем масштаб плана будет постоянным по всему изображению.

От масштаба изображения зависит та или иная степень детализации в представлении того или иного объекта. При графических работах погрешность измерений на карте (плане) или нанесения на нее информации может быть определена величиной в 0,1 мм (предельная погрешность составляет 0,2

мм), что примерно соответствует уколу циркуля-измерителя. При использовании топографической карты масштаба 1:М погрешность составит  $(0,1M)$  мм или  $(0,1M) : 1000$  м. Так, для карты масштаба 1 : 10000 эта погрешность будет равна  $(0,1 \times 10000)$  мм или 1 м, а для плана масштаба 1 : 500 – 50 мм или 0,05 м.

*Крупномасштабные топографические карты* используются при детальном планировании и проектировании инженерных сооружений, производстве точных картометрических работ, при детальном изучении местности.

*Среднемасштабные топографические карты* используются для предварительного проектирования средних инженерных сооружений, при различных изысканиях в строительстве линейных сооружений и др. Указанные карты являются основой для создания карт обзорного вида.

*Мелкомасштабные топографические карты* значительно уступают в подробности изображения картам средних и крупных масштабов. Они используются для общего изучения местности, при производстве предварительного проектирования крупных инженерных сооружений, при анализе состояния больших площадей на территории государства, а также для составления обзорных тематических карт более мелкого масштаба.

На топографических картах независимо от их масштабов обязательно изображаются следующие объекты:

- пункты Государственной геодезической сети (см. гл. 4);
- населенные пункты;
- отдельные строения, сооружения и предметы, являющиеся ориентирами (заводские и фабричные трубы, церкви, отдельно стоящие деревья, крупные камни и т.п.);
- объекты промышленности, сельскохозяйственные и социально-культурные объекты;
- дорожная сеть и сооружения, относящиеся к ней;
- объекты гидрографии и сооружения, относящиеся к ней;
- рельеф местности (см. § 16);
- растительный покров и грунты;
- границы и ограждения;
- в населенных пунктах (на топографических планах) объекты подземных и наземных коммуникаций.

## **§ 9. Система географических координат**

Для определения положения точек земной поверхности используется поверхность референц-эллипсоида. В каждой точке поверхности референц-эллипсоида существует два основных направления: направление нормали к поверхности и направление линии силы тяжести. Координаты, определяемые с использованием нормали, называют *геодезическими*, а координаты, определяемые с использованием линии направления силы тяжести, - *астрономическими*.

В соответствии с этим существует и два вида меридианов: астрономический и геодезический. *Астрономический меридиан* определяется линией пересечения с поверхностью Земли плоскости, проходящей через отвесную линию в данной точке параллельно оси вращения Земли. *Геодезический меридиан* определяется линией пересечения с поверхностью Земли плоскости, которая проходит через нормаль к поверхности референц-эллипсоида и через ось вращения Земли.

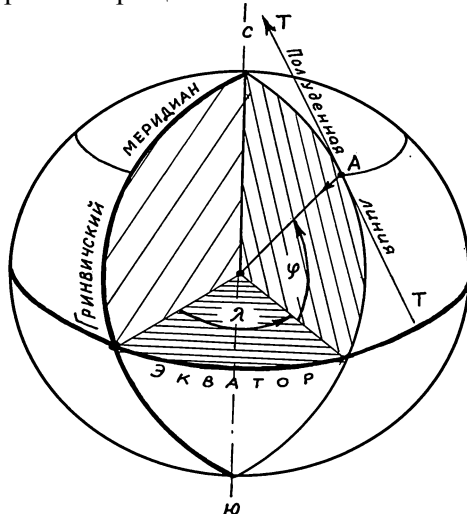


Рис. 2.6. Система географических координат

Астрономические координаты (широту, долготу, азимут) получают для определения положения точки на поверхности геоида по наблюдениям небесных светил (звезд, Солнца и др.). Геодезические координаты определяют положение точки на поверхности земного эллипсоида, при этом проектирование точек производится по нормальям к его поверхности. Для мелкомасштабных карт и карт среднего масштаба различие между астрономическими и геодезическими координатами можно пренебречь, поэтому обе системы (геодези-

ческих и астрономических координат) объединяют в одну – *географическую систему координат* (рис. 2.6).

*Географической долготой* точки  $A$  называется двугранный угол  $\lambda$  в плоскости экватора, образованный плоскостью начального (Гринвичского) меридиана и плоскостью меридиана, проходящего через данную точку. Долгота изменяется от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  на восток и запад от Гринвичского меридиана. Восточным долготам придается знак «плюс», западным – знак «минус». Иногда пользуются только восточной системой долгот – от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  на восток от Гринвичского меридиана.

*Географической широтой* называют угол  $\varphi$  в плоскости меридиана точки  $A$ , образованный плоскостью экватора и направлением линии силы тяжести в данной точке. Широта изменяется от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  на север и юг от экватора. Северным широтам приписывают знак «плюс», южным – знак «минус».

## § 10. Равноугольная поперечно-цилиндрическая проекция Гаусса-Крюгера

Поперечно-цилиндрическая проекция для изображения поверхности земного эллипсоида на плоскости была разработана немецким геодезистом *Зольднером* и французским геодезистом *Кассини*. Впоследствии К.Гаусс применил к этой проекции принцип равноугольности, причем масштабы



изображения в новой проекции в каждой ее точке в любом направлении были одинаковыми. Информация о новой проекции была опубликована К.Гауссом в 1825 году, а спустя почти 90 лет, в 1912 году, ученый Л.И.Крюгер (1857 - 1923) опубликовал рабочие формулы этой проекции. Сейчас указанная проекция названа именами Гаусса и Крюгера.

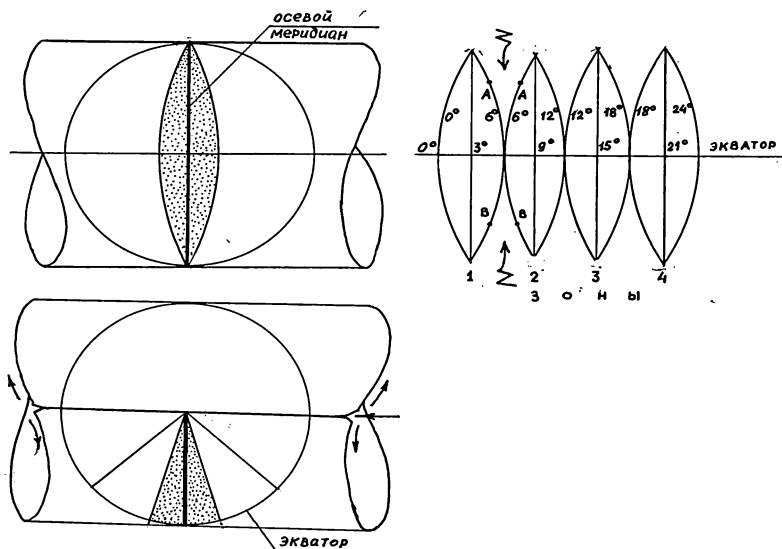


Рис.2.7. Равноугольная поперечно-цилиндрическая проекция Гаусса-Крюгера.

Предположим, что фигурой Земли является шар радиусом  $R$ . Построим вокруг Земли цилиндрическую поверхность, касающуюся поверхности шара по меридиану (рис. 2.7). В проекции Гаусса на цилиндр проектируется только часть поверхности шара (или эллипсоида), ограниченная по долготе меридианами по  $3^\circ$  в стороны от меридиана, касательного к цилиндру, так называемая  $6^\circ$  зона. Всего таких зон – 60.

Касательный к цилиндрической поверхности меридиан зоны называют *центральный* или *осевым меридианом* зоны. Счет зон ведут на восток от Гринвичского меридиана и обозначают их арабскими цифрами (1, 2, ..., 60). Осевой меридиан 1-й зоны имеет восточную долготу  $3^\circ$ . Долготу осевого меридиана любой зоны с номером  $n$  можно определить по формуле:

$$\lambda_0 = 6^\circ n - 3^\circ. \quad (2.7)$$

В маркшейдерии применяют проекции 3° зон (120 зон). Осевой меридиан 1-ой  $3^\circ$ -ной зоны совпадает с осевым меридианом 1-ой  $6^\circ$ -ной зоны.

Основные свойства проекции Гаусса-Крюгера следующие:

- осевой меридиан зоны изображается без искажений и представляет собой на плоскости прямую линию. Все другие меридианы этой зоны изображаются сложными кривыми;
- экватор в проекции представляет собой прямую линию, перпендикулярную проекции осевого меридиана. Все другие параллели данной зоны являются сложными кривыми;

- направления на местности в проекции передаются практически без искажений;
- сохраняется масштаб изображения (частный масштаб) малых участков поверхности Земли.

## § 11. Разграфка и номенклатура топографических карт и планов

*Номенклатура* – это система обозначения листов карт разных масштабов.

Система деления карт на листы с помощью линий картографической сетки (линий меридианов и параллелей) или прямоугольной координатной сетки (координатных линий) называется *разграфкой*.

В основу деления карт на листы в нашей стране принята международная разграфка карт масштаба 1:1000000 (рис. 2.8). Разбивка на *ряды* параллелями производится от экватора через каждые  $4^\circ$  широты. Ряды обозначают буквами латинского алфавита : A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, W. *Колонны* в своих границах совпадают с  $6^\circ$  зонами проекции Гаусса-Крюгера, но нумерация их ведется от меридиана  $\pm 180^\circ$  на восток. Таким образом, номер колонны отличается от номера зоны на 30 единиц. Колонны нумеруются арабскими цифрами.

Предположим, что номер колонны 47. Тогда номер соответствующей зоны будет  $47 - 30 = 17$ . Если номер колонны меньше 30, то для определения номера зоны следует к номеру колонны прибавить 30.

Номенклатура первого листа топографической карты масштаба 1 : 1000000 составляется из буквы ряда и номера колонны. Например, Н – 47.



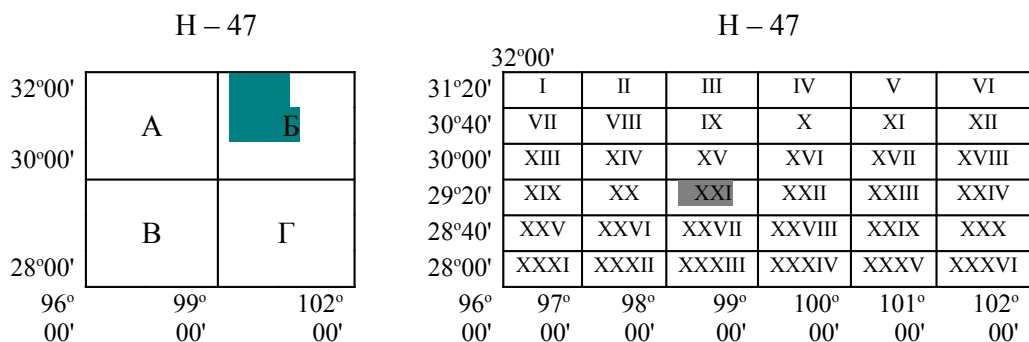


Рис. 2.9. Разграфка и номенклатура топографических карт масштабов 1:500000 и 1:200000  
(Примеры обозначений: 1:500000 – **Н – 47 – Б**; 1:200000 – **Н – 47 – XXI**)

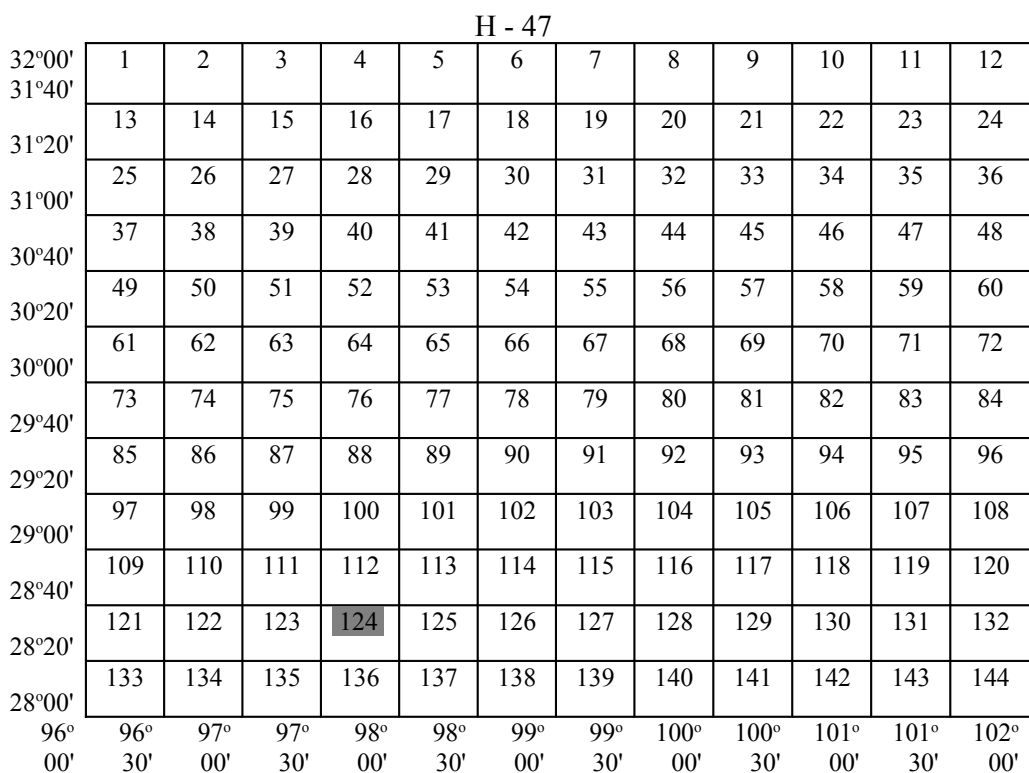


Рис. 2.10. Разграфка и номенклатура топографических карт масштаба 1:100000  
(Пример обозначения: **Н – 47 – 124**)

Для топографических планов принята прямоугольная разграфка:

- для 1:5000 – 40 см х 40 см;
- для 1:2000, 1:1000 и 1:500 – 50 см х 50 см.

Основой для номенклатуры планов является лист масштаба 1:5000, обозначение которого берется по его номеру топографической карты, напри-

мер, 36. Схема разграфки на листы крупных масштабов (топографических планов) имеет вид, представленный на рис. 2.12.

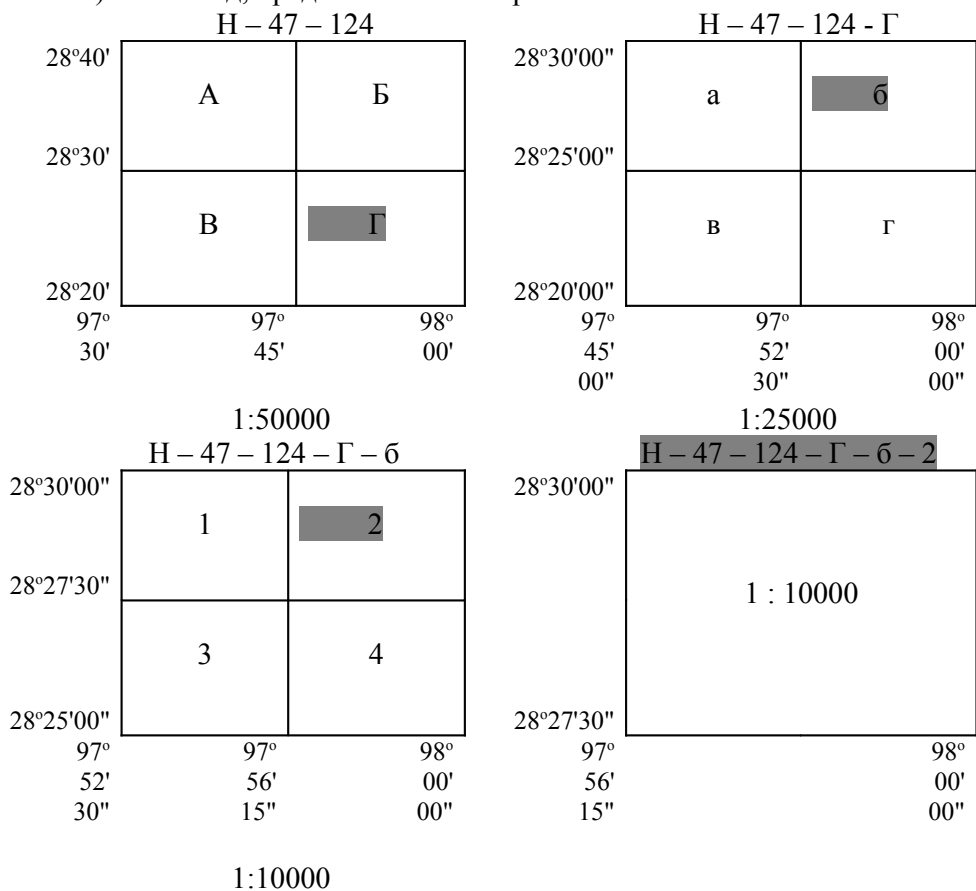


Рис. 2.11. Разграфка и номенклатура топографических карт масштабов 1:50000, 1:25000 и 1:10000  
(Примеры обозначений: 1:50000 – Н-47-124-Г; 1:25000 – Н-47-124-Г-6; 1:10000 – Н-47-124-Г-6-2)

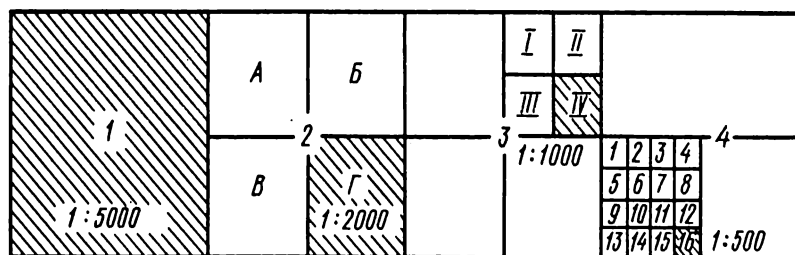


Рис. 2.12. Разграфка и номенклатура топографических планов  
 $1 : 2000 = (1 : 5000) : 4 \rightarrow (A, Б, В, Г)$ , например, **36-Г**  
 $1 : 1000 = (1 : 2000) : 4 \rightarrow (I, II, III, IV)$ , например, **36-Б-IV**  
 $1 : 500 = (1 : 2000) : 16 \rightarrow (1, 2, 3, \dots, 16)$ , например, **36-В-16**

По географическим координатам точки можно определить номенклатуру любого листа топографической карты, на котором эта точка находится.

**Пример 2.1.** Требуется определить номенклатуру листа топографической карты масштаба 1:10000, на котором находится точка со следующими географическими координатами: долгота восточная  $\lambda = 97^{\circ}59'$ ; широта северная  $\varphi = 28^{\circ}28'$ .

**Решение.** Предварительно необходимо определить номенклатуру листа миллионного масштаба (1:1000000), а затем, пользуясь установленной последовательностью разграфки, получить масштаб 1 : 10000.

Для определения буквы ряда необходимо значение широты точки разделить на  $4^{\circ}$  с округлением результата в *большую* сторону:

$$(28^{\circ} 28') : 4^{\circ} = (28,467^{\circ}) : 4^{\circ} = 7,12 = 8.$$

Восьмой буквой латинского алфавита является буква **Н**.

Для определения номера колонны необходимо значение долготы точки разделить на  $6^{\circ}$ , прибавить 30 единиц и округлить полученный результат в *большую* сторону:

$$[(97^{\circ}59') : 6^{\circ}] + 30 = [(97,983^{\circ}) : 6^{\circ}] + 30 = 16,33 + 30 = 46,33 = 47.$$

Следовательно, номенклатура топографической карты масштаба 1:1000000, на которой находится указанная в задании точка, - **Н-47**. Такой же результат получится и при использовании разграфки, приведенной на рис.2.8.

Для получения номенклатуры листа топографической карты масштаба 1:10000, как это видно из схемы разграфки, нет необходимости определять номенклатуры листов масштабов 1:500000 и 1:200000, однако в учебных целях решим попутно и эту задачу.

Номенклатура карты 1:500000 (рис. 2.9), на которой находится искомая точка – **Н-47-В**, а листа масштаба 1:200000 (рис. 2.9) – **Н-47-XXXII**.

На рис.2.10 приведена разграфка карты **Н-47** для получения листов масштаба 1:100000. В соответствии с разграфкой получен лист масштаба 1:100000 – **Н-47-124**, соответствующий условию задачи.

Для масштаба 1:50000 (рис. 2.11) – **Н-47-124-Г**.

Для масштаба 1:25000 (рис. 2.11) – **Н-47-124-Г-б**.

Для масштаба 1:10000 (рис. 2.11) – **Н-47-124-Г-б-2** (ответ).

Если бы была поставлена задача определения номенклатуры листа масштаба 1:2000, то определение номенклатуры листов 1:50000, 1:25000 и 1:10000 можно опустить, т.к. масштаб 1: 2000 получают из масштаба 1:5000, который, в свою очередь, образуется из листа масштаба 1:100000. Принцип разграфки такой же, как и в рассмотренном выше решении.

**Пример 2.2.** Часто требуется использовать и соседние листы топографических карт данного масштаба (с севера, юга, запада и востока). Для этого в разрыве внешней рамки карты указывают номенклатуру соседнего листа.

**Решение.** В соответствии с рис. 2.11, на полученной в примере топографической карте масштаба 1:10000, номенклатура которой **Н-47-124-Г-б-2**, в разрывах внешней рамки были бы указаны следующие обозначения соседних листов:

северная рамка	- <b>Н-47-124-Б-г-4</b>
южная рамка	- <b>Н-47-124-Г-б-4</b>
восточная рамка	- <b>Н-47-125-В-а-1</b>
западная рамка	- <b>Н-47-124-Г-б-1</b>

В связи с тем, что при движении на север или юг проектируемые на плоскость части земной поверхности сужаются, то листы топографических карт становятся узкими и для практического пользования неудобными. Поэтому листы топографических карт севернее параллели  $60^{\circ}$  издаются

сдвоенными по долготе, а севернее параллели  $76^\circ$  (до  $88^\circ$ ) – счетверенными по долготе. На участках (на севере и юге) по широтам от  $88^\circ$  до  $90^\circ$  находятся полярные шапки, которые изображают в азимутальной проекции. Вид такой проекции представлен на рис. 2.2.

## § 12. Зональная система плоских прямоугольных координат Гаусса

Как уже указывалось в § 10, поверхность земного эллипсоида изображают на плоскости в проекции Гаусса-Крюгера в пределах  $6^\circ$  (или  $3^\circ$ ) зон. Проекции осевого меридиана зоны и экватора образуют на плоскости две взаимно перпендикулярные линии, которые и принимают в качестве осей  $x$  и  $y$  прямоугольных координат. Осью  $x$  является проекция осевого меридиана зоны, а осью  $y$  – проекция экватора (рис. 2.13). В каждой из зон образуется своя отдельная система прямоугольных координат.

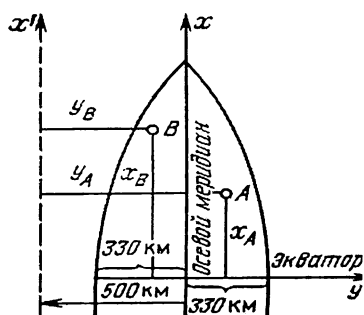


Рис. 2.13. Зональная система прямоугольных координат

Для территории России абсциссы  $x$  всех точек положительные, а ординаты  $y$  могут быть положительными и отрицательными. Для удобства в работе ось  $x$  вынесли за пределы зоны на запад на 500 км, т.е. сделали ординаты всех точек зоны положительными.

Таким образом, положение любой точки в зоне определяется координатой  $x$  (расстоянием до точки от экватора) и координатой  $y$ , определяемой расстоянием от вынесенного на запад осевого меридиана (оси  $x$ ) до точки при перемещении на восток.

Координата  $y$  взаимосвязана с расстоянием  $y(L)$  от точки до осевого меридиана зоны следующим соотношением:

$$y = 500 \text{ км} + y(L). \quad (2.8)$$

При этом следует иметь ввиду, что значение  $y(L)$  может быть отрицательным, когда точка находится в западной от осевого меридиана части зоны ( $y < 500$  км), и положительным, если точка находится в восточной части зоны ( $y > 500$  км). Величины  $y(L)$  называют *действительными значениями ординат* в зоне, а значения  $y$  – *преобразованными ординатами*.

Поскольку системы прямоугольных координат подобны для каждой зоны, то необходимо ввести параметр для различения двух точек  $A$  и  $B$ , имеющих одинаковые координаты  $x$  и  $y(L)$ , но находящихся в разных зонах. Для этого впереди координаты  $y$  приписывают номер зоны.

**Пример 2.3.** Точка находится на расстоянии 5237,635 км от экватора и на расстоянии 105,842 км к западу от осевого меридиана 7-й зоны. Записать прямоугольные координаты точки.

**Решение.** Координатой  $x$  будет указанное расстояние точки от экватора – 5237,635 км. Поскольку  $L = -105,842$  км (западная часть зоны), то, пользуясь формулой (2.8), получим  $y = 500,000 \text{ км} - 105,842 \text{ км} = 394,158 \text{ км}$  (7-я зона). Следовательно:

$$x = 5\,237,635 \text{ км}; \quad y = 7\,394,158 \text{ км}$$

Для того, чтобы определить номер зоны по координате  $y$ , необходимо от запятой, отделяющей целые километры, отсчитать влево три значащих цифры. Остаток будет номером зоны.

**Пример 2.4.**  $y = 16\,636\,835 \text{ м} = 16\,636,835 \text{ км} \rightarrow 16\text{-я зона.}$

$$y(L) = 636,835 \text{ км} - 500,000 \text{ км} = +136,835 \text{ км (восточная часть зоны).}$$

### § 13. Перевычисление координат из зоны в зону

Поскольку в каждой из зон существует своя отдельная система прямоугольных координат, то часто, при переходе из зоны в зону (при продвижении инженерных работ) возникает необходимость перевычисления координат, например, из зоны  $n$  в зону  $(n+1)$  или в зону  $(n-1)$ .

Предположим, что некоторая точка  $A$  имеет геодезические координаты  $B_A$  (геодезическую широту) и  $L_A$  (геодезическую долготу). Поскольку разность долгот граничных меридианов зоны равна  $6^\circ$ , то соответственно для каждой из зон можно получить долготы крайних меридианов: 1-я зона ( $0^\circ - 6^\circ$ ), 2-я зона ( $6^\circ - 12^\circ$ ), 3-я зона ( $12^\circ - 18^\circ$ ) и т.д. Таким образом, по геодезической долготе точки  $A$  можно определить номер зоны, в которой эта точка находится. При этом долгота осевого меридиана зоны определится по формуле (2.7):  $L_o = (6^\circ n - 3^\circ)$ , в которой  $n$  – номер зоны.

Для определения плоских прямоугольных координат  $x$  и  $y$  по геодезическим координатам  $B$  и  $L$  воспользуемся формулами, выведенными для референц-эллипсоида Красовского:

$$x = 63675584969(B_{\text{рад}}) - \left\{ a_o - \left[ 0,5 + (a_4 + a_6 l^2) l^2 \right] l^2 N \right\} \sin B \cos B; \quad (2.9)$$

$$y(L) = \left[ 1 + (a_3 + a_5 l^2) l^2 \right] l N \cos B. \quad (2.10)$$

В формулах (2.9) и (2.10) приняты следующие обозначения:

$l = (L - L_o)'' / \rho''$  – разность долгот определяемой точки и осевого меридиана зоны в радианной мере;

$\rho'' = 206264,8062''$  – число секунд в одном радиане;

$B_{\text{рад}} = B'' / \rho''$  – широта точки, выраженная в радианной мере;

$N = 6399698,902 - [21562,267 - (108,973 - 0,612 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B$ ;  $N$  – один из главных радиусов кривизны референц-эллипсоида Красовского (*радиус кривизны первого вертикала*);

$$a_o = 32140,404 - [135,3302 - (0,7092 - 0,0040 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B;$$

$$a_3 = (0,3333333 + 0,001123 \cos^2 B) \cos^2 B - 0,1666667;$$

$$a_4 = (0,25 + 0,00252 \cos^2 B) \cos^2 B - 0,04166;$$

$$a_5 = 0,0083 - [0,1667 - (0,1968 + 0,0040 \cos^2 B) \cos^2 B] \cos^2 B;$$

$$a_6 = (0,166 \cos^2 B - 0,084) \cos^2 B.$$

При высокоточных геодезических работах значения широт и долгот вычисляют до  $0,0001''$ , а значения координат  $x$  и  $y(L)$  – до  $0,001 \text{ м}$ .

По формуле (2.10) значение координаты  $y(L)$  получают относительно осевого меридиана зоны, т.е. оно может получиться со знаками «плюс» (для восточной части зоны) или «минус» (для западной части зоны). Для записи координаты  $y$  в зональной системе координат необходимо вычислить рассто-



яние до точки от осевого меридиана зоны, отнесенного на запад на 500 км, а впереди полученного значения приписать номер зоны. Например, получено значение  $y(L) = -303678,774$  м в 47 зоне. Тогда

$$y = 47 (500000,000 - 303678,774) = 47196321,226 \text{ м.}$$

Пример вычисления плоских прямоугольных координат по геодезическим координатам приведен в табл. 2.3.

Зная прямоугольные координаты точек, можно вычислить геодезические координаты (обратный расчет). Такие вычисления выполняют для контроля вычисления координат. Т.е. при решении любых задач на перевычисление координат обратный расчет позволяет оценить правильность получаемых величин.

Формулы для вычисления геодезических координат по прямоугольным координатам имеют следующий вид:

$$B = B_x - [1 - (b_4 - 0,12 z^2) z^2] b_2 \rho'' ; \quad (2.11)$$

$$L = L_o + l ; \quad (2.12)$$

$$l = [1 - (b_3 - b_5 z^2) z^2] z \rho'' . \quad (2.13)$$

В формулах (2.11) и (2.12):

$$N_x'' = \beta'' + \{50221746 + [293622 + (2350 + 22\cos^2\beta)\cos^2\beta]\cos^2\beta\} 10^{-10} \sin\beta \cos\beta \rho'' ;$$

$$\beta'' = [(x / 636755864969)] \rho'' ;$$

$$z = y(L) / (N_x \cos B_x) ;$$

$$N_x = 6399698,902 - [21562,267 - (108,973 - 0,612 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x] \cos^2 B_x ;$$

$$b_2 = (0,5 + 0,003369 \cos^2 B_x) \sin B_x \cos B_x ;$$

$$b_3 = 0,333333 - (0,166667 - 0,001123 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x ;$$

$$b_4 = 0,25 + (0,16161 + 0,00562 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x ;$$

$$b_5 = 0,2 - (0,1667 - 0,0088 \cos^2 B_x) \cos^2 B_x .$$

Предварительно по значению  $y$  определяют номер зоны, в которой расположена определяемая точка, по номеру зоны определяют долготу  $L_o$  осевого меридиана и по расстоянию от точки до отнесенного на запад осевого меридиана находят расстояние  $y(L)$  от точки до осевого меридиана зоны (последнее может быть со знаком плюс или минус). Пример вычисления геодезических координат по прямоугольным приведен в табл. 2.3.

Преобразование прямоугольных координат Гаусса из зоны в зону предусматривает выполнение вычислений по тем и другим формулам.

Предположим, что в зоне 12 (на ее краю в восточной части) имеется точка  $A$  с прямоугольными координатами  $x_A$  и  $y_A$ . Необходимо найти ее координаты в зоне 13.

Алгоритм решения задачи следующий.

1. По формулам (2.11), (2.12) и (2.13) вычисляют геодезические координаты точки  $A$   $B_A$  и  $L_A$  (прямой расчет).

2. По полученным геодезическим координатам  $B_A$  и  $L_A$  по формулам (2.9) и (2.10) вычисляют прямоугольные координаты точки  $A$  в зоне 12 (обратный расчет) и убеждаются в совпадении их значений с исходными координатами.

**Пример 2.5.** Точка имеет геодезические координаты: широту  $B = 47^\circ 02' 15,0543''$  и долготу  $L = 65^\circ 01' 38,2456''$ . Вычислить прямоугольные координаты точки с обратным расчетом.

Таблица 2.3

№№ п/п	Параметр	Вычисление $x$ и $y$ по $B$ и $L$	Параметр	Вычисление $B$ и $L$ по $x$ и $y$
1	$B^\circ$	47°02'15,0543"	$\beta_{\text{рад}}$	0,818760380
2	$B''$	169335,0543"	$\beta''$	168881,4511"
3	$B''/\rho''$	0,820959510	$\beta^\circ$	46°54'41,4512"
4	$\sin B$	0,731800091	$\sin \beta$	0,730299573
5	$\cos B$	0,681519352	$\cos \beta$	0,683127026
6	$\cos^2 B$	0,464468627	$\cos^2 \beta$	0,466662533
7	$l^\circ$	+2°01'38,2456"	$B_{x \text{ рад}}$	0,821272741
8	$l''/\rho''$	+0,035382893	$B_x''$	169399,6627"
9	$N$	6389707,353 м	$B_x^\circ$	47°03'19,6628"
10	$a_0$	32077,69996	$\sin B_x$	0,732013528
11	$a_4$	0,075000799	$\cos B_x$	0,681290096
12	$a_6$	-0,003204001	$\cos^2 B_x$	0,464156195
13	$a_3$	-0,011601574	$N_x$	6389714,058 м
14	$a_5$	-0,026270237	$N_x \cos B_x$	4353248,903 м
15	$l^2$	0,001251949	$z$	+0,035394247
16	$N l^2$	7999,587730 м	$z^2$	0,001252753
17	$X$	5213504,617 м	$B$	47°02'15,0542"
18	$y(L)$	+154079,966 м	$l^\circ$	+2°01'38,2456"
19	$y$	11654079,966 м	$L$	65°01'38,2456"

Примечания:

1. Во второй части таблицы не приведены значения коэффициентов  $b$ .
2. Расхождения в значениях  $B$ , равное 0,0001" можно считать допустимым, поскольку погрешность в определении координаты  $x$  в этом случае составляет немногим более 3 мм (1" дуги меридиана примерно соответствует 33 м).

3. Используя полученные геодезические координаты  $B_A$  и  $L_A$ , с учетом значения долготы осевого меридиана зоны 13, т.е. зоны, в которую производится перевычисление координат, по формулам (2.9) и (2.10) определяют прямоугольные координаты точки  $A$  в зоне 13 (прямой расчет).

4. Обратным расчетом, используя полученные координаты точки  $A$  в зоне 13, по формулам (2.11), (2.12) и (2.13), убеждаются в правильности вычислений, т.е. в совпадении значений геодезических координат, полученных в п.1.

Если нет необходимости в точном вычислении координат точек, например, для углов съемочных трапеций, при предварительной оценке прямоугольных координат точек местности при использовании геологических карт мелких масштабов и др., то пользуются упрощенными формулами, либо специальными таблицами.

## § 14. Система высот

В § 9 и § 12 были рассмотрены т.н. *плановые системы координат*, географические и прямоугольные, определяющие положение любой точки на поверхности земного эллипсоида, либо *референц-эллипсоида*. Для получения полной информации о положении точки на физической поверхности Земли используется третья координата – *высота*.

За начало отсчета высот принимается средний уровень Балтийского моря, являющегося *основной уровенной поверхностью*, совпадающей с поверхностью геоида. Положение среднего уровня Балтийского моря определено в результате многолетних наблюдений и отмечено на *футштоке* на водомерном посту в г. Кронштадте.

*Футшток* – рейка с делениями, укрепленная отвесно на берегу так, чтобы обеспечивалась возможность отсчитывания по ней положения поверхности воды, находящейся в спокойном состоянии. *Кронштадтский футшток* – черта на медной пластине, вмонтированной в гранитный устой Синего моста Обводного канала в г. Кронштадте. Первый футшток был установлен во времена правления Петра I, и в 1703 г. начались регулярные наблюдения за уровнем Балтийского моря. Вскоре футшток был разрушен и только с 1825 г. (и до настоящего времени) были возобновлены регулярные наблюдения. В 1840 г. гидрографом *М.Ф.Рейнеке* была вычислена высота уровня Балтийского моря и зафиксирована на гранитном устое моста в виде глубокой горизонтальной черты. С 1872 г. эта черта принята за нулевую отметку при вычислении высот всех точек на территории государства. Кронштадтский футшток неоднократно видоизменялся, однако положение его основной отметки при изменениях конструкции сохраняли прежней, т.е. определенной в 1840 г.

Положение точки определяется расстоянием от нее по линии направления силы тяжести до основной уровенной поверхности (рис. 2.14). Это расстояние называют *абсолютной высотой точки*.

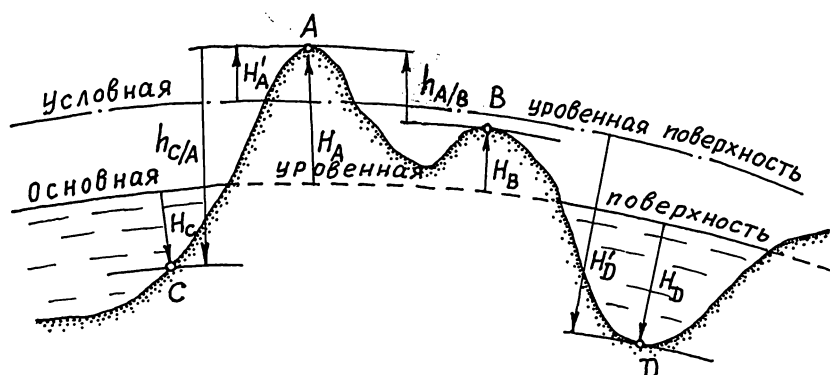


Рис. 2.14. Система высот.

Абсолютные высоты  $H$  могут быть положительными (для точек, находящихся в нашем представлении выше уровня Балтийского моря), и отрицательными – для точек, находящихся ниже уровня Балтийского моря. Например, абсолютные высоты точек  $A$  и  $B$  – положительные, а абсолютная высота точки  $C$  – отрицательная.

Разность абсолютных высот двух точек называется *относительной высотой* или *превышением*, обозначаемым буквой  $h$ :

$$h = H_A - H_B . \quad (2.14)$$

Превышение одной точки над другой также может быть положительным и отрицательным. Если абсолютная высота точки  $A$  больше абсолютной высоты точки  $B$ , т.е. находится выше точки  $B$ , то превышение точки  $A$  над точкой  $B$  будет положительным, и наоборот, превышение точки  $B$  над точкой  $A$  – отрицательным.

**Пример 2.6.** Абсолютные высоты точек  $A$  и  $B$ :  $H_A = +124,78$  м;  $H_B = +87,45$  м.

Найти взаимные превышения точек  $A$  и  $B$ .

**Решение.**

Превышение точки  $A$  над точкой  $B$   $h_{A(B)} = +124,78 - (+87,45) = +37,33$  м. Пре­вышение точки  $B$  над точкой  $A$   $h_{B(A)} = +87,45 - (+124,78) = -37,33$  м.

**Пример 2.7.** Абсолютная высота точки  $A$  равна  $+124,78$  м. Пре­вышение точки  $C$  над точкой  $A$  равно  $h_{C(A)} = -165,06$  м.

Найти абсолютную высоту точки  $C$ .

**Решение.**

По формуле (2.14) абсолютная высота точки  $C$  равна  $H_C = H_A + h_{C(A)} = +124,78 + (-165,06) = -40,28$  м.

## § 15. Условные знаки топографических карт и планов

На топографических планах и картах объекты местности изображают определенными *условными знаками*.

Различают следующие основные виды условных знаков: масштабные (контурные), внемасштабные, площадные, линейные условные знаки, а также пояснительные надписи и подписи.

*Масштабные условные знаки* применяют для изображения предметов местности (ситуации), которые могут быть изображены в масштабе данной карты или плана. Плановое положение точек объекта в этом случае на изображении соответствует их плановому положению на местности.

*Внемасштабные условные знаки* применяют для таких контуров и объектов, которые не могут быть выражены в данном масштабе, поскольку их размеры меньше графической точности построения изображения. За положение объекта в этом случае принимают одну его точку (или точки линии), являющуюся, обычно, центром фигуры условного обозначения (круг, квадрат, прямоугольник, осевая линия знака, изображающего, например, дорогу и т.п.).

Следует заметить, что в зависимости от масштаба изображения одни и те же объекты могут изображаться как масштабными, так и внемасштабными условными знаками. При изображении, например, дороги в масштабе 1:500, ширина которой равна 10 м, используется масштабный знак (две линии), расстояние между которыми на плане будет равно 20 мм, что значительно превосходит точность масштаба этого плана. При изображении той же дороги в масштабе 1:500000 требовалось бы нанести границы дороги на расстоя-

нии 0,02 мм, что невозможно. Вследствие этого дорога указанной ширины на карте масштаба 1:500000 изображается одной линией определенной ширины. При этом центральная осевая линия изображения в плане совпадает с ее положением на местности.

*Площадные условные знаки* используют для заполнения площадей объектов, которые выражаются в масштабе данного картографического изображения.

*Линейными условными знаками* показывают положение объектов линейного характера (дорожная сеть, гидрография, линии электропередач, линии телефонной связи и т.п.).

*Пояснительные подписи* используют для раскрытия качественной и количественной характеристики объектов, изображенных теми или иными условными знаками (характеристики мостов, дорог, населенных пунктов и т.д.). Так, например, подпись на дороге 12(15)А означает, что ширина ее проезжей части – 10 м, ширина дороги вместе с обочинами – 15 м, А – материал покрытия (асфальт, асфальтобетон).

Характеристика населенных пунктов по типу, политико-административному значению и численности населения передается размером и начертанием подписей их названия. Подпись, например, у населенного пункта *Полетаево 320 МС* означает, что в нем 320 домов, имеется Местный Совет.

В последнее время у подписи населенного пункта стали указывать не количество домов, а количество жителей в тысячах человек: *Красный Куст 0,130* – 130 человек. Часто в скобках рядом с названием населенного пункта указывают специализацию хозяйства, например, АО Нива (зерн.) – Акционерное Общество «Нива» (зерновое хозяйство). В связи с тем, что названия органов местного управления в последнее время стали часто меняться, то на картах современных лет издания можно встретить разные аббревиатуры этих названий. Могут также измениться и обозначения совхоза, колхоза, а появиться, например, указанное выше обозначение – АО Нива (зерн.), вместо бывшего совхоза «Россия».

При изображении объектов на топографических картах и планах пользуются *цветовым фоном*. Контур растительности (леса, сады и пр.) закрашивается зеленым цветом различных оттенков, объекты гидрографии – синим, голубым, дороги шоссейные, автострасы – желтым, бледно-красным или оранжевым цветом, рельеф – коричневым. Все остальные объекты изображают черным цветом.

Важное место на топографических планах и картах отводится *шрифтам*, которые передают не только смысловое значение подписей, но и служат средством отражения определенных сведений об объекте. Размер и наклон букв, их толщина дают информацию об административном значении пункта, численности жителей и т.п. Наклон букв в подписях названий рек указывает на их транспортное значение.

Совокупность условных знаков, применяемых при изображении объектов местности на картах и планах различных масштабов, является стандартной и обязательной к использованию и исполнению всеми государственными и коммерческими организациями, которые используют или составляют топографические карты или планы. Государственный стандарт на

условные знаки приводятся в специальных изданиях «Условные знаки топографических карт» и «Условные знаки топографических планов» [39, 40 и др.]. Эти стандарты время от времени обновляются, при этом действие старых стандартов прекращается, и они запрещаются к использованию.

## § 16. Изображение рельефа на топографических картах и планах

Физическая поверхность Земли является весьма сложной для изображения поверхностью и состоит из совокупности различного рода неровностей, которые и определяют *рельеф* местности (рис. 2.15).

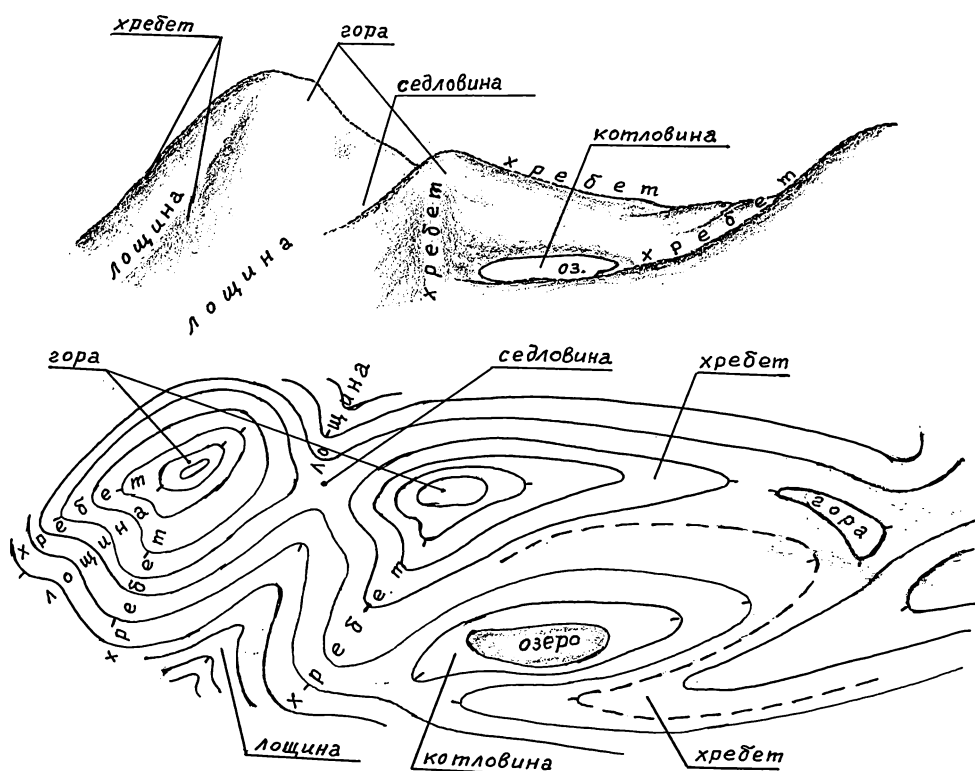


Рис. 2.15. Рельеф.

Размеры неровностей составляют от единиц до десятков и сотен метров и до нескольких километров. Названия неровностей, определяемые по их виду, размерам, характеру, весьма различны: *гора*, *холм*, *курган*, *сопка*, *лощина*, *долина*, *ущелье*, *овраг*, *бархан*, *увал* и т.д. В большом числе случаев бывает затруднительно отнести ту или иную неровность к тому или иному по названию виду. С целью исключения неоднозначности в названиях неровностей в топографии условно приняты к обозначению только пять основных форм, которыми можно описать любые отдельные неровности и их совокупности. Два вида неровностей являются положительными (*гора* или

холм; хребет), два вида – отрицательными (лощина; котловина или яма) и один вид неровности, седловина, не относится к положительной или отрицательной форме, а является особой формой.

Для изображения рельефа местности на плоскости используется метод *изогипс* (или *горизонталей*), что поясняется на рис. 2.16. Представим себе какую-либо положительную форму рельефа, основание которой находится под водой, а вершина несколько выступает над поверхностью воды. Положим далее, что уровень воды удастся понижать каждый раз на равный по высоте промежуток  $\Delta h$ . При этом каждый раз поверхность воды соприкасается с физической поверхностью указанной формы по линии, которая называется *горизонталью*. Если спроецировать ортогонально все полученные горизонтали на плоскость, то получим их систему, определяющую в таком виде приведенную форму рельефа.

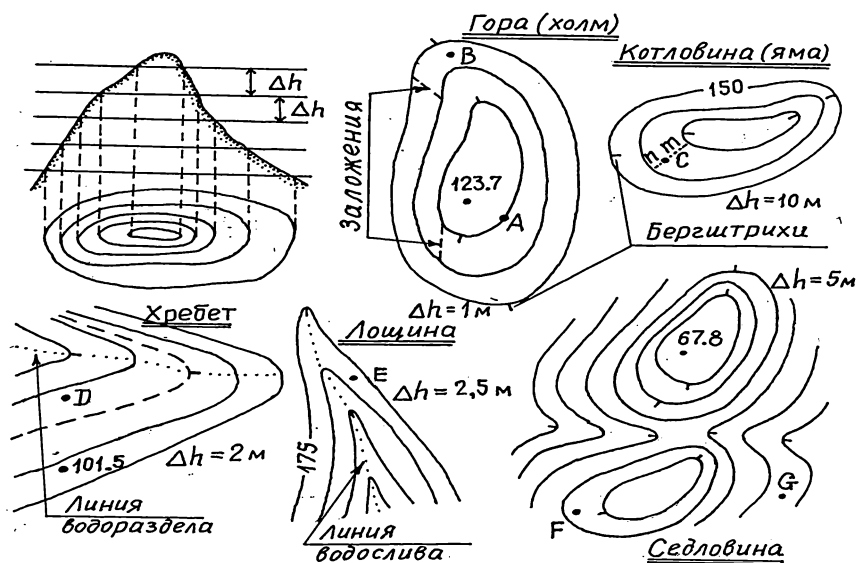


Рис. 2.16. Основные формы рельефа

*Горизонталью* называется кривая замкнутая непрерывная линия, все точки которой имеют одинаковую абсолютную высоту.

Ступень  $\Delta h$  условно принятого нами понижения уровня воды называется *высотой сечения рельефа*.

На рис. 2.16 показаны отдельные изображения основных форм рельефа, а их сочетания и сопряжения можно проследить на рис. 2.15.

*Горой* (холмом) будем называть видимую на изображении серию замкнутых горизонталей с указанием *ската* с помощью *бергштрихов*, либо с указанием подписи горизонтали (подписи ее абсолютной высоты), ориентированной к основанию, либо и того и другого вместе. Наиболее высокая точка горы называется *вершиной*, а основание – *подоймой*. На рис. 2.15 изображено три таких формы рельефа.

*Скат* – это кратчайшее в данном месте расстояние на плоскости между двумя соседними сплошными горизонталями. В общем случае расстояние между двумя соседними сплошными горизонталями называется *заложением*.

Обратной горе (холму) по изображению формой является *котловина* (*яма*), бергштрихи или подпись высоты горизонтали на которой также указывают направление к понижению формы. Котловина представляет собой чашеобразную форму. Нижняя часть котловины называется *дном*, верхняя часть – *бровкой*. На рис. 2.15 котловина заполнена водой.

Второй положительной формой является *хребет*. *Хребет* – это выпуклая складка на поверхности земли. На изображениях гор практически всегда можно найти части, представляющие собой хребты. По закруглениям горизонталей относительно малого радиуса, изображающих хребет, проходит воображаемая линия, называемая *линией водораздела*. От линии водораздела водные потоки, попадающие на хребет, разделяются в разные стороны. На рис. 2.15 подписаны только пять хребтов. Их здесь больше. Попробуйте отыскать такие же формы рельефа.

Вторая отрицательная форма, *лощина*, является обратной хребту формой. По закруглениям горизонталей относительно малого радиуса проходит воображаемая линия, которая называется *линией водослива* (*тальвегом*). Лощина представляет собой желоб. Реки, ручьи и т.п. текут по лощинам. Часто понижение, по которому текут реки, называют *долиной*. Такая форма, как *овраг*, произошла из лощины в результате разрушения ее склонов под воздействием внешних условий. На рис. 2.15 указаны не все изображенные лощины. Определите дополнительно места, соответствующие указанным формам рельефа.

*Седловина* – это сложная форма, образованная в виде поверхностей сопряжения нескольких простых форм. Классическое изображение седловины – это сочетание направленных друг к другу линиями своих водоразделов хребтов, разделенных лощинами. При движении, например, с вершины одной горы на вершину другой необходимо будет проходить точку седловины, общую для всех сопрягающихся поверхностей форм. Это самая низкая точка при движении с хребта на хребет и самая высокая – при движении из одной лощины в другую. Найдите на рис. 2.15 еще одну седловину.

Характерными точками рельефа являются вершина горы, дно котловины, точка седловины, точки резкого перегиба рельефа. К характерным линиям рельефа относятся линии водораздела и водослива.

Метод горизонталей нельзя применить для изображения мест с весьма резкими изменениями высоты: обрывов, оврагов, промоин, гребней, трещин в поверхности земли и т.п. Также невозможно и передать на плоскости микроформы рельефа: кочковатые поверхности, подвижные гряды песков, скалы-останцы, валуны, пещеры, уступы, карстовые воронки и т.п. Для их изображения применяют дополнительно специальные условные знаки.

Горизонтали естественных форм рельефа изображают на картах и планах коричневым цветом. Искусственные формы рельефа (карьеры, терриконы,



дамбы, насыпи и выемки по сторонам автомобильных или железных дорог и т.п.), созданные человеком, изображают черным цветом.

При изображении рельефа часть горизонталей подписывают значением абсолютной высоты (или условной высоты в местной системе высот), а каждую пятую горизонталь утолщают. В местах со сложным рельефом, создающим сложности с определением высот точек, наносят дополнительные *полугоризонтал*и, которые проводятся на половине высоты сечения рельефа. Они представляют собой прерывистую линию и могут быть замкнутыми и незамкнутыми. Такое изображение имеется на рис. 2.15 в правой его части и на рис. 2.16 на форме «хребет». В некоторых случаях применяют для изображения рельефа даже *четвертьгоризонтал*и или дополнительные горизонтал произвольной высоты, но с обязательным указанием ее высоты на карте.

Высота сечения рельефа определяется масштабом карты. Чем мельче масштаб карты, тем больше высота сечения рельефа на ней. Но, как видно из табл. 2.4, зависимость эта не совсем однозначная. Выбор того или иного сечения рельефа должен определяться еще и сложностью местности в высотном отношении, изображаемой на карте или плане соответствующего масштаба.

Таблица 2.4

Масштаб карты	Высота сечения рельефа, м			
	0,5	1	2	
1 : 2000				
1 : 5000	0,5	1	2	5
1 : 10000	1	2,5	5	10
1 : 25000	2,5	5	10	
1 : 50000	5	10	20	
1 : 100000		20		
1 : 200000		40		
1 : 500000		100		
1 : 1 000000		200		

На одном листе карты применяется только одна высота сечения рельефа. Исключение представляет только карта масштаба 1:1000000, поскольку на этих картах изображаются значительные по размерам площади, которые одновременно могут содержать информацию как о горных местностях, так и о местностях со сравнительно спокойным рельефом. В связи с этим на картах

масштаба 1:1000000 в зонах от 0 до 400 м применяется высота сечения рельефа 50 м, от 400 до 1000 м – 100 м, выше 1000 м – 200 м.

С учетом характера местности и для карт масштабов 1:100000 – 1:500000 могут применяться и другие значения высоты сечения рельефа, как в сторону ее уменьшения, так и в сторону увеличения.

В некоторых случаях, при решении специальных задач, устанавливают высоты сечения рельефа, определяемые техническим заданием. Это может относиться как к рельефу местности, так и к рельефу поверхности каких-либо объектов.

## § 17. Ориентирование

Ориентирование линии на местности или топографической карте заключается в определении ее направления относительно исходного или известного направления.

За исходное направление в геодезии принимают направления следующих меридианов:

- *истинного меридиана*, определяемого касательной к истинному меридиану в данной точке;
- *осевого меридиана*, являющегося в проекции Гаусса прямой линией, параллельной оси  $x$  прямоугольных координат и вертикальным линиям километровой сетки карты;
- *магнитного меридиана*, определяемого касательной к линии пересечения с поверхностью Земли плоскости, проходящей через ось магнитной стрелки компаса и отвесную линию в данной точке.

**Ориентирующим углом** в общем случае является *горизонтальный угол* (угол между направлениями в горизонтальной плоскости), который отсчитывают по часовой стрелке от северного направления меридиана до направления линии в данной точке.

Таким образом, существует три ориентирующих угла (рис. 2.17): при использовании истинного меридиана – *истинный азимут* ( $A_{и}$ ); при использовании осевого меридиана – *дирекционный угол* ( $\alpha$ ); при использовании магнитного меридиана – *магнитный азимут* ( $A_{м}$ ).

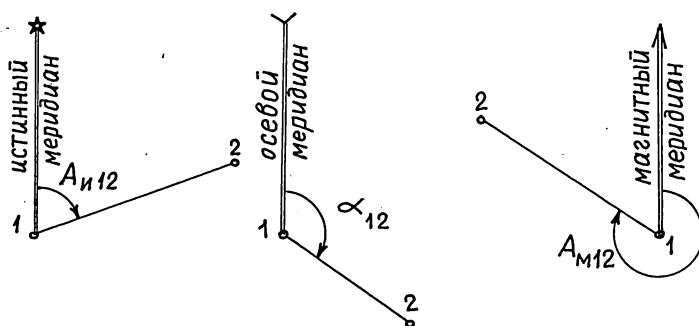


Рис. 2.17. Ориентирующие углы

Основываясь на данном выше определении ориентирующего угла, запишем следующее определение для каждого из названных ориентирующих углов.

**Истинным азимутом (дирекционным углом, магнитным азимутом)** называется горизонтальный угол, отсчитываемый от северного направления **истинного (осевого, магнитного)** меридиана по часовой стрелке до направления линии в данной точке.

Ориентирующий угол изменяется от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . Знак «плюс» или «минус» у ориентирующих углов не предусматривается. Если значение ориентирующего угла получится в расчетах больше, чем  $360^\circ$ , то из полученного значения следует вычесть  $360^\circ$  столько раз, пока значение ориентирующего угла не станет в пределах полного круга. Если в расчетах значение ориентирующего угла получится отрицательным, то необходимо к полученной его величине прибавить  $360^\circ$ .

Движение по линии  $AB$  может быть прямым и обратным. Принимая, например, направление  $AB$  прямым, движение по направлению  $BA$  следует считать обратным. И наоборот. В соответствии с этим существуют прямой и обратный ориентирующие углы  $A(A_H, \alpha, A_M)$ , связанные соотношением:

$$A_{OBR} = A_{ПР} + 180^\circ \quad (2.15)$$

$$A_{ПР} = A_{OBR} + 180^\circ \quad (2.16)$$

В формулах (2.15) и (2.16) перед  $180^\circ$  может стоять знак «плюс-минус». Знак «плюс» берется в том случае, если от  $A_{ПР}$  или  $A_{OBR}$  нельзя отнять  $180^\circ$ . Но можно и оставить только знак «плюс», как в приведенных формулах. Результат от этого не изменится. Проверьте это сами на любом примере.

В общем случае для любой точки на поверхности земного эллипсоида существует три исходных направления, взаимное расположение которых друг относительно друга может быть различным. На рис. 2.18 показано несколько возможных вариантов взаимного расположения векторов исходных меридианов.

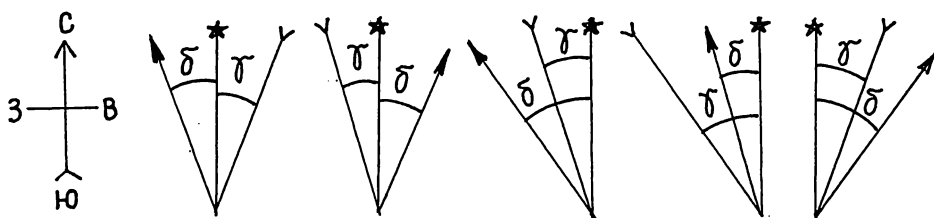


Рис. 2.18. Взаимосвязь ориентирующих углов.

Зная ориентирующий угол какой-либо линии и углы между направлениями меридианов, можно ориентировать линию по другому исходному направлению.

Направление любого меридиана на земном эллипсоиде (или референц-эллипсоиде) определяется направлением касательной к меридиану в данной точке. Касательная к истинному меридиану называется *полуденной линией*

(см. рис. 2.6). Полуденные линии, построенные для точек экватора, параллельны друг другу, на северном и южном полюсах полуденные линии перпендикулярны к оси вращения и все лежат в горизонтальной плоскости. В других случаях они пересекаются в точке, лежащей на оси вращения Земли. Полуденные линии точек, лежащих на одной и той же параллели, т.е. имеющих одну и ту же широту, пересекаются в одной точке на оси вращения Земли.

Угол между направлениями истинных меридианов называется *сближением меридианов*. Угол  $\gamma$  (рис. 2.18) между направлением истинного меридиана и направлением осевого меридиана называется *гауссовым сближением меридианов*. Такими углами пользуются при работе в соответствующей зоне. Для сокращения и в этом случае применяют название *сближение меридианов*. При этом

$$A_H = \alpha + \gamma \quad (2.17)$$

*Сближение меридианов* (при работе с картой) – это угол между направлениями полуденных линий истинного меридиана точки и осевого меридиана данной зоны, определяемый по формуле

$$\gamma = \Delta \lambda \sin \varphi, \quad (2.18)$$

где  $\Delta \lambda = (\lambda_1 - \lambda_2)$  – разность географических долгот  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  двух точек;  $\varphi$  – географическая широта точки (определяется как среднее значение широт для точек 1 и 2). Если требуется определить сближение меридианов для точки 1 относительно точки 2, то в формуле (2.18) берут значение широты для точки 1.

Поскольку долгота  $\lambda_2$  в зоне соответствует долготе осевого меридиана, то с учетом этого формулу (2.18) можно преобразовать к виду

$$\gamma = (\lambda_i - \lambda_{on}) \sin \varphi_i, \quad (2.19)$$

где  $\lambda_i$  – долгота точки  $i$ ;  $\lambda_{on}$  – долгота осевого меридиана зоны  $n$ ;  $\varphi$  – географическая широта точки  $i$ .

Сближение меридианов в зоне для какой-либо точки местности может быть положительным (восточным) или отрицательным (западным), а также и равным нулю, если точка будет находиться на осевом меридиане зоны (или на экваторе).

Точность определения сближения меридианов по формуле (2.19) составляет 0,1 угловых минуты.

**Пример 2.8.** Известна долгота точки  $\lambda = 13^\circ 45'$  и ее широта  $\varphi = 56^\circ 18'$ . Определить сближение меридианов точки относительно осевого меридиана зоны.

**Решение.**

В соответствии со своей долготой точка находится в третьей зоне, ограниченной меридианами  $12^\circ$  и  $18^\circ$ . Осевой меридиан зоны имеет долготу  $15^\circ$  – см. формулу (2.7).

$\gamma = (13^\circ 45' - 15^\circ 00') \sin 56^\circ 18' = (-1^\circ 15') \sin 56^\circ 18' = (-75') \sin 56^\circ 18' = -62,3966' = -1^\circ 02'.$  (В приведенных расчетах достаточно округления до  $1'$ ).

**Ответ.** Сближение меридианов западное  $1^\circ 02'$ .

Взаимосвязь истинного и магнитного азимутов определяется углом  $\delta$ , который называется *магнитным склонением*. Магнитное склонение может быть западным (отрицательным) и восточным (положительным), что на сетке

меридианов (рис. 2.18) отражено в виде отклонения магнитного меридиана относительно истинного соответственно на запад или восток (по аналогии со сближением меридианов). Формула взаимосвязи истинного и магнитного азимутов имеет вид:

$$A_H = A_M + \delta \quad (2.20)$$

Как известно, полюсы магнитного поля Земли находятся в постоянном движении. Впервые склонение магнитной стрелки обнаружил Х. Колумб (в 1492 г.) во время своего первого плавания к берегам Америки. Величина магнитного склонения подвержена суточным, годовым и вековым колебаниям. В результате исследований установлено, что за 500 лет склонение магнитной стрелки изменяется примерно на  $22^\circ$ . В 1600 г., например, северный магнитный полюс находился на расстоянии 1300 км от географического полюса. Сейчас это расстояние составляет 2000 км. Суточные изменения склонения сравнительно небольшие, до  $10'$ , максимальные значения могут достигать  $15'$ . Известно время, когда ось магнитной стрелки не имеет суточного склонения: 4 и 10 часов утра, 20 часов вечера и 24 часа. Кроме того, само магнитное поле искажается под действием магнитных бурь. Северный и южный магнитные полюсы находятся сравнительно далеко от географических: северный магнитный полюс (долгота  $97^\circ$  западная, широта  $75^\circ$  северная); южный магнитный полюс (долгота  $154^\circ$  восточная, широта  $72^\circ$  южная).

На топографических картах указывают т.н. *годовое изменение магнитного склонения* ( $\Delta\delta$ ), а саму величину магнитного склонения указывают на год издания топографической карты. Для определения магнитного склонения в текущем году пользуются формулой

$$\delta_2 = \delta_1 + \Delta\delta (t_2 - t_1). \quad (2.21)$$

В формуле (2.21):  $t_1$  и  $t_2$  – соответственно год издания топографической карты и год, в котором производится определение текущего значения магнитного склонения  $\delta_2$  по его известной величине  $\delta_1$  и годовому изменению  $\Delta\delta$ .

На топографической карте на год ее издания наносят сетку меридианов с величинами сближения меридианов и магнитного склонения. В текстовой части приводят значение годового изменения магнитного склонения.

При использовании топографической карты и компаса для перехода от магнитного азимута к дирекционному углу определяют величину *поправки  $\Delta\alpha$  в дирекционный угол*, определяемой как горизонтальный угол между направлениями осевого и магнитного меридианов.

$$\Delta\alpha = \delta - \gamma. \quad (2.22)$$

Если стрелка компаса отклонена от осевого меридиана на запад, то поправка в дирекционный угол имеет знак «минус», если стрелка отклонена от направления осевого меридиана на восток, то поправка имеет знак «плюс».

**Пример 2.9.** На топографической карте измерен дирекционный угол  $\alpha = 123^\circ 40'$ . Сближение меридианов восточное  $1^\circ 43'$ . Склонение магнитной стрелки на 1994 г. западное  $4^\circ 33'$ . Годовое изменение магнитного склонения восточное  $\Delta\delta = 0^\circ 06'$ .

Определить истинный азимут, магнитный азимут на 2000 г. и поправку в дирекционный угол при переходе от магнитного азимута к дирекционному углу также в 2000 г.

**Решение.**

Вычисляем магнитное склонение на 2000 г.

$$\delta_{2000} = \delta_{1994} + \Delta\delta (2000 - 1994) = -4^\circ 33' + 0^\circ 06' \times 6 = -3^\circ 57'.$$

Величина истинного азимута равна

$$A_H = \alpha + \gamma = 123^\circ 40' + 1^\circ 43' = 125^\circ 23'.$$

Значение магнитного азимута на 2000 год находим по формуле (2.19), преобразованной для магнитного азимута:

$$A_{M2000} = A_H - \delta_{2000} = 125^\circ 23' - (-3^\circ 57') = 129^\circ 20'.$$

$$\text{Поправка в дирекционный угол } \Delta\alpha = -3^\circ 57' - 1^\circ 43' = -5^\circ 40'.$$

Поскольку сближение меридианов на карте указывают для ее центра, то в общем случае сближение меридианов произвольной точки карты будет отличаться от сближения меридианов для центральной точки карты. При необходимости можно вычислить для заданной точки частное сближение меридианов по формуле (2.19), а затем использовать полученное значение в дальнейших расчетах. Кроме того, поскольку сближения меридианов точек, находящихся на концах линии, в общем случае могут отличаться друг от друга, то значения прямого и обратного азимутов данной линии будут отличаться от  $180^\circ$ .

Для ориентирования линий часто используется *четвертная система* (рис. 2.19), ориентирование в которой производится как по величине горизонтального угла (румба), так и по указанию той или иной четверти по сторонам света.

*Румб* ( $r$ ) – это острый горизонтальный угол между направлением линии и ближайшим направлением меридиана.

Румб записывают в следующем виде:  $r = \text{ЮВ}:43^\circ 32'$ ,  $r = \text{СЗ}:17^\circ 04'$  и т.п. Значение румба изменяется от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ .

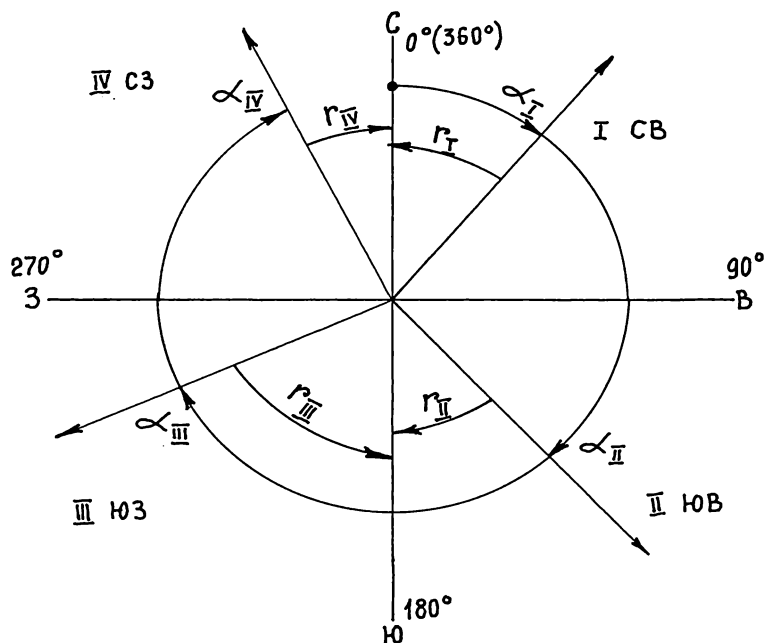


Рис. 2.19. Четвертная система ориентирования

Слово румб произошло от греческого слова «ροῦμβ». Такой геометрической фигурой изображались 32 направления на картушке (горизонтальном круге) магнитного компаса.

Деление горизонта на 32 румба впервые применили итальянцы еще в начале XIV века. Ранее величина румба составляла  $11,25^\circ$ . Затем румбом стали называть любой острый угол, определяемый направлением линии и ближайшим к ней направлением меридиана с обязательным указанием двух основных сторон света.

Таблица 2.5

Четверть	I	II	III	IV
Обозначение румба	СВ	ЮВ	ЮЗ	СЗ
Пределы изменения угла $A$	$0^\circ - 90^\circ$	$90^\circ - 180^\circ$	$180^\circ - 270^\circ$	$270^\circ - 360^\circ$
Зависимость $A$ от $r$	$A = r$	$A = 180^\circ - r$	$A = 180^\circ + r$	$A = 360^\circ - r$

Румбовая (четвертная) система может быть использована для любого из рассмотренных выше ориентирующих углов, в зависимости от меридиана, взятого в качестве исходного для ориентирования направления. В общем случае ориентирующий угол  $A$  ( $A_H$ ,  $A_M$ ,  $\alpha$ ) взаимосвязан со значением румба соотношениями, приведенными в табл. 2.5 (рис. 2.19).

## § 18. Решение некоторых задач с использованием топографической карты

### 18.1. Измерение расстояний

*Использование численного, именованного и линейного масштабов.* Положение любой точки земной поверхности на плоскости получается в результате проецирования ее по определенным математическим законам на вспомогательную поверхность референц-эллипсоида и последующего построения плоского изображения в проекции Гаусса-Крюгера. При построении топографических планов выполняют ортогональное проецирование точек на горизонтальную плоскость. Очевидно, что расстояние между двумя точками, пройденное на местности, в общем случае отличается от его проекции на горизонтальную плоскость. Поэтому на картах и планах измеряют не фактическое расстояние, а т.н. *горизонтальное проложение*, которое является проекцией линии местности на горизонтальную плоскость. При этом принято величину измеренного на карте отрезка называть расстоянием.

При измерении расстояний на топографических картах или планах используют различные виды масштабов. В § 6 были рассмотрены численный и именованный масштабы (напомним: численный масштаб 1:5000, соответствующий ему именованный масштаб – «в 1 см 50 м»). Под численным и именованным масштабами, записанными под южной рамкой карты, располагают *линейный масштаб*.

Линейный масштаб (рис. 2.20) – это графическое изображение численного или именованного масштабов. Отрезок  $a$  линейного масштаба называют

основанием. Первое основание делят на отрезки величиной 1 мм, что обеспечивает графическую точность отсчета до 0,1 мм.

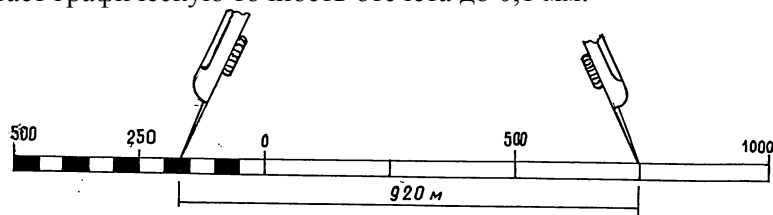


Рис. 2.20. Линейный масштаб.

**Пример 2.10.** На карте масштаба 1:25000 измерено расстояние, которое получилось равным 36,7 мм.

Определить расстояние на местности.

**Решение.**

При использовании численного масштаба соответствующее расстояние на местности будет равно  $36,7 \text{ мм} \times 25000 = 917500 \text{ мм} = 917,5 \text{ м}$ .

При использовании именованного масштаба (в 1 см 250 м) отрезок 36,7 мм = 3,67 см на местности будет соответствовать отрезку  $3,67 \text{ см} \times 250 = 917,5 \text{ м}$ .

При использовании линейного масштаба величину измеряемого отрезка необходимо взять в раствор циркуля-измерителя и перенести его на шкалу линейного масштаба. Искомый отрезок будет определен непосредственно по линейному масштабу.

Следует заметить, что при использовании численного и именованного масштабов получается одинаковый ответ, а при использовании линейного масштаба полученная величина может несколько отличаться от вычисленной из-за графических погрешностей, возникающих при использовании измерителя и при отсчете по шкале линейного масштаба, а также из-за возможной деформации листа топографической карты. В последнем случае использование линейного масштаба является предпочтительным, поскольку при использовании численного или именованного масштабов иногда бывает необходимо определять коэффициент деформации и вводить его значение в результат измерения.

*Использование поперечного масштаба.* Для точного нанесения точек на топографические план и карту, а также при построении на карте и плане точек по их координатам, используют *поперечный масштаб*.

Поперечный масштаб (рис. 2.21) представляет собой особую графическую шкалу (номограмму), основанием которой служит линейный масштаб. Линейный масштаб достраивают вертикальной шкалой с разбивкой ее, например, так же, как и основания, на 10 частей по вертикальному направлению. Наклонными линиями (*трансверсалиями*) соединяют нижние деления с верхними.

Число делений  $n$  горизонтального отрезка шкалы поперечного масштаба и число делений  $m$  вертикального отрезка может быть различным. При  $n = m = 10$  поперечный масштаб называют *нормальным* или *сотенным*. Основание  $a$  нормального поперечного масштаба чаще всего делают равным 2 см. В соответствии с этим, цена деления меньшего отрезка основания будет



равна  $2 \text{ см} : 10 = 0,2 \text{ см} = 2 \text{ мм}$ . При перемещении вверх (вниз) по трансверсали на один шаг соответствующий горизонтальный отрезок увеличится (уменьшится) на величину  $0,2 \text{ см} : 10 = 0,02 \text{ см} = 0,2 \text{ мм}$  или на величину  $(a : 100)$ . Таким образом, перемещение на один шаг по трансверсали составит 1:100 основания.

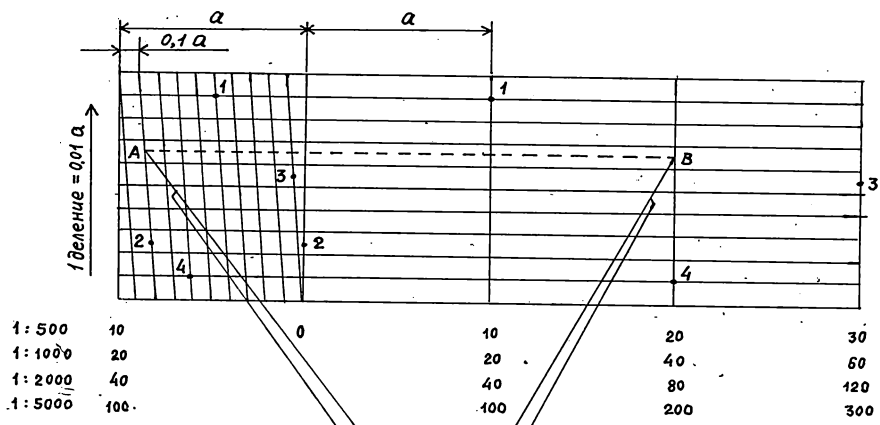


Рис. 2.21. Поперечный масштаб.

**Пример 2.11.** Необходимо определить длину отрезка  $AB$ , взятого в раствор измерителя с планов различных масштабов.

**Решение.**

На рис. 2.21 приведена оцифровка основания поперечного масштаба в соответствии с используемым масштабом плана и величины наименьших отрезков основания и трансверсали.

Обратите внимание на то, что отрезки  $AB$ , 2-2, 3-3 располагаются на трансверсали между горизонтальными линиями, что дает возможность точнее определить их длину.

Для масштаба 1:500 отрезок  $AB$  можно представить в виде следующего набора: два полных основания (20 м), плюс восемь полных делений основания (8 м), плюс шесть с половиной делений по трансверсали (0,65 м) = 28,65 м.

Для масштаба 1:2000  $AB = 2 \times 40 \text{ м} + 8 \times 4 \text{ м} + 6,5 \times 0,4 \text{ м} = (80 + 32 + 2,6) = 114,6 \text{ м}$ .

Определите значения отрезка  $AB$  для других масштабов.

**Пример 2.12.** Отложить на поперечном масштабе отрезок  $L$  заданной длины в масштабе соответствующего плана.

**Решение:** приведено на рис. 2.21.

Построение отрезка 1-1 длиной 14,9 м в масштабе 1:500 (основание равно 10 м): отрезок содержит одно полное основание (10 м); остаток  $14,9 - 10,0 = 4,9 \text{ м}$  содержит четыре полных деления основания (4 м); остаток  $4,9 - 4,0 = 0,9 \text{ м}$  содержит девять делений (переходов) по трансверсали.

Построение отрезка 2-2 длиной 16,5 м в масштабе 1:1000 (основание равно 20 м): отрезок меньше основания, поэтому один его конец будет находиться на нулевой вертикальной линии; в длине отрезка содержится восемь полных делений основания (16 м); остаток  $16,5 - 16,0 = 0,5 \text{ м}$  соответствует перемещению по трансверсали вверх на два с половиной деления (в одном делении по трансверсали 0,2 м).

Аналогичным образом построены отрезки 3-3 (305,5 м в масштабе 1:5000) и 4-4 (104,4 м в масштабе 1:2000). Проверьте результаты построения и потренируйтесь в решении подобных задач.

## 18.2. Определение географических и прямоугольных координат

*Определение географических координат.* Лист топографической карты ограничен по долготе меридианами и широте параллелями, географические координаты которых определяются по схемам разграфки карт при образовании их номенклатуры (см. § 10). Таким образом, точки или объекты местности, изображенные на листе топографической карты, имеют географические координаты в пределах разности долгот  $\Delta\lambda = (\lambda_B - \lambda_3)$  и разности широт  $\Delta\varphi = (\varphi_C - \varphi_{Ю})$ . Здесь индексы В, З, С, Ю относятся к восточной, западной, северной и южной рамкам карты.

Для удобства в определении географических координат и повышения точности разности долгот и широт разделены на *минутные метки* (рис. 2.22), которые, в свою очередь, точками поделены на 6 интервалов по десять секунд в каждом из них.

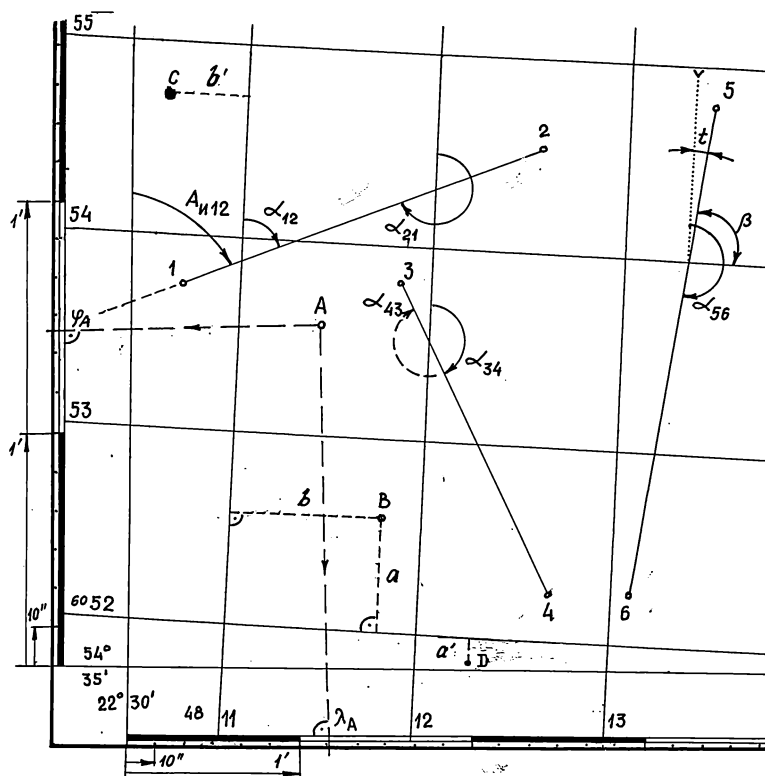


Рис. 2.22. Определение по карте географических и прямоугольных координат.

Определение географических координат т.  $A$  заключается в построении через нее параллели и меридиана. Полученные географические координаты этих линий и будут определять географические координаты искомой точки.

Построение параллели и меридиана выполняется с помощью большой линейки с ровным краем, перекрывающей внешнюю рамку карты. Линейку необходимо установить так, чтобы ее ребро проходило через т.  $A$  и через одинаковые отсчеты широты (долготы) на соответствующих минутных метках.

Для топографических карт малых и средних широт, представляющих собой практически прямоугольник, для определения широты или долготы можно воспользоваться треугольником с прямым углом. В этом случае проектирование точки  $A$  на шкалы широт и долгот производится по перпендикуляру к рамке карты. Таким образом, долгота точки  $A$   $\lambda_A = 22^\circ 31' 11''$  (восточная), широта  $\varphi_A = 54^\circ 35' 26''$  (северная).

Можно решить и обратную задачу: нанести на карту точку по ее географическим координатам. Для этого с помощью большой линейки необходимо построить меридиан с долготой, равной долготе точки, и параллель с широтой, равной широте точки. На пересечении графически полученных меридиана и параллели будет находиться искомая точка.

*Определение прямоугольных координат.* Сетка прямоугольных координат на топографической карте строится в виде квадратов, стороны которых параллельны оси  $x$  прямоугольной системы координат и перпендикулярны оси  $y$ . В зависимости от масштаба карты подписи километровых линий производятся через определенный шаг, выраженный в километрах.

Например, для карт масштабов 1:10000, 1:25000 и 1:50000 этот шаг равен 1 км, для карты масштаба 1:100000 – 2 км. Километровые линии подписывают на внешней рамке карты (рис. 2.22) двумя последними цифрами километров. Полные координаты  $x$  и  $y$  подписывают только у крайних на листе карты километровых линий.

*Сокращенными координатами* точки называют квадрат, в котором она находится. Обозначение квадрата складывается из значения горизонтальной и вертикальной линий километровой сетки для юго-западного его угла. Так, точка  $A$  находится в квадрате 5311, точка  $B$  – в квадрате 5211, точка  $C$  – в квадрате 5410, точка  $D$  – в квадрате 5112.

Определение прямоугольных координат т.  $B$  сводится к измерению отрезка  $a$  по оси  $x$  и отрезка  $b$  по оси  $y$ . Величину отрезка можно определить любым из способов, рассмотренных в разделе 18.1.

В некоторых случаях точка может находиться в неполном квадрате – точки  $C$  и  $D$ . В рассматриваемом случае координата  $x$  точки  $C$  определяется так же, как и соответствующая координата т.  $B$ . Для определения координаты  $y_C$  необходимо измерить отрезок  $b'$  и вычесть его из координаты линии 4811 км. Для точки  $D$  координата  $y_D$  определяется сложением координаты 4812 км и отрезка  $b$ , а для определения координаты  $x_D$  необходимо измерить отрезок  $a'$  и вычесть его из координаты 6052 км.

В табл. 2.6 представлен пример определения координат точек  $C$  и  $D$ .

Здесь также можно решить и обратную задачу: нанести точку на карту (план) по ее прямоугольным координатам. Для этого необходимо определить квадрат, в котором находится данная точка, а затем, пользуясь измерителем и

линейным масштабом карты, либо именованным масштабом, либо поперечным масштабом, отложить в полученном квадрате отрезки  $a$  и  $b$ . Для повышения точности построения точки сначала следует отложить по разным сторонам квадрата отрезки  $a$  (или  $b$ ), а затем по полученной линии отложить отрезок  $b$  (или  $a$ ).

Таблица 2.6

**Пример 2.13.** Определение прямоугольных координат (масштаб карты 1:25000)

Точки	Сокращенные координаты	Величина отрезка $a(a')$		Величина отрезка $b(b')$		Координаты	
		на карте, мм	на местности, м	на карте, мм	на местности, м	$X$ , км	$Y$ , км
$B$	5211	24,1	602,5	32,3	807,5	6052,602	4811,808
$C$	5410	28,2	705,0	17,2	430,0	6054,705	4810,570
$D$	5112	2,6	65,0	12,8	320,0	6051,935	4812,320

$$X_B = 6052 \text{ км} + 0,6025 \text{ км} = 6052,602 \text{ км} \quad X_C = 6054 \text{ км} + 0,705 \text{ км} = 6054,705 \text{ км}$$

$$Y_B = 4811 \text{ км} + 0,8075 \text{ км} = 4811,808 \text{ км} \quad Y_C = 4811 \text{ км} - 0,430 \text{ км} = 4810,570 \text{ км}$$

$$X_D = 6052 \text{ км} - 0,065 \text{ км} = 6051,935 \text{ км}$$

$$Y_D = 4812 \text{ км} + 0,320 \text{ км} = 4812,320 \text{ км}$$

### 18.3. Ориентирование линий

*Измерение дирекционных углов.* В § 15 дано определение дирекционного угла, как горизонтального угла, отсчитываемого по часовой стрелке от северного направления осевого меридиана до направления линии. Поскольку линии километровой сетки параллельны осевому меридиану зоны, то значение дирекционного угла в пределах зоны для одной и той же линии остается постоянным. В связи с этим и измерение дирекционного угла можно производить от вертикальной линии километровой сетки (рис. 2.22).

Так, дирекционный угол направления 1-2 измеряется непосредственно полукруглым транспортиром, а дирекционный угол направления 2-1 можно получить как сумму ( $\alpha_{12} + 180^\circ$ ). Такие же измерения выполняют и для линии 3-4 (прямого и обратного направлений).

В некоторых случаях дирекционный угол может быть получен как слагаемое или разность для вспомогательных углов. Так, дирекционный угол, например, линии 5-6 ( $\alpha_{56}$ ) не может быть определен непосредственно от вертикальной линии 13 километровой сетки. В связи с этим придется выполнять дополнительные графические построения, что приведет к увеличению погрешности измерения угла. В таких случаях измеряют дополнительный угол. Из чертежа видно, что угол  $\beta$  меньше  $90^\circ$  на угол  $t$ , а дирекционный угол  $\alpha_{56}$  на то же значение больше  $180^\circ$ , т.е.

$$\alpha_{56} = 180^\circ + (90^\circ - \beta).$$

Точность измерения дирекционного угла на карте зависит от качества графических построений линии и точности транспортира. Линии следует проводить толщиной не более 0,1 мм. Геодезический транспортир (круглый

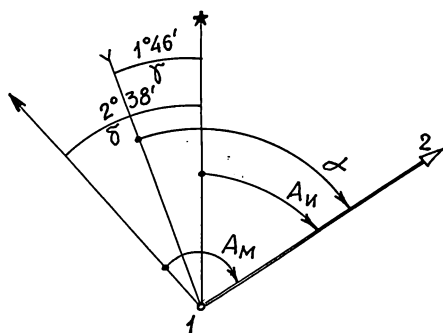
или полукруглый) имеет цену деления  $30'$ , при этом оценка дробной части наименьшего деления производится «на глаз» до  $5'$ .

**Измерение истинного азимута.** Истинный азимут отсчитывается от северного направления истинного меридиана, которым являются западная или восточная рамки карты (рис. 2.22, линия 1-2).

Для западной рамки карты значение измеренного истинного азимута линии 1-2 (рис. 2.22) определяется в точке пересечения линии с рамкой карты. Если линия своим продолжением не пересекает западную или восточную рамки карты, то измерить ее истинный азимут непосредственно не представляется возможным без дополнительных построений. В этом случае истинный азимут вычисляют по значению измеренного дирекционного угла и величине сближения меридианов  $\gamma$  (§ 15).

Линии километровой сетки образуют угол с западной и восточной рамкой карты. Этот угол и является углом сближения меридианов  $\gamma$  (на рисунке  $\gamma$  - восточное). Для карт центральной части зоны, величина сближения меридианов близка к нулю, в связи с чем вертикальные линии километровой сетки получаются практически параллельными западной и восточной рамкам карты.

**Решение задач по ориентированию.** При определении ориентирующих углов на карте обычно измеряют дирекционный угол, поскольку наличие большого числа линий километровой сетки позволяет решить эту задачу сравнительно легко и точно. Истинный азимут и магнитный азимут вычисляют с учетом данных, которые приводятся в левом нижнем углу карты (рис. 2.23).



Склонение на 1993 г. западное  $3^{\circ}18'$ . Среднее сближение меридианов западное  $1^{\circ}46'$ . При прикладывании буссоли (компас) к вертикальным линиям километровой сетки среднее отклонение магнитной стрелки западное  $1^{\circ}32'$ . Годовое изменение магнитного склонения восточное  $0^{\circ}04'$ . Поправка в дирекционный угол при переходе к магнитному азимуту плюс  $1^{\circ}32'$ .

Рис. 2.23. Сетка меридианов

**Пример 2.14.** Ориентирование линий.

На карте измерен дирекционный угол  $\alpha = 63^{\circ}35'$ .

Определить истинный азимут и магнитный азимут на 2003 г.

**Решение.**

Истинный азимут этой линии  $A_H = \alpha + \gamma = 63^{\circ}35' + (-1^{\circ}46') = 61^{\circ}49'$ .

Для вычисления магнитного азимута предварительно необходимо определить склонение на 2003 г.:

$$\delta_{2003} = \delta_{1993} + \Delta\delta (2003 - 1993) = -3^{\circ}18' + (+0^{\circ}04') \cdot 10 = -2^{\circ}38' \text{ (западное)}.$$

В этом случае поправка в дирекционный угол

$$\Delta\alpha = \delta_{2003} - \gamma = -2^{\circ}38' - (-1^{\circ}46') = -0^{\circ}52'.$$

Следовательно  $A_{M(2003)} = \alpha + \Delta\alpha = 63^\circ 35' - (-0^\circ 52') = 64^\circ 27'$ .

Такой же ответ получится и при вычислении магнитного азимута через истинный азимут:  $A_{M(2003)} = A_H - \delta_{2003} = 61^\circ 49' - (-2^\circ 38') = 64^\circ 27'$ .

При использовании в решении задачи сетки меридианов взаимное расположение меридианов получается наглядным, что уменьшает вероятность ошибки в арифметических действиях.

#### 18.4. Ориентирование карты на местности

*Ориентирование по местным предметам.* Наблюдатель должен находиться в опознанной точке  $A$ . На карте прочертить направление на точку  $B$  из точки  $A$ , затем «на глаз» или с помощью визирной линейки ориентируют линию на соответствующую точку  $B$  местности.

*Определение на карте точки стояния наблюдателя.* Если точку  $A$  опознать затруднительно, то положение ее на карте определяют с помощью прозрачной кальки, располагаемой на планшете, на которую наносят направления на опознанные на местности и карте точки (*способ Болотова*) – рис. 2.24. Далее кальку переносят на карту и ориентируют ее таким образом, чтобы прочерченные направления прошли через соответствующие точки (объекты) местности, изображенные на карте. Место пересечения указанных направлений и определит положение т.  $A$  (наблюдателя).

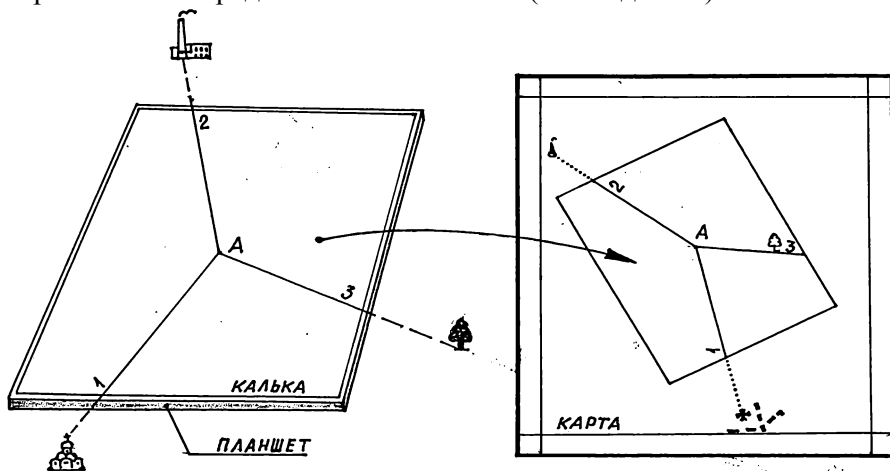


Рис. 2.24. Ориентирование по карте способом Болотова

*Ориентирование карты с помощью компаса.* Нулевой диаметр компаса при ориентировании прикладывают к вертикальной линии километровой сетки либо к ближней (западной или восточной) рамке карты и устанавливают стрелку компаса на север с совмещением одновременно со стрелкой его нулевого отсчета. В первом случае лист карты следует повернуть до тех пор, пока отсчет по северному концу магнитной стрелки компаса не будет равным величине поправки в дирекционный угол, определенной по формуле

(2.22). Если нулевой диаметр приложить к западной или восточной рамке карты, то учитывать необходимо только склонение магнитной стрелки, предварительно вычисленное по формуле (2.21).

### 18.5. Определение высот точек

Для пояснения принципа определения высот по горизонталям карт и планов воспользуемся рис. 2.16.

При определении высот точек по горизонталям необходимо учитывать следующее:

- все точки одной и той же горизонтали имеют одинаковую высоту;
- высота любой сплошной горизонтали кратна высоте сечения рельефа;
- полугоризонталь (прерывистая линия) проводится на половине высоты сечения рельефа;
- наклон местности между соседними сплошными горизонталями, либо между соседними сплошной горизонталью и полугоризонталью считается однородным.

Если точка находится между горизонталями, то ее высота может быть определена по формуле

$$H_i = H_{\Gamma} + h_i, \quad (2.23)$$

где  $H_{\Gamma}$  – высота горизонтали;  $h_i$  – превышение точки  $i$  над горизонталью.

Величину  $h_i$  определяют интерполированием заложения  $a$  по величинам отрезков  $m$  и  $n$ .

$$h_i = \Delta h (m/a)$$

или

$$h_i = \Delta h (n/a)$$

В зависимости от знака превышения получают и соответствующую высоту определяемой точки.

**Пример 2.15.** Определение высот точек  $A, B, C, D, E, F, G$  (рис. 2.16).

**Решение.**

Точки  $A$  и  $B$  (гора). Точка  $A$  находится на горизонтали. В соответствии с указанной высотой сечения рельефа (1 м) высота соседней с вершиной горы горизонтали, кратная 1 м, составит 123 м. Следовательно,  $H_A = 123$  м.

Точка  $B$  «на глаз» находится посередине между горизонталями 121 и 122 м, считая их высоты вниз от горизонтали 123 м. Значит  $H_B = 121,5$  м.

Точка  $C$  (котловина). Здесь нам известна высота горизонтали и направление к понижению – в сторону дна котловины. Это определяется по указанию бергштрихов и дополнительно подписью горизонтали (основание подписи ориентировано в сторону понижения рельефа).

Определим высоту точки  $C$  интерполированием заложения  $a = n + m$ .

Точка  $C$  находится между горизонталями 130 и 140 м (при высоте сечения рельефа 10 м). Предположим, что  $a = 11,6$  мм,  $n = 3,9$  мм,  $m = 7,7$  мм. Из пропорции найдем превышения

$$\Delta h \frac{m}{a} = 10 \frac{7,7}{11,6} = 6,6 \text{ м} \quad \text{и} \quad \Delta h \frac{n}{a} = 10 \frac{3,9}{11,6} = -3,4 \text{ м}$$

точки  $C$  относительно соседних горизонталей. Высота точки  $C$  определится как  $H_C = 140 - 6,6 = 130 + 3,4 = 133,4$  м.

Чаще всего высоты точек по карте определяют оценкой их положения относительно горизонталей «на глаз». Это связано с тем, что погрешность построения горизонталей на карте составляет примерно 1/3 от высоты сечения рельефа, а погрешность оценки «на глаз» положения точки значительно меньше, порядка 1/10 от величины заложения.

Точка D (хребет). На этом фрагменте имеется подписанная высота точки местности (101,5 м). Учитывая высоту сечения рельефа (2 м), соседние с точкой 101,5 м горизонтали имеют высоты 100 и 102 м (повышение рельефа в сторону точки D). Точка D находится между горизонталью 104 м и полугоризонталью 103 м, ближе к основной горизонтали. Оценкой «на глаз»  $H_D = 104 - 0,33 = 103,67 \text{ м} = 103,7 \text{ м}$ .

Точка E (лощина). При высоте сечения рельефа 2,5 м точка E находится между горизонталями 175 и 172,5 м посередине между ними. Таким образом,  $H_E = 175,00 - 1,25 = 173,75 \text{ м}$ .

Точки F и G (седловина). При высоте сечения рельефа 5 м соседняя с вершиной горы горизонталь, кратная 5 м, имеет высоту 65 м.

Переместимся в точку седловины. Первые по основанию гор горизонтали, находящиеся выше точки седловины, имеют высоту 55 м. Точка F находится «на глаз» на 1,5 м выше горизонтали 55 м, т.е.  $H_F = 56,5 \text{ м}$ . Точка G находится «на глаз» посередине между горизонталями 40 и 45 м, значит  $H_G = 42,5 \text{ м}$ .

## 18.6. Построение профиля

*Профиль* – это вертикальный разрез рельефа местности по заданному направлению.

Топографические профили местности используются для решения большого числа различных инженерных задач: при составлении предварительных проектов строительства инженерных сооружений линейного типа, при составлении геологических разрезов, при определении на местности линий видимости между выбранными точками, для составления описания рельефа по выбранному маршруту и др.

Построение профиля по направлению АВ показано на рис. 2.25.

1. Прочертить карандашом на карте линию АВ, направление которой задано тем или иным способом.

2. Оценить максимальную и минимальную высоту по линии профиля.

$H_{MAX} \sim 88 \text{ м}$  ;  $H_{MIN} \sim 55 \text{ м}$ .

3. Задать горизонтальный и вертикальный масштабы профиля.

Горизонтальной линией профиля является ось расстояний, вертикальной линией – ось высот. Масштабы профиля, построенного по топографической карте, по высоте и расстояниям различные. Обычно горизонтальный масштаб профиля равен масштабу топографической карты, на которой он строится, а вертикальный масштаб принимают в 10 раз крупнее горизонтального. Например, масштаб карты 1:50000. Следовательно, горизонтальный масштаб профиля равен 1:50000, а вертикальный масштаб – 1:5000. В некоторых случаях, для большей наглядности, применяют более крупные масштабы высот, либо укрупняют и горизонтальный масштаб. В любом случае для основания масштаба рекомендуется выбирать числа: 1; 2; 2,5; 5 (1:1000, 1:200, 1:50 и т.п.).

Горизонтальный масштаб 1:25000 (в 1 см 250 м)

Вертикальный масштаб 1:2500 (в 1 см 25 м). На рисунке вертикальный масштаб принят 1:500 (в 1 см 5 м).

4. Построить оси координат профиля и оцифровать их в соответствии с выбранными горизонтальным и вертикальным масштабами.



Указать высоту условного горизонта.

Условный горизонт (УГ) – это линия, абсолютная высота которой на графике профиля подбирается так, чтобы между нижней точкой профиля и линией условного горизонта оставалось место для нанесения другой информации, в отношении которой строится сам профиль.

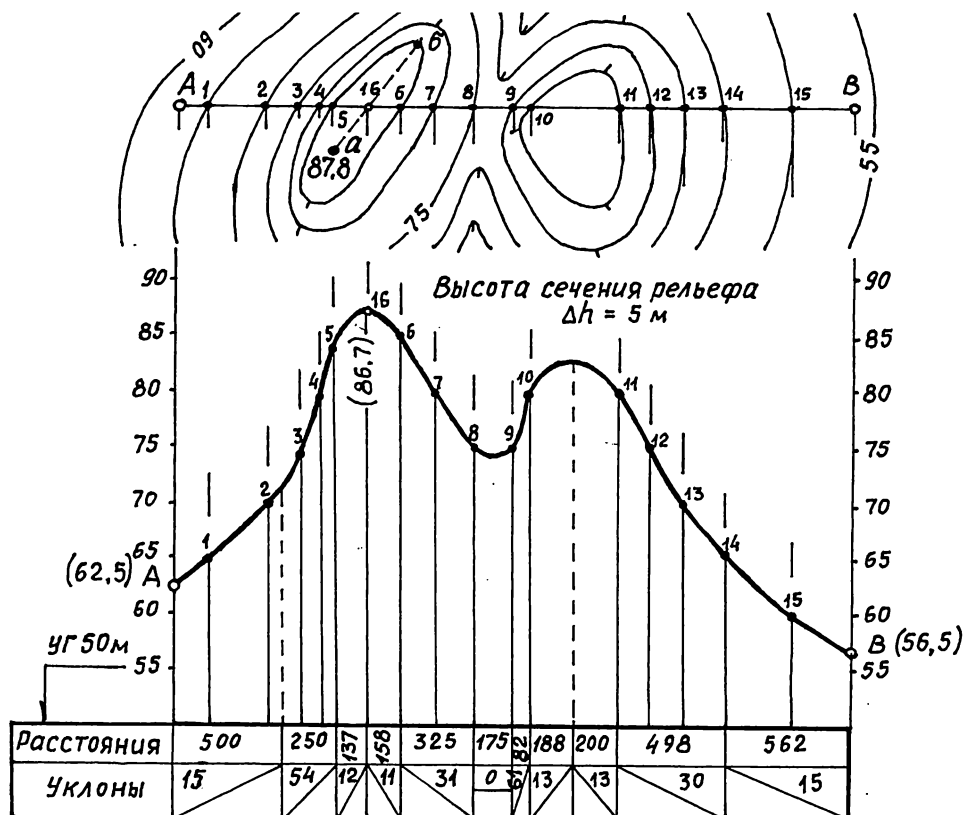


Рис. 2.25. Построение профиля местности по карте

Условный горизонт  $УГ = 50 \text{ м}$ .

5. Отложить на горизонтальной линии отрезки, соответствующие пересечениям горизонталей с линией профиля, а также точек пересечения линии профиля с объектами ситуации (дорогами, линиями связи, объектами гидрографии, границами лесов и т.п.).

6. Нанести отмеченные точки на чертеже в соответствии с их абсолютными высотами. Полученные точки соединить плавной линией.

В некоторых случаях на линии профиля можно определить высоты дополнительных точек. Если, например, точка находится между горизонталями, то ее высоту легко найти интерполированием заложения, как это пояснялось в разделе 18.5:

$$H_i = H_r \pm (\Delta h) m/a, \quad (2.24)$$

где  $H_g$  – высота горизонтали;  $a$  – заложение;  $m$  – расстояние от горизонтали до точки линии профиля. Т.е. определяется аналогично определению высоты точки  $C$  в предыдущем разделе.

При пересечении лощины (хребта) дополнительную точку определяют на линии водослива (водораздела) также методом интерполирования.

При пересечении седловины для точки седловины принимают, что она находится на половине высоты сечения рельефа от ближайшей к ней горизонтали.

Для точки 16, находящейся на вершине горы, определение высоты связано с построением однородного отрезка  $ab$ . В этом случае превышение точки  $b$  по отношению к вершине горы будет отрицательным:

$$h_b = 85,0 - 87,8 = -2,8 \text{ м.}$$

Длина отрезка  $ab$  равна 26 мм, отрезка  $a16$  – 10 мм. Из пропорции находим, что  $h_{16} = -2,8 \text{ м} (10\text{мм}/26 \text{ мм}) = -1,1 \text{ м}$ . Следовательно, высота точки 16 будет равна  $H_{16} = 87,8 - 1,1 = 86,7 \text{ м}$ .

Если высоты точек профиля определяют дополнительно, то их значения записывают в скобках.

В случаях, когда высота точки не может быть определена, точки с известными высотами соединяют на профиле линией сопряжения, характеризующей форму рельефа в данном месте.

7. В сетке профиля выделить «на глаз» однородные склоны и вычислить для них уклоны. (Об определении уклонов см. п. 18.7).

Характерными точками рельефа и ситуации являются точки перегибов рельефа, линии водоразделов и водосливов (тальвеги), седловины, вершины гор (холмов), дна котловин (ям), пересечения с объектами линейного типа, гидрографией, а также и другие точки, представляющие интерес для исполнителя.

## 18.7. Построение линии заданного уклона

Обычно решают задачу построения линии предельного (возможного максимального) уклона (угла наклона).

Углом наклона  $v$  является угол в вертикальной плоскости между плоскостью горизонта и направлением на данную точку, либо направлением линии ската или заложения в выбранном месте рельефа.

Тангенс угла наклона называется *уклоном*  $i$

$$\operatorname{tg} v = i \quad (2.25)$$

Величина заложения  $a$  связана с углом наклона соотношением

$$a = \Delta h \operatorname{ctg} v, \quad (2.26)$$

где  $\Delta h$  – высота сечения рельефа.

В правом нижнем углу карты приводят график заложений, построенный с использованием формулы (2.26) для установленной для данной карты высоты сечения рельефа.

Для однородной линии тангенс угла наклона равен отношению превышения  $h$  крайних точек отрезка к горизонтальному проложению  $d$  между ними, т.е

$$\operatorname{tg} v = h/d \quad (2.27)$$

В частном случае, для определения уклона местности между соседними сплошными горизонталями по заложению между ними можно записать, что

$$v = \operatorname{arctg}(\Delta h / a) \quad (2.28)$$

Значения уклонов задаются в разных формах. Простым значением тангенса угла наклона (0,0124, 0,005 и т.п.). Для сокращения записи значения уклона часто записывают его увеличенными на 1000 (0,002  $\rightarrow$  2; 0,0236  $\rightarrow$  23,6 и т.п.), при этом при произношении величины уклона обязательно добавляют слово «тысячных». Часто величину уклона указывают в процентах.

**Пример 2.16.** Определение уклона линии (рис. 2.25).

**Решение.**

Для первого отрезка однородной линии профиля А-2 горизонтальное проложение равно 500 м, превышение точки 2 относительно точки А положительное (в строке «уклоны» это отмечено соответствующим наклоном)  $70,0 - 62,5 = +7,5$  м. Уклон линии равен  $+7,5/500 = +0,015 = 15$  тысячных. Например, для однородного отрезка 6-8, имеющего горизонтальное проложение 325 м, превышение отрицательное, -10 м. Уклон будет равен  $-10/325 = -0,031 = -31$  тысячная.

Как следует из формулы (2.26), увеличение угла наклона или уклона соответствует уменьшению величины заложения. И наоборот.

Значению предельного уклона  $i_{пред}$  соответствует и предельное значение угла наклона  $v_{пред}$ , а значит и предельная величина заложения  $a_{пред}$ . Таким образом, при построении линии заданного уклона следует выбирать те направления на местности, по которым величина уклона не будет больше предельного, либо величина заложения не будет меньше предельного его значения.

Порядок построения линии с заданным значением предельного уклона следующий (рис. 2.26).

Предположим, что необходимо построить на карте линию  $AB$  со значением предельного уклона  $i = 0,026$  ( $v = 1,5^\circ$ ), соответствующего предельному значению заложения, показанного на рисунке. От точки  $A$  до точки  $1$  движение выполняется по линии  $AB$ . Далее *руч. Гремячий* пересекается под прямым углом к линии водотока до точки 2. От точки 2 перемещение к точке  $B$  может выполняться по двум вариантам (1 и 2). Здесь очевидно, что вариант 1 является оптимальным, исходя из длины общей линии  $AB$ . Однако следует иметь в виду, что при оценке экономической целесообразности оптимальным может оказаться и второй вариант. Например, при изысканиях линейных сооружений (дорог, линий связи и т.п.) более выгодным может оказаться путь в обход лесного массива.

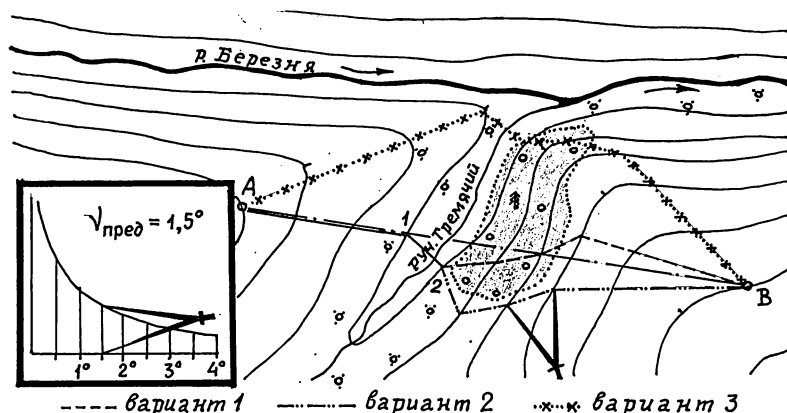


Рис. 2.26. Построение на карте линии заданного уклона

Возможны и другие варианты, например, вариант 3. Однако при постановке задачи проектирования кратчайшего расстояния этот вариант отпадает.

#### 18.8. Построение границы водосборного бассейна и зоны затопления

*Определение границы водосборного бассейна.* Водосборный бассейн представляет собой ту часть земной поверхности, с которой вода, поступающая из атмосферы, стекает по склонам неровностей и собирается затем в одной точке водотока (лощины, оврага, реки и т.п.). При этом примем, что поступающая из атмосферы вода не будет поглощаться грунтом, а будет эвакуироваться по поверхности земли.

Границей водосборного бассейна являются линии водоразделов.

Для построения границы водосборного бассейна необходимо от заданной точки водотока *A* (рис. 2.27) подняться по линиям, перпендикулярным к горизонталям, до ближайшей водораздельной линии. Далее граница продолжится непосредственно по линиям водоразделов до их замыкания.

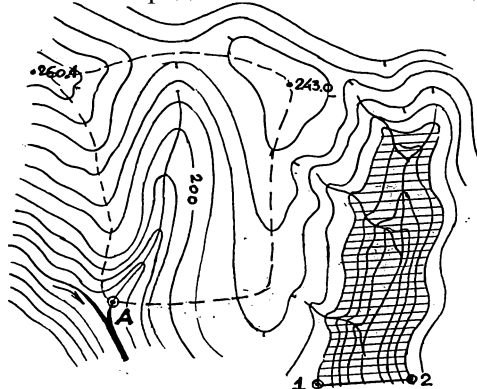


Рис. 2.27. Построение водосборного бассейна и зоны затопления

Используют границы водосборных бассейнов для последующего определения площади бассейна, необходимой при расчетах возможных притоков воды к отверстиям водопропускных систем под дорогами, при проектировании аэродромов и в других случаях.

Водораздельные линии строят также перпендикулярно к горизонталям по хребтам через вершины гор и точки седловин.

Построение зоны затопления выполняют при проектировании

плотин, либо других гидротехнических сооружений, представляющих собой препятствие для свободного тока воды.

Для построения зоны затопления исходной величиной является абсолютная высота плотины или подпорного сооружения, а также положение самой плотины 1-2 на местности. Абсолютная высота плотины задает абсолютную высоту горизонтали (рис. 2.27), которую сравнительно легко провести между горизонталями, имеющимися на карте.

Граница зоны затопления показывает на карте местность, покрываемую водой после строительства плотины, что необходимо для принятия соответствующих предупредительных мер. Кроме того, использование горизонталей карты и отметки водного зеркала позволяет решить задачу о емкости водохранилища.

### 18.9. Определение площадей на топографических картах и планах

Существует несколько способов определения площадей: аналитический, графический и механический.

*Аналитический метод* заключается в определении площади земельного участка по результатам непосредственных или косвенных измерений линий, углов. Если площади земельных участков представляют собой простые геометрические фигуры (треугольники, многоугольники и т.п.), то их площадь определяют аналитически по размерам сторон треугольников, на которые следует разбить более сложные геометрические фигуры. В этом случае, если известны основания  $a_i$  и высоты  $h_i$ , то площадь  $S$  многоугольника определяется как сумма нескольких треугольников (рис. 2.28 б):

$$S = 0,5 \sum_{i=1}^{i=n} a_i h_i \quad (2.29)$$

Если в треугольнике известны все стороны  $a$ ,  $b$  и  $c$ , то для вычисления площади можно воспользоваться другой формулой

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad (2.30)$$

где  $P$  – полупериметр треугольника.

Если в треугольнике известны две стороны  $a$  и  $b$  и угол между ними  $\beta$ , то площадь находится по формуле

$$S = 0,5ab \sin \beta \quad (2.31)$$

Площадь треугольника может быть найдена также и по известной стороне  $a$  и двум углам  $\alpha$  и  $\beta$ , прилежащим к ней:

$$S = \frac{a^2}{2(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)} \quad (2.32)$$

Если известны прямоугольные координаты вершин многоугольника (рис. 2.28 а), то значение его площади может быть получено по формуле:

$$S = 0,5[X_1(Y_2 - Y_n) + X_2(Y_3 - Y_1) + \dots + X_n(Y_1 - Y_{n-1})] \quad (2.33)$$

или

$$S = 0,5[Y_1(X_2 - X_n) + Y_2(X_3 - X_1) + \dots + Y_n(X_1 - X_{n-1})] \quad (2.34)$$

Т.е. удвоенная площадь полигона равна сумме произведений абсциссы (ординаты) каждой из точек на разность ординат последующей и предыдущей (абсцисс последующей и предыдущей) точек.

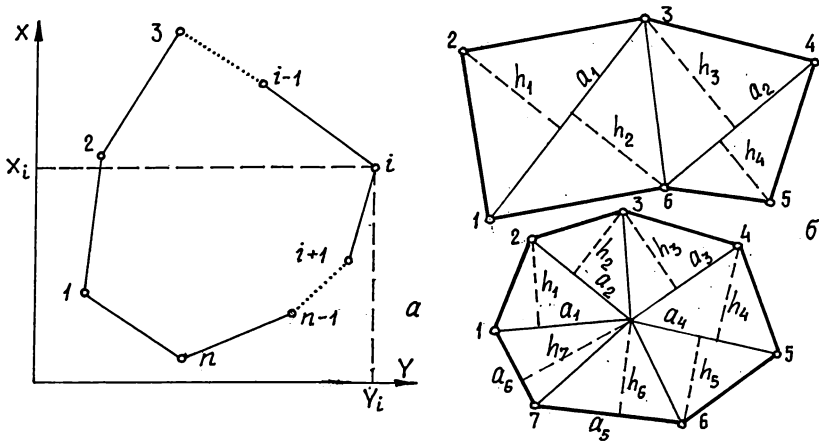


Рис. 2.28. Аналитический (а) и графический (б) способы определения площади многоугольника

В зависимости от направления обхода значение площади может получиться со знаком минус. В связи с этим площадь надо брать по абсолютной величине.

Вычисление площади многоугольника по координатам его вершин следует выполнять для контроля по формулам (2.33) и (2.34).

**Пример 2.17.** Определение площади полигона по координатам его вершин.

Исходные данные

Точки	1	2	3	4
$X, \text{ м}$	2156,847	1921,315	1541,242	1756,211
$Y, \text{ м}$	4600,212	4563,842	4781,747	4763,226

**Решение.**

$$S = 0,5 [2156,847(4563,842 - 4763,226) + 1921,315(4781,747 - 4600,212) + 1541,242(4763,226 - 4563,842) + 1756,211(4600,212 - 4781,747)] = 0,5[2156,847 (-199,384) + 1921,315 (181,535) + 1541,242(199,384) + 1756,211(-181,535)] = 46384,816 \text{ м}^2.$$

$$S = 0,5 [4600,212(1921,315 - 1756,211) + 4563,842(1541,242 - 2156,847) + 4781,747(1756,211 - 1921,315) + 4763,226(2156,847 - 1541,242)] = 0,5[4600,212 (165,104) + 4563,842 (-615,605) + 4781,747(-165,104) + 4763,226(615,605)] = 46384,816 \text{ м}^2.$$

Ответы совпали !

Графический и механический методы используются для определения площадей на картографических изображениях.

*Графический метод* (рис. 2.28 б) предусматривает измерение на плане элементов сравнительно простых фигур (треугольника, прямоугольника, трапеции и др.), позволяющих затем вычислить площадь. Сложные фигуры разбивают обычно на треугольники, в которых измеряют основание и высоту. В некоторых случаях и площади криволинейного контура также разбивают на треугольники или другие простые фигуры.

Фигуры, на которые производят разбивку площадей объектов, должны быть по возможности крупными, мало вытянутыми, *большая* точность будет достигаться, например, при основании треугольника, равном его высоте, опущенной на это основание.

Часто в пределах измеряемой площади есть линии или углы, величины которых известны из результатов непосредственных измерений на местности. В этом случае необходимо разбивку привязать к этим линиям или углам, и использовать известные данные при вычислении площади.

Для повышения точности площадь фигуры следует определять не менее двух-трех раз, причем следует использовать разные разбивки. Расхождение в результатах определения площади по нескольким разбивкам не должно превышать 1:50 от величины площади всего участка.

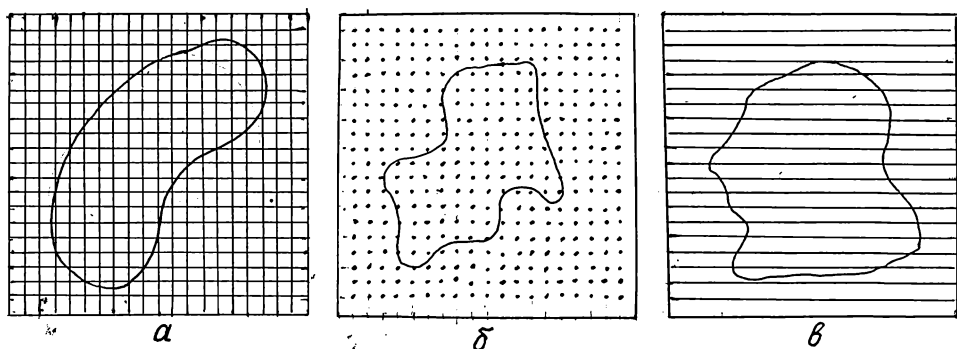


Рис. 2.29. Определение площади фигуры с помощью палеток  
а – квадратная палетка; б – линейная палетка; в – точечная палетка

*Механический метод* определения площадей предусматривает использование *палеток, ротометров, планиметров* или других приборов.

*Определение площадей с помощью палеток.* Принцип определения площади с помощью палетки пояснен на рис. 2.29. Палетка представляет собой прозрачную основу, на которой построена сетка квадратов с известной стороной (*квадратная палетка*), серия параллельных линий с известным расстоянием между ними (*линейная палетка*), упорядоченная группа точек с известными расстояниями между ними (*точечная палетка*).

При использовании квадратной палетки для данного картографического материала определяют площадь элементарной ячейки (квадрата). Например, сторона квадрата равна 2 мм, масштаб карты 1:10000. В этом случае сторона квадрата на местности будет равна 20 м, а площадь – 400 м<sup>2</sup>. Палетку накладывают произвольно на фигуру и определяют число полных квадратов ( $N$ ) и число всех неполных квадратов ( $n$ ). Площадь определяют по формуле

$$S = 0,5 (2N + n) S_0 \quad (2.35)$$

**Пример 2.18.** Определение площади с помощью квадратной палетки.

Исходные данные (рис. 2.29 а) :  $N = 107$ ,  $n = 49$ .

**Решение.**

$$S = 400 (107 + 49/2) = 52600 \text{ м}^2 \text{ (при } S_0 = 400 \text{ м}^2 \text{)}.$$

Похожий принцип реализуется и при использовании линейной палетки (рис. 2.29 в). В качестве единичной площади здесь выступает элементарная полоса длиной  $l_0$ , например, 1 см при известном расстоянии  $a$  между линиями. В пределах контура фигуры измеряют длины линий посередине между нанесенными на палетку параллельными линиями, суммируют их и переводят через значение  $S_0$  в площадь. Если крайние границы контура образуют криволинейный треугольник, как это получилось на рисунке, то величину измеренного отрезка делят пополам. Т.е. площадь определяется в этом случае так же, как и площадь треугольника. В примере, который приведен ниже, это учтено для соответствующих отрезков.

**Пример 2.19.** Определение площади с помощью линейной палетки.

Исходные данные (результаты измерения в пределах контура криволинейной фигуры): (9,0:2 + 17,2 + 22,4 + 24,6 + 25,0 + 25,8 + 27,0 + 27,0 + 27,2 + 29,3 + 28,0 + 28,0 + 28,5 + 25,0 + 9,4:2) мм = 344,2 мм = 34,42 см.

Площадь определяется на карте 1:5000. Расстояние между линиями палетки 2 мм. Длина единичного отрезка принята равной 1 см. Следовательно, единичная площадь  $S_0 = 50 \text{ м} \cdot 10 \text{ м} = 500 \text{ м}^2$ .

**Решение.**

$$S = (500 \cdot 34,42) = 17210 \text{ м}^2.$$

При использовании точечной палетки (рис. 2.29 б) определяют площадь зоны влияния каждой точки, которая, вообще говоря, равна площади квадрата, как и в квадратной палетке. В контуре подсчитывают число точек ( $N$ ) и умножают его на значение элементарной площади. При этом рекомендуется не принимать во внимание точки, совпадающие с контуром измеряемой площади.

**Пример 2.20.** Определение площади с помощью точечной палетки.

Исходные данные:  $S_0 = 200 \text{ м}^2$ .  $N = 87$  (рис. 2.29 б).

**Решение.**

$$S = 200 \cdot 87 = 17400 \text{ м}^2.$$

*Для повышения точности площадь определяют несколько раз (5 – 6 раз) с произвольной перестановкой используемой палетки в любое положение в том числе и с поворотом относительно ее первоначального положения. За окончательное значение площади принимают среднее арифметическое из результатов измерений.*

Более точным и простым в использовании является способ линейной палетки, в котором суммируются отрезки палетки, пересекающие контур.

**Определение площадей с помощью планиметра** (рис. 2.30).

Планиметр был изобретен в 1850 г. русским конструктором П.А.Зарубиным.



Планиметр – это механический прибор, состоящий из полюсного рычага 1 с грузиком 3. Грузик содержит в центре иглу для закрепления его в устойчивом положении на столе. На другом конце полюсного рычага имеется сферическая шарнирная головка, которая свободно вставляется в гнездо 5 обводного рычага 2. На обводном рычаге имеется обводной штырь (игла) 4 и счетный механизм 6. Счетный механизм имеет дисковую шкалу 7 счета оборотов, счетное колесо 8, один оборот которого соответствует одному делению дисковой шкалы. Внешний ободок счетного колеса скользит по бумаге и за счет трения проворачивается и приводит в движение через червячную передачу дисковую шкалу. Со шкалой счетного колеса сопряжена шкала нониуса 9, по которой берут отсчет дробной части наименьшего деления шкалы счетного колеса.

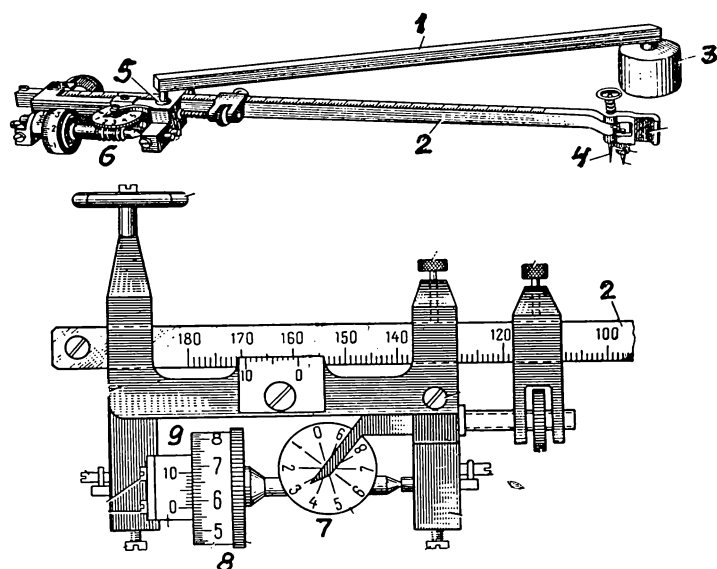


Рис. 2.30. Планиметр

1 – полюсный рычаг; 2 – обводной рычаг; 3 – груз; 4 – игла; 5 – гнездо; 6 – счетный механизм; 7 – дисковая шкала; 8 – счетное колесо; 9 – нониус.

Полный отсчет (рис. 2.30) содержит четыре значащих цифры: 1-я – отсчет по шкале диска (3); 2-я – подписанное число на дисковой шкале до нулевого индекса нониуса (5); 3-я – число полных наименьших делений от ближайшей по возрастанию подписанной цифры счетного колеса до нулевого индекса нониуса (8); 4-я – ближайшее от нулевого индекса нониуса деление, совпадающее с делением шкалы счетного колеса (2). Таким образом, отсчет равен 3582.

Последовательность измерения площади фигуры.

1. Установить планиметр на карте таким образом, чтобы при обводе фигуры угол между полюсным и обводным рычагом не был меньше  $30^\circ$  и больше  $150^\circ$ . При этом колесо счетного механизма обязательно должно перемещаться по поверхности бумаги. Если фигура большая, т.е. не обеспе-

чивается поставленное выше условие, то ее следует измерять по частям. После подбора установки планиметра закрепить полюс нажатием на грузик и в дальнейшем при измерениях не смещать.

2. Установить обводную иглу в точку фигуры, имеющей известную площадь и находящейся примерно в том же месте, что и измеряемая площадь. Такой фигурой может быть один, два или несколько квадратов километровой сетки системы прямоугольных координат карты. Если на картографическом материале отсутствуют фигуры известной площади, то можно их построить. Например, окружность известного радиуса, треугольник, квадрат и т.п. Взять начальный отсчет  $A_o$  по шкалам счетного устройства (например,  $A_o = 5783$ ).

3. Аккуратно обвести фигуру с известной площадью с возвращением в начальную точку. Взять отсчет  $B_o$  (например,  $B_o = 5648$ ).

4. Установить обводную иглу в точку фигуры с неизвестной площадью и взять начальный отсчет  $A$  (например,  $A = 4277$ ).

5. Аккуратно обвести фигуру с неизвестной площадью с возвращением в начальную точку. Взять отсчет  $B$  (например,  $B = 4203$ ).

6. Вычислить разности отсчетов

$$C_o = A_o - B_o \text{ и } C = A - B: C_o = 5783 - 5648 = 135; \quad C = 4277 - 4203 = 74.$$

7. Вычислить площадь фигуры. Предположим, что известная площадь  $S_o$  ( $S_o = 4 \text{ км}^2$ ), тогда  $S = \left( \frac{S_o C}{C_o} \right) \frac{1}{3}$ .

В приведенном примере:  $S = (4 \text{ км}^2 \cdot 74) : 135 = 2,193 \text{ км}^2$ .

Отношение  $S_o / C_o = \mu$  называется ценой деления планиметра. Таким образом,  $S = \mu C$ .

Для повышения точности измерений площадь определяют несколько раз по схеме, приведенной выше. Целесообразно обвод площадей (известной и неизвестной) выполнять по часовой и против часовой стрелки, т.е. один полный прием измерения площади будет заключаться в двойном измерении. Обычно достаточно двух полных приемов. Окончательное значение площади находят как среднее арифметическое из результатов полных приемов измерений.

Если планиметр содержит два отсчетных устройства, то достаточно выполнить один полный прием, но при использовании во всех случаях двух отсчетных устройств, т.е. по каждой из точек брать по два отсчета, например,  $A_{o1}, A_{o2}, B_{o1}, B_{o2}, A_1, A_2$  и т.д.

До начала работы с планиметром необходимо выполнить его поверки в соответствии с указаниями, приводящимися в инструкции по пользованию, либо в другой соответствующей литературе.

При решении различных задач требования к точности определения площадей различные. В связи с этим в каждом случае требуется выбирать и способ определения площади.

В настоящее время выпускаются планиметры различных конструкций, в том числе и электронные планиметры, выдающие результаты измерений на механическое или электронное табло. На рынке геодезических приборов

представлены механические планиметры полярного типа ППМ (Россия), механические планиметры полярного типа фирмы Sokkia KP26, KP27, планиметры механические роликового типа KP46, KP92N, электронные полярного типа PLANIX 5, роликового типа PLANIX 7 и др.

### Глава 3

## КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

### § 19. Виды измерений

*Измерения* в геодезии являются количественной и качественной основой для изучения Земли, для получения исходной информации при решении всех инженерно-геодезических задач и выполнения топографических работ. Любое измерение выражается количественной характеристикой (величиной угла, длиной линии, превышением, площадью участка местности и т.п.) и имеет качественную сторону, которая характеризует точность полученного результата.

Величины, которые получают в процессе производства геодезических работ, можно классифицировать на *измеренные* и *вычисленные*. В первом случае величину получают обычно *непосредственно*, путем сравнения ее с единицей средства измерения, или *косвенно*, как функцию двух или нескольких непосредственно измеренных величин. Например, площадь прямоугольника может быть получена как произведение его сторон, измеренных непосредственно.

Под *результатом измерения* предусматривается конечный результат, который получается в процессе всех произведенных измерений и вычислений. Например, конечным результатом может быть высота точки, ее координаты, площадь участка и т.п.

Результаты измерений в своей группе могут быть *равноточными* и *неравноточными*.

Если измерения выполнены прибором одного и того же класса точности, по одной и той же методике (программе), в одинаковых внешних условиях, одним и тем же наблюдателем (либо наблюдателями одной квалификации), то такие измерения относят к равноточным. При несоблюдении хотя бы одного из перечисленных выше условий результаты измерений классифицируют как неравноточные.

Примером равноточных измерений могут являться результаты измерений длины одной и той же линии, либо линий, примерно равных друг другу, полученные при неизменных условиях внешней среды, одним и тем же измерительным средством (прибором), одними и теми же исполнителями работ, по общей для всех результатов измерений программе.

Если в процессе измерений длины линии, например, стальной лентой, изменится температура окружающего воздуха или поверхности грунта, на который укладывается полотно ленты, то это приведет к получению части неравноточных результатов в общей группе результатов измерений, поскольку

ку при изменении температуры происходит и изменение длины стальной ленты.

Число измеренных величин и число измерений может быть *необходимым* и *избыточным*.

При измерении, например, углов в треугольнике число необходимых измеренных величин равно двум. Значение третьего угла можно вычислить по сумме двух измеренных углов. Если необходимо решить плоский треугольник, то дополнительно обязательным является знание длины хотя бы одной из сторон, в связи с чем число необходимых измеренных величин должно быть равно трем, при этом одно из измерений – линейное при двух известных углах, либо два линейных измерения и один угол, заключенный между измеренными сторонами треугольника.

Таким образом, числом необходимых измеренных величин является минимально необходимое их число, при котором обеспечивается решение поставленной задачи. Число же измеренных величин, превышающих число необходимых, называется числом *избыточных* величин. В геодезии принято обязательным получать и избыточные величины, что обеспечивает обнаружение грубых погрешностей и промахов, позволяет повысить точность результатов измерений. Поэтому в треугольнике, например, обязательно измеряют все три угла и сравнивают полученную сумму углов с теоретической.

Если сформулировать задачу с точки обеспечения заданной точности измерений, то необходимое число измерений должно обеспечивать заданную точность измерения одной величины или самого результата измерений. Так, в том же треугольнике каждый из его углов может быть измерен несколько раз. Все избыточные измерения повышают надежность результатов, а также их точность, но в то же время и увеличивают объем работ, и часто прирост увеличения точности становится экономически нецелесообразным из-за большого числа наблюдений. Иногда говорят, что числом необходимых измерений является одно измерение, остальные – избыточные. Это не всегда так, поскольку, как будет показано выше, одно измерение не позволяет производить оценку точности и может содержать не контролируемую грубую погрешность (промах).

## **§ 20. Классификация погрешностей измерений**

Любые измерения, как бы они тщательно не выполнялись, сопровождаются *погрешностями*, которые представляют собой отклонение результата измерения от истинной его величины.

Отклонения результатов измерения от истинной величины возникают из-за изменения условий измерений. Изменение условий измерений вызывает также изменение характеристик средства измерения, приводит к появлению личных ошибок (погрешностей) самого наблюдателя, колебаниям видимого положения наблюдаемого объекта (точки).

Если результат измерения  $X$  известен точно, то разность между измеренной величиной  $x$  и истинным значением

$$\Delta = x - X \quad (3.1)$$

называют *абсолютной погрешностью*.

Отношение абсолютной погрешности к результату измерения называют *относительной погрешностью*

$$\delta = \frac{\Delta}{X} \quad (3.2)$$

Не для любого результата измерения можно определить относительную погрешность. Например, при определении горизонтального угла можно оперировать только абсолютной погрешностью. А величина относительной погрешности в этом случае может быть определена только косвенно, с привлечением результатов линейных измерений, для оценки, например, планового положения точки на земной поверхности в принятой системе прямоугольных координат.

В результате измерений могут появиться *грубые погрешности*, проявляющиеся в виде промахов и просчетов наблюдателя, из-за незамеченных неисправностей прибора, либо из-за резких изменений внешних условий наблюдений. Результаты грубых измерений обнаруживаются при повторных измерениях, отбраковываются и заменяются новыми. Как будет показано выше, критерием отбраковки грубых результатов может явиться и величина установленной для данного вида работ *предельной погрешности* измерений.

Особое место при геодезических измерениях занимают систематические и случайные погрешности.

Внешние условия измерений, изменение характеристик измерительного средства могут вызвать появление погрешностей одностороннего (одного знака) или знакопеременного вида – *систематических погрешностей*.

Систематические погрешности являются весьма опасными при измерениях, поскольку для их учета надо знать чаще всего изменение характеристик измерительного средства, как внутреннего свойства, определяемых конструкцией прибора и технологией его изготовления, так и при воздействии внешних условий. Например, длина мерной ленты из стального полотна при температуре  $t_1^{\circ}\text{C}$  равна  $L_1$ , а при изменении температуры до  $t_2^{\circ}\text{C}$  она станет равной  $L_2$ . Если не учитывать изменение температуры (т.е. не определять ее в момент измерений), то наблюдатель при температуре  $t_2^{\circ}\text{C}$  будет пользоваться прежним значением длины ленты  $L_1$ , что и даст в результатах измерений систематическую погрешность величиной  $(L_1 - L_2) n$ , где  $n$  – число укладок ленты в измеряемой линии.

Часто систематические погрешности исключают особыми приемами в работе (в рассмотренном выше случае – введением поправок на изменение длины ленты из-за изменения температуры), устанавливают в результате исследования особенности работы прибора, выполняют работы по специальной методике, при которой систематические погрешности исключаются полностью, либо действие их значительно ослабляется. В некоторых случаях полное исключение систематических погрешностей является практически неосуществимым, в связи с чем проводят специальные исследования с целью

установления закона изменения систематических погрешностей и введения поправок в результаты измерений.

Источниками *случайных погрешностей* в измерениях являются неподдающиеся учету мгновенные изменения (флуктуации) внешних условий, которые приводят к неопределенности в каждый момент времени в видимом положении наблюдаемой цели, к относительно мгновенным изменениям характеристик прибора, погрешностям считывания по шкалам прибора и устройств, устанавливаемых на цели и др. По своей величине каждая из составляющих случайных погрешностей является малой, однако в некоторых случаях их совместное действие может быть существенным. В первом приближении случайную погрешность можно определить как разность результата измерения и истинного значения, если в измеренной величине отсутствует грубая погрешность и учтена погрешность систематическая.

## § 21. Свойства случайных погрешностей

Группа случайных погрешностей измерения одной и той же величины подчиняется *нормальному закону распределения*.

Рассмотрим ряд случайных погрешностей, определяемых как отклонение результата измерения  $x_i$  одной и той же величины, свободного от грубых и систематических погрешностей, от истинного значения  $X$ :

$$\Delta_i = x_i - X \quad (3.3)$$

На основании теоретических и опытных данных установлены следующие свойства ряда случайных погрешностей.

*Свойство 1.* При выполнении измерений одной величины равновероятно появление случайных погрешностей, равных по величине, но противоположных по знаку.

*Свойство 2.* Малые по абсолютной величине погрешности встречаются чаще, чем большие.

*Свойство 3.* При неизменных условиях измерений случайные погрешности не превосходят по абсолютной величине известного предела:

$$\Delta_{\text{макс}} \leq \Delta_{\text{пред}} \quad (3.4)$$

*Свойство 4.* При большом числе измерений среднее арифметическое из случайных погрешностей стремится к нулю, т.е.

$$\frac{[\Delta_i]}{n} \rightarrow 0 \quad (\text{при } n \rightarrow \infty) \quad (3.5)$$

Здесь и в дальнейшем квадратные скобки [...] являются символом суммы (символ введен Гауссом).

## § 22. Среднее арифметическое

Как уже говорилось выше, погрешность измерения представляет собой разность между самым результатом измерения  $x_i$  и его истинным значением  $X$ , определяемую по формуле (3.3).

Если результат измерения заранее известен, то, казалось бы, зачем производить измерения? Однако такие действия часто приходится выполнять. Например, при проверке правильности работы или показаний прибора по эталону. Да и при самих непосредственных измерениях, например, углов в треугольнике, сумма углов треугольника (или многоугольника) является эталоном, известной величиной.

В основном результаты измерений заранее неизвестны. Что же представляет собой погрешность измерений в этом случае, и каким образом можно ее определить?

Рассмотрим ряд измерений одной и той же величины  $X$  для случая, когда число измерений весьма большое ( $n \rightarrow \infty$ ). Составим ряд истинных погрешностей измерений, полагая, что измеряемая величина нам известна.

Сложим все разности в правых и левых частях формул (3.3) и разделим полученные результаты на  $n$ , получим

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[x]}{n} - X \quad (3.6)$$

В соответствии со свойствами случайных погрешностей отношение  $[\Delta]/n$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Отношение  $[x]/n = x_o$  называется *средним арифметическим* из результатов измерений.

С учетом сказанного можно записать, что

$$(x_o \rightarrow X)_{n \rightarrow \infty}, \quad (3.7)$$

т.е. среднее арифметическое из результатов измерений при возрастании числа измерений стремится к истинному значению.

Таким образом, при определении погрешностей измерений с какой-то долей надежности (зависящей от числа измерений) можно использовать величину среднего арифметического вместо истинного значения измеряемой величины. В этом случае истинные погрешности будут являться отклонениями результатов измерений от среднего арифметического:

$$v_i = x_i - x_o \quad (3.8)$$

В теории погрешностей измерений доказано, что ряд отклонений  $v_i$  от арифметического среднего также подчиняется нормальному закону распределения и обладает всеми свойствами случайных погрешностей.

## § 23. Средняя квадратическая погрешность

*Средняя квадратическая погрешность* (СКП) является мерой точности результатов измерений, либо функций измеренных величин, и является вероятностной характеристикой.

Предположим, что нам известно значение средней квадратической погрешности  $m$ . В соответствии с нормальным законом распределения график распределения истинных погрешностей по виду будет подобен графику рис. 3.1. Параметр  $r$  характеризует частоту (или частость) появления случайных погрешностей той или иной величины и знака. При этом вероятность появления погрешностей в заданном наперед диапазоне, например,  $\pm\Delta$ , определяется площадью фигуры, ограниченной кривой распределения и отрез-

ками ординат при значениях  $+\Delta$  и  $-\Delta$ . Для нормального закона распределения вероятность появления погрешностей в установленных диапазонах равна следующим значениям :

для диапазона  $\pm\Delta \rightarrow P = 68,3\% (\approx 68\%)$ ;

для диапазона  $\pm 2\Delta \rightarrow P = 95,5\% (\approx 95\%)$ ;

для диапазона  $\pm 3\Delta \rightarrow P = 99,7\%$  (практически 100%).

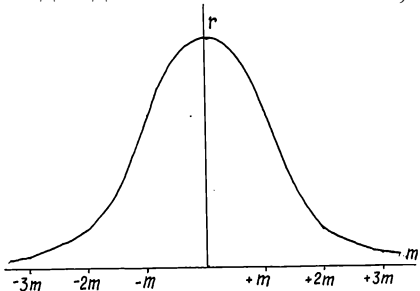


Рис. 3.1. Нормальный закон распределения случайных погрешностей

Таким образом, только в 3-х случаях из 1000 может появиться погрешность, превышающая значение  $3\Delta$ . Такие погрешности принято считать грубыми, и результаты измерений, содержащие такие погрешности, исключают из дальнейшей обработки. В некоторых случаях, для ужесточения требований к точности измерений, устанавливают предельную погрешность до  $2\Delta$  (или до  $2m$ ).

Часто значение СКП указывают с коэффициентом  $t$  (коэффициент Стьюдента), который и определяет доверительный вероятностный интервал  $(x \pm tm)$  результата измерений при установленном уровне вероятности  $P$ . Для этого удобно пользоваться табл. 3.1.

Например, необходимо определить доверительный интервал для величины  $X$  с вероятностью 75%. По таблице интерполированием находим, что для  $P_1 = 72,9$   $t_1 = 1,1$ , для  $P_2 = 77,0$   $t_2 = 1,2$ :  $t_x \approx 1,15$ .

Это значит, что результат измерений с вероятностью 75% находится в пределах  $(X \pm 1,15 m)$ .

Таблица 3.1

$t$	$P\%$	$t$	$P\%$	$t$	$P\%$
0,1	8,0	1,1	72,9	2,1	96,4
0,2	15,9	1,2	77,0	2,2	97,2
0,3	23,6	1,3	80,6	2,3	97,9
0,4	31,1	1,4	83,8	2,4	98,4
0,5	38,3	1,5	86,6	2,5	98,8
0,6	45,1	1,6	89,0	2,6	99,1
0,7	51,6	1,7	91,1	2,7	99,3
0,8	57,6	1,8	92,8	2,8	99,5
0,9	63,2	1,9	94,3	2,9	99,6
1,0	68,3	2,0	95,5	3,0	99,7

Если измеряемая величина  $X$  известна, то значение СКП определяется по формуле Гаусса:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \quad (3.9)$$

где  $\Delta$  - истинные погрешности измерений.



Для случаев, когда измеряемая величина неизвестна, используется формула Бесселя:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{(n-1)}}, \quad (3.10)$$

где  $v$  - отклонения результатов измерений от среднего арифметического.

Как видно из формул (3.9) и (3.10), в случае, когда измеряемая величина известна, для оценки точности достаточно уже одного измерения (оно и является необходимым). Как уже указывалось выше, чаще всего формулу Гаусса используют при оценках точности эталонируемых приборов при измерении известных величин (эталонов). Для оценки точности по формуле Бесселя необходимыми являются как минимум два измерения. Формула Бесселя используется при оценках точности результатов массовых (многократных) измерений одной величины.

При возрастании числа измерений значения СКП, полученные по формулам Гаусса и Бесселя, становятся практически одинаковыми (примерно с  $n \geq 20$ ). При этом значение СКП одного измерения стремится к пределу  $m_{пред}$ , который определяется точностью прибора, точностью метода или программы измерений. Очевидно, что на практике невозможно, да и нецелесообразно по ряду причин, обеспечивать весьма большое число измерений одной величины. При этом практическое число измерений должно обеспечивать получение результата измерения с заданной точностью при установленном уровне доверительной вероятности.

Поскольку число измерений является ограниченным, то сама СКП содержит погрешность, определяемую по приближенной формуле:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \quad (3.11)$$

## § 24. Средние квадратические погрешности функций измеренных величин

В § 23 рассмотрены средние квадратические погрешности непосредственно измеренных величин. Чаще всего сами непосредственно измеренные величины используются в различных формулах, результатом вычисления по которым являются косвенные величины. Например, площадь прямоугольника, как косвенная величина, может быть определена как произведение сторон прямоугольника, полученных при измерениях непосредственно. Оценку точности площади в этом случае необходимо производить с учетом погрешностей в измерениях его сторон.

Предположим, что имеется функция  $F$  аргументов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.12)$$

Величины  $x_i$  известны из непосредственных измерений, а также известны и их СКП:  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . В этом случае СКП функции определяется по следующей формуле:

$$m_F = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2\right]}, \quad (3.13)$$

где  $(\partial f / \partial x_i)$  - частная производная функции по аргументу  $x_i$ .

Правила определения СКП функций следующие.

1. Выполнить последовательно дифференцирование функции отдельно по каждому из аргументов, считая остальные аргументы постоянными числами (коэффициентами).

2. Полученные выражения умножить на СКП аргументов, по которым производилось дифференцирование функции и возвести полученные выражения каждое отдельно в квадрат.

3. Записать полученные выражения в виде суммы под знаком квадратного корня.

Рассмотрим несколько примеров определения СКП функций.

**Пример 3.1.** Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического.

Очевидно, что значение среднего арифметического является функцией суммы измеренных величин  $x_i$  (3.1). Представим это выражение в виде

$$x_o = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n \quad (3.14)$$

Поскольку  $1/n$  является постоянным коэффициентом, то при почленном дифференцировании и после умножения на  $m_i$  и возведения в квадрат получим:

$$m_{x_o} = M = \sqrt{\left[(m_1/n)^2 + (m_2/n)^2 + \dots + (m_n/n)^2\right]}, \quad (3.15)$$

или

$$m_{x_o} = M = \sqrt{(m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_n^2) / n} \quad (3.16)$$

Полагая измерения равноточными, т.е.  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ , выражение (3.16) преобразуем к виду

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (3.17)$$

Т.е. СКП среднего арифметического в корень из числа измерений меньше СКП одного измерения.

С учетом (3.10)

$$M = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \quad (3.18)$$

Очевидно, что, если при увеличении числа измерений значение СКП одного измерения стремится к предельному значению, отличному от нуля, то значение СКП среднего арифметического стремится при увеличении числа измерений к нулю, а само среднее арифметическое – к истинному значению.

**Пример 3.2.** Объем пирамиды, основанием которой является прямоугольник, определен по формуле

$$V = \frac{hab}{3} \quad (3.19)$$

где  $h$  – высота пирамиды,  $a$  и  $b$  – стороны основания.

Требуется определить СКП объема пирамиды, вычисленного по формуле (3.19), если известно, что  $h = 12,34$  м,  $a = 23,46$  м,  $b = 39,63$  м и их СКП равны соответственно:  $m_h = 0,07$  м,  $m_a = 0,02$  м,  $m_b = 0,04$  м.

**Решение.**

Выполняем последовательное дифференцирование по аргументам  $h$ ,  $a$  и  $b$ :

- по аргументу  $h$ :  $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{ab}{3} m_h$ ;
- по аргументу  $a$ :  $\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{hb}{3} m_a$ ;
- по аргументу  $b$ :  $\frac{\partial V}{\partial b} = \frac{ah}{3} m_b$ .

Возводим в квадрат полученные части и записываем в виде суммы в подкоренном выражении:

$$m_V = \sqrt{\frac{1}{9}[(ab)^2 m_h^2 + (hb)^2 m_a^2 + (ha)^2 m_b^2]} \quad (3.20)$$

Формулу (3.20) можно преобразовать к следующему виду. Разделим правую и левую части соответственно на  $(h a b)$  и  $V$ , получим

$$\frac{m_V}{V} = \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{m_h}{h}\right)^2} \quad (3.21)$$

или

$$\delta_V = \frac{1}{3} \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2 + \delta_h^2} \quad (3.22)$$

где  $\delta$  - относительные СКП аргументов и функции.

Выполним вычисления по формуле (3.20).

$$m_V = \frac{1}{3} \sqrt{(23,46 \times 39,63 \times 0,70)^2 + (12,34 \times 23,46 \times 0,04)^2 + (12,34 \times 39,63 \times 0,02)^2} = 7,42 \text{ м}^3.$$

$$\text{Значение } V = (23,46 \cdot 39,63 \times 12,34) : 3 = 1274,75 \text{ м}^3.$$

$$\text{Относительная СКП определения объема равна } \delta_V = 7,42 / 1274,75 = 0,00582 = \frac{1}{1718}.$$

Выполним проверку значения  $\delta_V$  по формуле (3.22).

Относительные СКП аргументов равны:

$$\delta_h = 0,07 : 12,34 = 0,00567, \delta_a = 0,02 : 23,46 = 0,00085, \delta_b = 0,04 : 39,63 = 0,00101.$$

После подстановки в формулу (3.22) получим  $\delta_V = 0,00582$ , что совпадает с предыдущим результатом.

**Пример 3.3.** Сторона  $a$  треугольника определена по теореме синусов по значению стороны  $b$  и двум углам треугольника  $A$  и  $B$ :

Известно:  $b = 140,12 \text{ м}$  ( $\delta_b = 1 : 2000$ ;  $m_b = 140,12 : 2000 = 0,07 \text{ м}$ ),  $A = 73^\circ 18,8'$  ( $m_A = 0,4'$ ),  $B = 63^\circ 05,6'$  ( $m_B = 0,3'$ ).

Необходимо определить СКП стороны  $a$ .

**Решение.**

Вычисление стороны  $a$  производится по формуле

$$a = b \frac{\sin A}{\sin B} \quad (3.23)$$

Запишем члены подкоренного выражения для СКП параметра  $a$ :

- для аргумента  $b$ :  $(m_b \sin A / \sin B)^2$ ;
- для аргумента  $A$ :  $(b m_A \cos A / \rho' \sin B)^2$ ;

где  $\rho' = 3438'$  (число минут в радиане; для выражения угловой меры СКП угла в меру радианную);

- для аргумента  $B$ :  $(b m_B \sin A \cos B / \rho' \sin^2 B)^2$ .

Следовательно,

$$m_a = \sqrt{\left(\frac{m_b \sin A}{\sin B}\right)^2 + \left(\frac{m_A b \cos A}{\rho' \sin B}\right)^2 + \left(\frac{m_B b \sin A \cos B}{\rho' \sin^2 B}\right)^2} \quad (3.24)$$

После подстановки значений аргументов получим:  $m_a = 0,096 \text{ м}$ .

Как показывают данные расчетов, большее влияние на погрешность стороны  $a$  оказывает первый в записи член, определяемый погрешностью аргумента  $b$ . Двумя другими членами общего выражения для погрешности стороны  $a$  практически можно пренебречь. Однако следует иметь в виду и то, что малое влияние второго и третьего членов подкоренного выражения обусловлено сравнительно малой погрешностью измерения углов по сравнению с погрешностью измерения стороны  $b$ . Следовательно, в рассмотренном случае углы можно измерять с большей погрешностью, чем это было выполнено по условиям задачи.

Значение стороны  $a$ , вычисленное по формуле (3.23), равно 189,81 м. Относительная погрешность стороны  $a$  будет равна  $\delta_a = m_a / a = 0,096 / 189,81 = 1:1977$ , т.е. практически она равна относительной погрешности измерения стороны  $b$ .

## § 25. Обработка ряда равноточных измерений одной величины

Порядок обработки результатов равноточных измерений следующий.

1. Вычислить среднее арифметическое  $x_o$  по формуле (3.14).
2. Получить ряд отклонений результатов измерений от среднего арифметического по формуле (3.8).

3. Проконтролировать сумму отклонений.

Сумма отклонений результатов измерений от среднего арифметического должна быть равна нулю, т.е.  $[v] = 0$ . В значении среднего арифметического для начальной обработки следует оставлять после запятой на один знак больше, чем в результатах измерений. При этом, из-за возможного округления среднего арифметического, сумма отклонений может незначительно отличаться от нуля.

4. Составить ряд квадратов отклонений  $v^2$  и получить сумму квадратов отклонений  $[v^2]$ .

5. Вычислить среднюю квадратическую погрешность одного измерения по формуле (3.10).

6. Вычислить погрешность средней квадратической погрешности по формуле (3.11);

7. Вычислить среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического по формулам (3.17) или (3.18).

8. Произвести округление результатов в соответствии со значением СКП среднего арифметического и записать окончательное значение измеренной величины с ее доверительным интервалом (для заданной доверительной вероятности).

В табл. 3.2 приведен пример обработки результатов измерений линии, измеренной на местности рулеткой с миллиметровыми делениями.

**Пример 3.4.** Обработка ряда равноточных измерений одной величины  
**Решение.**

СКП одного измерения:  $m = 0,004645$  м.

Погрешность СКП одного измерения:  $m_m = 0,000519$  м.

СКП среднего арифметического:  $M = 0,00073$  м.

На основании значения  $m_m$  величину  $m$  можно округлить до  $m = 0,005$  м.

Значение среднего арифметического округлять здесь не следует, поскольку разряд округления и значение погрешности среднего арифметического ( $M = 0,0007$  м) – одного порядка.

С учетом данных табл. 9 можно записать значение измеренной величины в виде доверительного интервала  $\pm tM$  с заданной вероятностью  $P$ :

$$X_{(P=68,3\%)} = (83,6619 \pm 0,0007) \text{ м}$$

$$X_{(P=95,5\%)} = (83,6619 \pm 0,0014) \text{ м}$$

$$X_{(P=99,7\%)} = (83,6619 \pm 0,0021) \text{ м}$$

Запись, например, для  $X_{(P=95,5\%)}$  расшифровывается так: с вероятностью 95,5% величина  $X$  находится в интервале  $83,6612 \text{ м} < X < 83,6626 \text{ м}$ .

Проконтролируем ряд значений  $x_i$ , приведенный в табл. 3.2, на соответствие нормальному закону распределения. Найдем для этого число измерений, которые находятся в пределах  $\pm t$ ,  $\pm 2t$  и  $\pm 3t$ , т.е. в пределах  $(83,662 \pm 0,005)$  м,  $(83,662 \pm 0,010)$  м и  $(83,662 \pm 0,015)$  м, с округлением среднего арифметического и СКП одного измерения до 0,001 м (как было получено при измерениях), получим:

$$n_{(t=1)} = 28, \quad n_{(t=2)} = 40, \quad n_{(t=3)} = \text{нет}.$$

Отношение  $n_{(t=1)}$  к общему числу измерений  $n = 40$  равно 70%, что примерно соответствует вероятности  $P = 68,3\%$  для нормального закона распределения. Отклонение объясняется ограниченным числом измерений.

Таблица 3.2

№№ п/п	Результат измерения $x_i$	Уклонение $v_i \cdot 10^{-3}$	Квадрат уклонения $v_i^2 \cdot 10^{-6}$	№№ п/п	Результат измерения $x_i$	Уклонени е $v_i \cdot 10^{-3}$	Квадрат уклонения $v_i^2 \cdot 10^{-6}$
1	83,668	+6,1	37,21	21	83,666	+4,1	16,81
2	83,662	+0,1	0,01	22	83,664	+2,1	4,41
3	83,656	-5,9	34,81	23	83,657	-4,9	24,01
4	83,664	+2,1	4,41	24	83,660	-1,9	3,61
5	83,662	+0,1	0,01	25	83,669	+7,1	50,41
6	83,672	+10,1	102,01	26	83,665	+3,1	9,61
7	83,661	-0,9	0,81	27	83,660	-1,9	3,61
8	83,656	-5,9	34,81	28	83,655	-6,9	47,61
9	83,666	+4,1	16,81	29	83,665	+3,1	9,61
10	83,662	+0,1	0,01	30	83,661	-0,9	0,81
11	83,658	-3,9	15,21	31	83,669	+7,1	50,41
12	83,654	-7,9	62,41	32	83,656	-5,9	34,81
13	83,669	+7,1	50,41	33	83,662	+0,1	0,01
14	83,667	+5,1	26,01	34	83,664	+2,1	4,41
15	83,659	-2,9	8,41	35	83,662	+0,1	0,01
16	83,663	+1,1	1,21	36	83,669	+7,1	50,41
17	83,659	-2,9	8,41	37	83,658	-3,9	15,21
18	83,657	-4,9	24,01	38	83,662	+0,1	0,01
19	83,662	+0,1	0,01	39	83,659	-2,9	8,41
20	83,653	-8,9	79,21	40	83,663	+1,1	1,21

$$x_o = 83,6619 \quad [v] = 0 \quad [v^2] = 841,60 \times 10^{-6}$$

## § 26. Об учете систематических погрешностей в измерениях

Выше говорилось о сложностях выявления и учета систематических погрешностей в результатах измерений. Во многих случаях приходится специально исследовать влияние систематических погрешностей, либо совершенствовать методику или программу измерений с целью их исключения или ослабления.

Далее мы рассмотрим простейший случай выявления и учета указанных погрешностей при выполнении эталонирования измерительного прибора, т.е. при определении точности работы прибора. Заметим, что в этом случае измеряемая величина известна, и значение СКП следует определять по формуле (3.9). Кроме того, считаем, что систематическая погрешность постоянна по величине и знаку во всем диапазоне значений результатов измерений.

Если результаты измерений содержат систематическую погрешность  $\Delta_{\text{сист}}$ , то, очевидно, и значение среднего арифметического  $x_o'$  исследуемого ряда  $x_i$  также будет содержать ту же погрешность:

$$x_o' = X + \Delta_{\text{сист}}, \quad (3.25)$$

откуда находим

$$\Delta_{\text{сист}} = x_o' - X \quad (3.26)$$

Таким образом, истинные погрешности результатов измерений будут содержать как случайные  $\Delta_{\text{сл}}$ , так и систематические погрешности  $\Delta_{\text{сист}}$ :

$$\Delta_i = x_i - X = \Delta_{\text{сл}} + \Delta_{\text{сист}} \quad (3.27)$$

Предположим, что нами установлена величина систематической погрешности, тогда в ряду общей погрешности ее можно исключить и образовать ряд случайных погрешностей

$$\Delta_{\text{сл}} = \Delta_i - \Delta_{\text{сист}}, \quad (3.28)$$

обработка которого выполняется по алгоритму, приведенному в примере 3.4.

В табл. 3.3 приведен пример обработки результатов геодезических измерений (измерение горизонтального угла), содержащих систематическую погрешность.

**Пример 3.5.** Обработка результатов измерения горизонтального угла  $\beta_o = 63^\circ 47' 30''$  теодолитом Т2, содержащих систематическую погрешность.

**Решение.**

Вычисляем среднее значение горизонтального угла по результатам произведенных измерений:  $\beta_o' = [\beta_i'] / n = 63^\circ 47' 34,3''$ .

Систематическая погрешность определяется разностью  $\Delta_{\text{сист}} = (\beta_o' - \beta_o) = +4,3''$ .

Исключаем из результатов измерений систематическую погрешность:  $\beta_i = (\beta_i' - \Delta_{\text{сист}})$ .

Образуем ряд случайных погрешностей  $\Delta_{\text{сл}} = (\beta_i - \beta_o)$  и возведем их значения в квадрат.

Получим сумму квадратов отклонений от истинного значения:  $[\Delta_{\text{сл}}^2] = 23,43$ .

Поскольку измеряемая величина была известна, то для определения СКП результата измерения используем формулу Гаусса (3.9):

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[\Delta_{\text{сл}}^2]}{n}} = \sqrt{\frac{23,43}{7}} = 1,8''.$$

Среднюю квадратическую погрешность  $m_m$  средней квадратической погрешности для рассматриваемого примера определим по формуле (3.11):

$$m_m = m_\beta / \sqrt{2n} = 1,8'' / \sqrt{14} = 0,5''.$$

С учетом этого можно записать, что  $m_\beta \approx 2''$ .

Вопрос же появления систематической погрешности в измерениях, более, чем в два раза превышающей случайную, да и точность измерения прибора (2''), необходимо исследовать особо.

Таблица 3.3

№№ п/п	Результаты измерения, $\beta_i'$	Система- тическая погрешность, $\Delta_{\text{сист}}$	Исправленные значения результатов измерений, $\beta_i$	Уклонения от истинного значения, $\Delta_{\text{сл}}$	Квадраты уклонений, $\Delta_{\text{сл}}^2$
1	63° 47' 34"	+ 4,3"	63° 47' 29,7"	- 0,3"	0,09
2	38"	+ 4,3"	33,7"	+ 3,7"	13,69
3	33"	+ 4,3"	28,7"	- 1,3"	1,69
4	35"	+ 4,3"	30,7"	+ 0,7"	0,49
5	35"	+ 4,3"	30,7"	+ 0,7"	0,49
6	32"	+ 4,3"	27,7"	- 2,3"	5,29
7	63° 47' 33"	+ 4,3"	63° 47' 28,7"	- 1,3"	1,69

## § 27. Средняя квадратическая погрешность двойных равноточных однородных измерений

В абсолютном большинстве случаев в геодезических работах производят двукратные измерения однородных величин: длин линий (примерно одинаковых по величине), горизонтальных углов (образованных примерно одинаковыми по величине сторонами), превышений и др. Также, как и при многократных измерениях одной величины, здесь возникает необходимость оценки точности измерений, т.е. определения средней квадратической погрешности разности двойных измерений.

Предположим, что мы имеем ряд из  $n$  парных равноточных измерений  $x_i$  и  $x_i'$ , для которых можно составить разности  $d_i$ :

$$d_i = x_i - x_i' \quad (3.29)$$

В этом случае, полагая, что в исследуемом ряду в разностях не содержатся систематические погрешности, можно записать для средней квадратической погрешности разности

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \quad (3.30)$$

Поскольку измерения равноточные, то можно записать, что

$$m_d = m\sqrt{2}, \quad (3.31)$$

где  $m$  – СКП одного измерения.

С учетом (3.30) и (3.31) получим

$$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \quad (3.32)$$

Двойные измерения одной величины позволяют в большой степени обнаружить систематические погрешности одного знака и примерно одной величины (односторонние погрешности). Если систематические погрешности отсутствуют, то сумма разностей двойных измерений весьма близка к нулю, т.е.  $[d] = 0$ . Наличие в измерениях систематической погрешности приводит к ее накоплению в сумме разностей двойных измерений, в связи с чем получится величина  $Q = [d]$ . При  $n$  измерениях доля накопленной систематической погрешности в каждой разности будет составлять

$$q = [d]/n \quad (3.33)$$

Если из значений разностей двойных измерений исключить величину систематической погрешности,

$$\delta_i = (d_i - q), \quad (3.34)$$

то СКП разности можно вычислить по формуле

$$m_d = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}, \quad (3.35)$$

а СКП одного измерения – по формуле

$$m = \sqrt{\frac{[\delta^2]}{2(n-1)}} \quad (3.36)$$

**Пример 3.6.** В табл. 3.4 приведена обработка результатов двойных равноточных однородных измерений длин линий светодальномером. Требуется определить наличие в результатах измерений систематической погрешности и выполнить оценку точности одного измерения.

**Решение.**

Разности  $d$  в таблице получены как 1-е измерение минус 2-е измерение.

Сумма разностей двойных измерений  $[d] = -0,046$  м, что говорит о наличии в результатах двойных измерений систематической погрешности. Ее значение равно  $q_i = [d]/n = -0,046 : 9 = -0,005$  м.

Образует ряд случайных погрешностей, см. формулу (3.34), и возведем полученные отклонения в квадрат (для сокращения записи введен множитель  $10^{-6}$ ).

Сумма квадратов отклонений  $[\delta_i^2] = 237 \cdot 10^{-6} = 0,000237$ .

СКП разности двойных измерений

$$m_d = \sqrt{\frac{0,000237}{9-1}} = 0,0054 \text{ м.}$$

СКП одного измерения  $m = m_d / \sqrt{2} = 0,0054 / 1,41 = 0,004$  м.

Следует иметь в виду, что значение  $m$  получено как вероятная погрешность по девяти парным измерениям сравнительно одинаковых длин линий. Случайные погрешности в измерениях 1, 3, 6 и 8 превышают полученное значение  $m_d$ . Независимо от этого принято считать, что любая из линий измерена со средней квадратической погрешностью 0,004 м.

Среднее значение любой измеренной линии имеет погрешность  $M = \frac{m}{\sqrt{2}} = 0,003$  м, как это следует из формулы (3.17) для двух измерений.



№№ п/п	1-е измерение, $x_i$ , м	2-е измерение, $x'_i$ , м	Разности, $d_i$ , м	Систематическая погрешность, $q_i$	Случайная погрешность, $\delta_i$	$\delta_i^2 \times 10^{-6}$
1	647,263	647,261	+ 0,002	- 0,005	+ 0,007	49
2	624,850	624,857	- 0,007	- 0,005	- 0,002	4
3	636,304	636,315	- 0,011	- 0,005	- 0,006	36
4	652,842	652,844	- 0,002	- 0,005	+ 0,003	9
5	638,219	638,209	- 0,010	- 0,005	- 0,005	25
6	625,347	625,346	+ 0,001	- 0,005	+ 0,006	36
7	644,936	644,936	0,000	- 0,005	+ 0,005	25
8	650,027	650,015	- 0,012	- 0,005	- 0,007	49
9	641,006	641,013	- 0,007	- 0,005	- 0,002	4

## § 28. Понятие о весе результата измерения

До сих пор мы говорили о результатах измерений, точность которых (степень доверия к ним) была одинаковая, весьма близкая по величине. Строго говоря, в природе измерений не существует равноточных величин. Обеспечить это весьма сложно, да во многих случаях и нет в этом необходимости. К равноточным измерениям можно отнести все результаты, погрешности которых не выходят за пределы допустимой величины, например, двойной средней квадратической погрешности.

Часто приходится иметь дело с разнородными величинами. Например, при выполнении геодезических измерений использовать результаты длин линий, которые значительно отличаются по величине, либо измерены разными по точности приборами, либо однородные величины в группе измерены равноточно, но с разным числом измерений в группах и т.п. В этом случае, при оценке точности, говорят о неравноточных измерениях.

Если в качестве веса результата измерения взять число, которое характеризует точность, то по смыслу слова *вес* можно сказать, что, чем больше *вес* результата, тем выше его точность (тем меньше погрешность, с которой получен данный результат). Т.е. *вес* находится в обратно пропорциональной зависимости от погрешности результата. Пусть точность измерения какой-либо величины характеризуется средней квадратической погрешностью  $m$ , тогда вес  $P$  определяют как отношение

$$P = \frac{c^2}{m^2} \quad (3.37)$$

Значение  $c$  может быть любым, кроме нуля, но для анализируемой группы результатов измерений его принимают равным примерно среднему значению  $m$  по группе, поэтому значения весов результатов измерений не будут слишком большими или слишком маленькими.

Очевидно, что величина СКП зависит от числа измерений, а это значит, что от числа измерений зависит и вес: чем с большим числом измерений получен тот или иной результат, тем больше его вес.

Уже при обработке ряда равноточных измерений мы сталкивались с результатами, имеющими разный вес. Если принять за единичный вес результат одного измерения, то среднее арифметическое будет получено с большим

весом, причем вес его будет в  $n$  раз больше, чем вес результата одного измерения.

Предположим, что при равноточных измерениях одной и той же величины  $X$  (заранее неизвестной) выполнено три серии по  $n_i$  наблюдений в каждой:  $n_1, n_2, n_3$ , причем  $n_1 > n_2 > n_3$ . Примем значение  $c^2$  в формуле (3.37) равным  $n_1$ . Поскольку значение СКП обратно пропорционально корню квадратному из числа измерений, то квадрат СКП будет обратно пропорционален числу измерений. В связи с этим формулу (3.37) можно переписать в виде

$$P = \frac{n_i}{n_o}, \quad (3.38)$$

где  $n_o = \sqrt{c}$ .

В рассматриваемом случае  $P_1 = 1, P_2 = n_2 / n_1, P_3 = n_3 / n_1$ . Это говорит о том, что серии измерений неравноточны между собой.

Обозначим результаты измерений в сериях 1, 2 и 3 как  $x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}$  и вычислим средние арифметические значения измеренной величины в каждой из серий:  $x_{1o}, x_{2o}$  и  $x_{3o}$  по формуле (3.14).

Для всей группы измерений значение *арифметической середины*  $x_o$  определится с учетом их весов из выражения

$$x_o = \frac{x_{1o}P_1 + x_{2o}P_2 + x_{3o}P_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{[x_o P]}{[P]} \quad (3.39)$$

Аналогичная формула получится и для случая  $n$  серий измерений.

Из формулы (3.39) следует, что вес арифметической середины равен сумме весов всех измерений, входящих в серии.

Веса всех измерений можно изменить в одинаковое число раз. От этого значение арифметической середины не изменится. Т.е. в качестве  $n_o$  можно взять и другое число, отличное от  $n_1, n_2$  и  $n_3$ . Это число ( $c, n_o$  и др.) называют *единицей веса*.

Для оценки весов неравноточных измерений или групп неравноточных измерений используют различные приемы. Так, если известны средние квадратические погрешности в группах измерений, то в качестве единицы веса может быть выбрана любая из известных СКП, либо примерно среднее ее значение. Вес результата измерения в группе в этом случае определится по формуле (3.37).

В некоторых случаях в качестве единицы веса используют число измерений в группе. Даже если предположить, что каждая из величин в каждой из групп измеряется равноточно, то при разных числах измерений в группе образуются результаты средних арифметических, неравноточных между собой. Здесь приемлемо использовать для вычисления весов формулу (3.38).

В качестве погрешности единицы веса может выступать и, например, измеряемое расстояние, если погрешность его определения функционально зависит от его величины (практически это и имеет место). В зависимости от вида указанной функции единицей веса может быть как непосредственно длина линии, так и корень квадратный из длины линии.

При измерении горизонтальных углов на местности в некоторых случаях в качестве единицы веса направления (отсчета по горизонтальному кругу *теодолита*) используют величину этого направления, поскольку погрешность направления зависит от погрешности установки оси теодолита над вершиной измеряемого угла (*погрешность центрирования*). Чем короче расстояние (сторона угла), тем больше погрешность направления (прямая пропорциональная зависимость). В этом случае в качестве единицы веса при вычислении весов направлений следует брать квадрат длины стороны.

## § 29. Средняя квадратическая погрешность единицы веса и арифметической середины

Средняя квадратическая погрешность единицы веса  $\mu$  характеризует погрешность результата измерения, вес которого равен единице.

В этом случае формулу (3.37) можно представить в виде

$$P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} . \quad (3.40)$$

Из (3.40) найдем

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{P_i}} \quad (3.41)$$

Таким образом, СКП результата измерения равна СКП единицы веса, деленной на корень квадратный из веса этого измерения.

Если выполнено  $n$  серий измерений, то СКП единицы веса, характеризующую все измерения, можно найти по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[m^2 P]}{n}} \quad (3.42)$$

Если выполнено  $n$  серий измерений известной величины  $X$ , то

$$\mu = \sqrt{\frac{[\Delta^2 P]}{n}} , \quad (3.43)$$

где  $\Delta = (x_{oi} - X)$  – разность среднего арифметического серии  $i$  и истинного значения измеряемой величины.

Если выполнено  $n$  серий измерений неизвестной величины, то

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2 P]}{(n-1)}} , \quad (3.44)$$

где  $v = (x_{oi} - x_o)$  – отклонения среднего арифметического серии  $i$  от арифметической середины всей группы измерений.

В соответствии с формулой (3.43) СКП арифметической середины  $M_o$  может быть получена из выражений:

$$M_o = \sqrt{\frac{[v^2 P]}{(n-1)[P]}} = \frac{\mu}{\sqrt{[P]}} . \quad (3.45)$$

Т.е., СКП арифметической середины в корень квадратный из суммы весов всех серий измерений меньше, чем СКП единицы веса.

## § 30. Обработка ряда неравноточных измерений одной величины

Рассмотрим пример обработки результатов неравноточных измерений одной величины.

**Пример 3.7.** Выполнено 6 серий измерений длины линии, равноточных в каждой из серий, но неравноточных между сериями (обработка результатов - табл. 3.5).

Вычисление весов серий. Принимаем  $n_o = n_3 = 5$ . Значения весов остальных серий находим по формуле (3.38). Сумма весов равна  $[P] = 6,60$ .

По формуле (3.39) находим арифметическую середину

$$x_o = \frac{76,835 \times 1,40 + 76,841 \times 0,60 + \dots + 76,837 \times 1,60}{1,40 + 0,60 + \dots + 1,60} = 76,8378 \text{ м}$$

Вычисляем уклонения средних арифметических в сериях от арифметической середины и произведения  $v_i P_i$ . Здесь контролем вычислений является равенство  $[v_i P_i] = 0$ . В примере  $[v_i P_i] = +0,00014$ , что незначительно отличается от нуля. Это вызвано результатом округлений исходных величин.

Образум произведения  $v_i^2 P_i$  и получим их сумму  $[v_i^2 P_i] = 23,784 \cdot 10^{-6}$ .

По формуле (3.44) находим СКП единицы веса (т.е. серии измерений, вес которой принят нами за единицу – серия № 3):  $\mu = 0,0022$  м.

По формуле (3.45) находим СКП арифметической середины:  $M_o = 0,0008$  м.

Таким образом, значение измеренной величины равно:  $(76,8378 \pm 0,0008)$  м.

По формуле (3.41) определим СКП в сериях измерений:

$m_1 = 0,0019$  м;  $m_2 = 0,0028$  м;  $m_3 = \mu = 0,0022$  м;  $m_4 = 0,0020$  м;  $m_5 = 0,0025$  м;  $m_6 = 0,0017$  м.

Таблица 3.5

№№ серий	Среднее арифметическое в серии измерений: $x_{oi}$ , м	Число измерений в серии, $n_i$	Веса измере- ний в серии, $P_i$	Уклонения $v_i = x_{oi} - x_o$	$v_i P_i$	$v_i^2 P_i$ x $10^{-6}$
1	76,835	7	1,40	-0,0028	-0,00390	10,976
2	76,841	3	0,60	+0,0032	+0,00192	6,144
3	76,838	5	1,00	+0,0002	+0,00020	0,040
4	76,839	6	1,20	+0,0012	+0,00144	1,728
5	76,840	4	0,80	+0,0022	+0,00176	3,872
6	76,837	8	1,60	-0,0008	-0,00128	1,024

## Глава 4 ГОСУДАРСТВЕННЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СЕТИ

### § 31. Назначение Государственных геодезических сетей

*Геодезическая сеть* – это система закрепленных на местности точек, положение которых с той или иной степенью точности определено в единой системе координат и высот.

По территориальному признаку геодезические сети подразделяются на глобальные (общеземные), национальные (государственные), сети сгущения и местные сети.

*Глобальная государственная сеть* создается методами космической геодезии по наблюдениям за искусственными спутниками Земли (ИСЗ). Эту сеть используют для решения научных и научно-технических задач высшей геодезии, астрономии, геодинамики (изучение фигуры и внешнего гравитационного поля Земли; уточнение фундаментальных геодезических постоянных; определение движения (прецессии и нутации) полюсов Земли; изучение горизонтальных и вертикальных перемещений литосферных плит земной коры; определение положения референц-эллипсоидов, применяющихся в других странах и др.).

К *национальным геодезическим сетям* относятся: Государственная геодезическая сеть (плановая), Государственная нивелирная сеть (высотная), Государственная гравиметрическая сеть.

*Государственная геодезическая сеть* (ГГС) предусматривает определение взаимного положения геодезических пунктов в плановом отношении на применяемой в стране *поверхности относимости* (поверхности референц-эллипсоида). Высоты плановой сети определяют со сравнительно небольшой точностью.

*Государственная нивелирная сеть* служит для определения высот пунктов относительно поверхности *квазигеоида*. Плановое положение пунктов нивелирной сети на поверхности относимости определяется с невысокой точностью.

В некоторых случаях используют совмещенные пункты. Тогда их плановые и высотные координаты определяют с соответствующей точностью.

*Государственная гравиметрическая сеть* используется для определения ускорений силы тяжести в исходных или заданных пунктах. При этом пункты гравиметрической сети на местности не закрепляются, а необходимые наблюдения выполняют непосредственно на пунктах плановой и высотной сетей.

С помощью Государственных геодезических сетей решают следующие основные задачи:

- детальное изучение фигуры и гравитационного поля Земли в динамике в пределах территории государства (страны);
- создание единой системы координат и высот для всей территории государства;

- картографирование территории государства в единой системе координат и высот с использованием единых принципов проектирования поверхности относимости на плоскость;
- научные и научно-технические проблемы для хозяйства страны и ее обороны.

По методам и специфике построения Государственные геодезические сети указанных выше трех видов строятся отдельно, но они между собой тесно взаимосвязаны, дополняют друг друга, и часто их пункты обобщаются (совмещаются).

*Сети сгущения* создаются на территориях, которые предназначены для хозяйственного освоения: проектируемые, строящиеся и эксплуатируемые предприятия, в том числе и предприятия горной промышленности (шахты, разведываемые месторождения, карьеры, рудники и т.п.).

*Местные геодезические сети* предназначены для решения сложных научных и научно-технических задач на локальных участках местности, либо особых объектах, например, в сейсмоактивных районах для наблюдений за сдвигами земной поверхности и сооружений на ней, при строительстве и эксплуатации гидротехнических сооружений, ускорителей частиц, атомных электростанций, мощных радиотелескопов, телевизионных башен и др.

Дальнейшим развитием сетей сгущения являются *сети съёмочного обоснования*, предназначенные для обеспечения топографических съёмок заданного масштаба. Съёмочные сети создают в виде теодолитных и тахеометрических ходов и их сочетаний, построением *треугольников, геодезических четырехугольников, вставок в угол и центральных систем*.

## § 32. Классы геодезических сетей

Государственная геодезическая плановая и высотная сети делятся соответственно на сети 1, 2, 3 и 4 класса и I, II, III и IV класса. Самым высоким по точности является 1 (I) класс.

В плановой сети классы различаются по точности измерения горизонтальных углов и расстояний, в высотной сети – точностью передачи высоты с пункта на пункт. В табл. 4.1 приведены значения допустимых погрешностей в плановых и высотных сетях, определяемые современными руководствами и инструкциями.

Сети сгущения подразделяются на *аналитические* сети 1-го и 2-го разрядов и *полигонометрические* сети 1-го и 2-го разрядов (табл. 4.2).

Аналитические сети (рис. 4.1) представляют собой цепочки треугольников, либо сплошные сети *триангуляции* и *трилатерации*, а также отдельные точки, получаемые засечками с пунктов государственной сети. Для сети 2-го разряда могут быть использованы и пункты 1-го разряда.

*Полигонометрические сети* представляют собой одиночные ходы, либо системы ходов, проложенных между пунктами высших разрядов или классов. При этом могут быть построены одиночные полигонометрические

Таблица 4.1

Класс сети	Плановая сеть			Высотная сеть	
	Длина стороны, км	Средняя квадратическая погрешность	Относительная погрешность	Средняя квадратическая погрешность передачи высоты на 1 км двойного хода, мм	
		измерения угла, сек.	измерения выходной стороны	случайная	систематическая
1(I)	20 – 25	0,7	1:400000	0,5	0,5
2(II)	7 – 20	1,0	1:300000	$5\sqrt{L}$	-
3(III)	5 – 8	1,5	1:200000	$10\sqrt{L}$	-
4(IV)	2 - 5	2,0	1:200000	$20\sqrt{L}$	-

Таблица 4.2

Характеристика сети	Аналитическая сеть		Полигонометрия	
	1 разряд	2 разряд	1 разряд	2 разряд
Длины сторон, км	0,5 - 5	0,25 - 3	0,12-0,60	
Предельная длина хода, км	-	-	5	3
Углы в треугольниках: - в сплошной сети - в цепочке	Не менее 20° 30°	Не менее 20° 30°	-	-
Средняя квадратическая погрешность измерения горизонтального угла	(5")	(10")	5"	10"
Угловые невязки в треугольниках	20"	40"	-	-
Относительная погрешность измерения сторон	1:50000	1:25000	1:10000	1:5000
Относительная невязка хода	-	-	1:10000	1:5000

ходы, системы полигонометрических ходов с одной или несколькими узловыми точками, системы ходов в виде полигонов и др.

### § 33. Методы построения Государственных геодезических сетей

Основными методами создания плановых геодезических сетей являются методы триангуляции, трилатерации и полигонометрии.

Методы *триангуляции* и *трилатерации* (рис. 4.1 а и б) предусматривают построение на местности цепочки или сети треугольников. В триангуляции в каждом из треугольников измеряют все горизонтальные углы, а в конце их цепи, либо в каком-либо определенном месте сплошной сети – как минимум две стороны, называемые *базисами*. Это позволяет легко вычислить длины других сторон треугольников по известным формулам тригонометрии и геометрии. Часто в цепочках треугольников строят *геодезические четырехугольники* (2-4-5-3) и *центральные системы* (7=5-6-9-10-8). В трилатерации измеряют все стороны треугольников, а углы в их вершинах определяют по теореме косинусов. Цепочки треугольников трилатерации также включают в себя базисные стороны с известной длиной (базисом) и азимутом (дирекци-

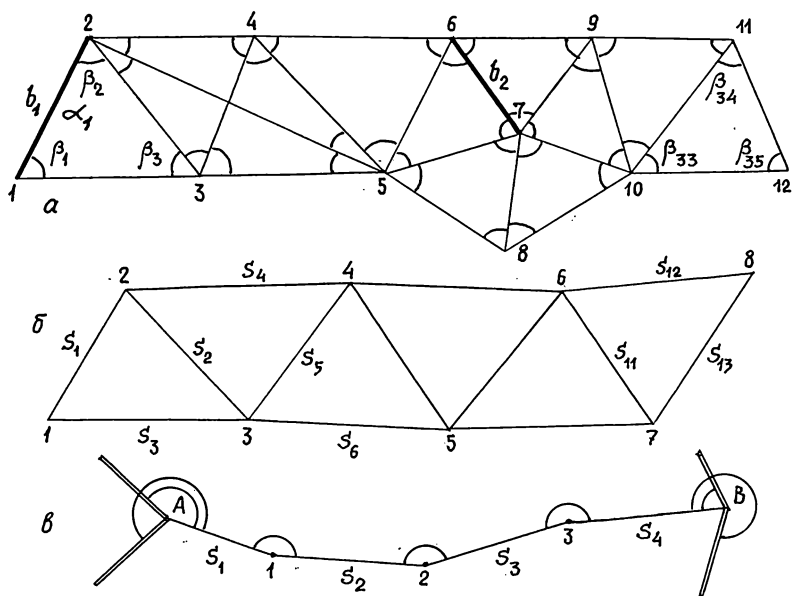


Рис. 4.1. Методы построения геодезических сетей  
а) – метод триангуляции; б) – метод трилатерации; в) метод полигонометрии

онным углом). На рисунке для ряда трилатерации базисные стороны не указаны.

Иногда, для повышения надежности и обеспечения высокой точности оба указанных метода объединяют, т.е. во всех треугольниках измеряют горизонтальные углы и стороны. Такие сети называют *линейно-угловыми*. Элементами сети трилатерации также могут служить не только треугольники, но и *геодезические четырехугольники, центральные системы*. Метод трилатерации используется, в отличие от метода триангуляции, только при построении сетей 3 и 4 классов, поскольку он уступает ему по точности, а также и в технико-экономическом отношении.

Метод *полигонометрии* характеризуется построением на местности систем ломаных линий (ходов), в которых измеряют все линии и горизонтальные углы в точках поворота (рис. 4.1 в). В вершинах, являющихся исходными пунктами высших классов, измеряют т.н. *примычные горизонтальные углы*, которые используются для азимутальной привязки полигонометрического хода.

Сеть триангуляции 1 класса (астрономо-геодезическая сеть) строится в виде рядов треугольников (звена) длиной 200 – 250 км и периметром 800 – 1000 км (рис. 4.2). Базисы в цепочках таких треугольников измеряют с относительной погрешностью не хуже 1:400000. На концах базисов (в *пунктах Лапласа*) выполняют определение широт, долгот и азимутов. Иногда, вместо цепочки треугольников, прокладывают полигонометрический ход 1 класса. При этом в указанном полигонометрическом ходе углы измеряют с погрешностью не более 0,4", а стороны - с относительной погрешностью не более 1:300000.



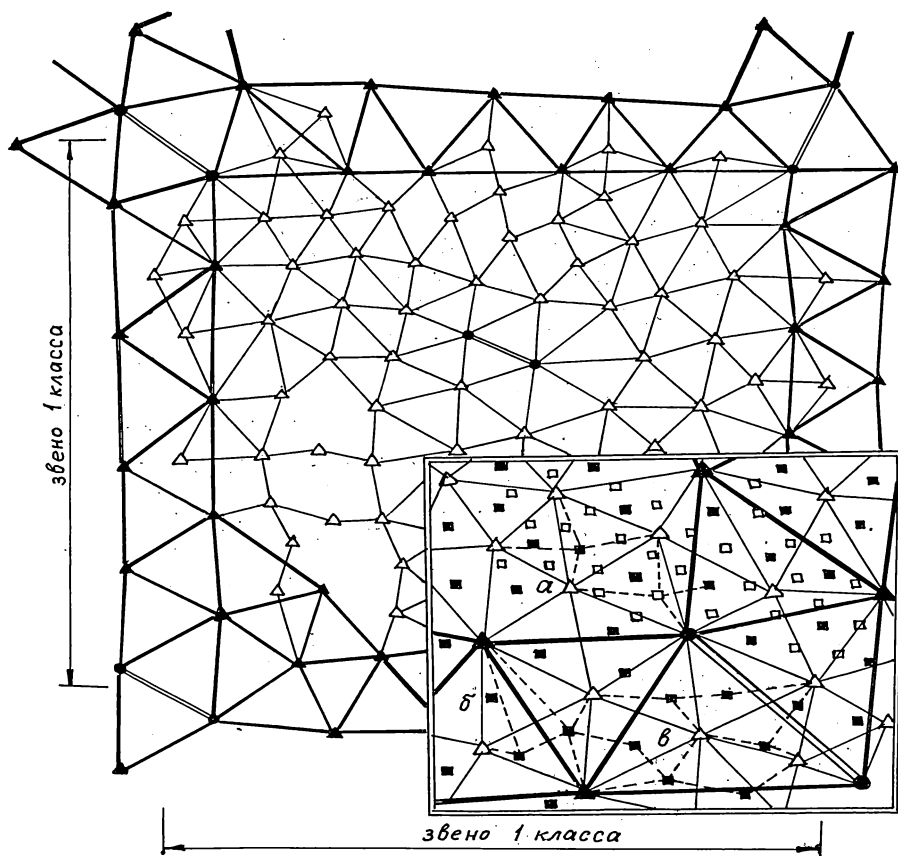


Рис. 4.2. Схема построения Государственной геодезической сети

- - пункты Лапласа;    ▲ - пункты 1 класса;    △ - пункты 2 класса;
- - пункты 3 класса;    □ - пункты 4 класса.

*Пункт Лапласа* – это геодезический пункт, на котором из астрономических наблюдений были определены астрономический азимут и астрономическая долгота. Для астрономических наблюдений используют небесные светила: Солнце и звезды.

Как видно на рис. 4.2, пунктов Лапласа на довольно обширную территорию (порядка 1 млн км<sup>2</sup>) всего несколько – 10 – 12 пунктов.

Геодезическая сеть 2 класса представляет собой сплошную сеть треугольников, либо полигонометрических ходов с узловыми точками, которая полностью заполняет полигоны 1 класса.

Сети 3 и 4 классов могут быть представлены как сплошной сетью треугольников, опирающихся на пункты высших классов, так и могут быть отдельными точками, координаты которых определяются засечками привязкой к пунктам высших классов. При этом для точек 4 класса высшими по классу являются и пункты 3 класса. На схеме рис. 4.2 увеличен фрагмент нижнего правого угла построений, на котором показано примерное размещение пунктов 3 и 4 классов и схемы их возможной привязки к пунктам высших классов.

Построение высотной нивелирной сети заключается в прокладке нивелирных линий. Нивелирная сеть I класса строится в виде замкнутых полигонов и отдельных линий большой протяженности. Сеть II класса опирается на пункты I класса и создается в виде полигонов периметром от 400 до 800 км (до 2000 км), в необжитых районах – до 6 – 7 тыс. км. Периметры полигонов нивелирования III класса имеют длину до 150 км (в северных и северо-восточных районах страны – до 300 км). Периметр полигона IV класса не должен быть более 50 км. Нивелирные линии III и IV классов опираются на пункты I и II классов и могут создаваться в виде отдельных линий или их систем с узловыми точками.

### **§ 34. Закрепление пунктов геодезических сетей**

Пункты плановых геодезических сетей закрепляют на местности путем установки специального центра, который закладывают на глубину, превышающую не менее чем на 0,5 м глубину промерзания грунта, либо не менее чем на 1 м сезонную глубину оттаивания грунта в районах вечной мерзлоты. В верхней части центра армируют марку, на которой имеется метка в виде отверстия диаметром 2 мм. К этой метке и относят координаты пункта. Для различных районов страны и условий закладки центра существуют стандартные типы центров.

Над центром устанавливают сигнал, ось визирного цилиндра 1 которого совпадает по отвесной линии с меткой марки (рис. 4.3).

Весьма важным при постройке и эксплуатации пункта является обеспечение устойчивости самого центра и сигнала. В первом случае устойчивость определяется свойствами грунтов, изменениями его влажности, наличием грунтовых вод, возможными воздействиями человека и природы. Во втором – как особенностями грунтов основания сигнала, так и периодическими воздействиями на него ветровой нагрузки (особенно в моменты наблюдений), нагрева солнечными лучами, воздействия влажности и т.п., что вызывает изгибы, колебания, дрожания и кручение конструкции сигнала. Исследованиями установлено, например, что при воздействии температуры в некоторых случаях кручение сигнала по азимуту в течение рабочего дня может достигать нескольких угловых минут. При точности измерений, например, от 0,7" до 5,0" - это весьма существенная величина.

В геодезических сетях используют различные конструкции знаков: простая пирамида, пирамида со штативом, простой сигнал, сложный сигнал, тур.

*Простые пирамиды и пирамиды со штативом* (рис. 4.3 а) строят в случаях, когда на соседние знаки есть прямая видимость с земли (с переносного штатива). Если прибор необходимо поднять над поверхностью земли на 2-3 м, то строят простую пирамиду с изолированным от нее штативом 2. Наблюдатель перемещается у столика по специальному настилу 3, закрепляемому на столбах пирамиды. Опоры пирамиды закрепляют в грунт к якорю 4.

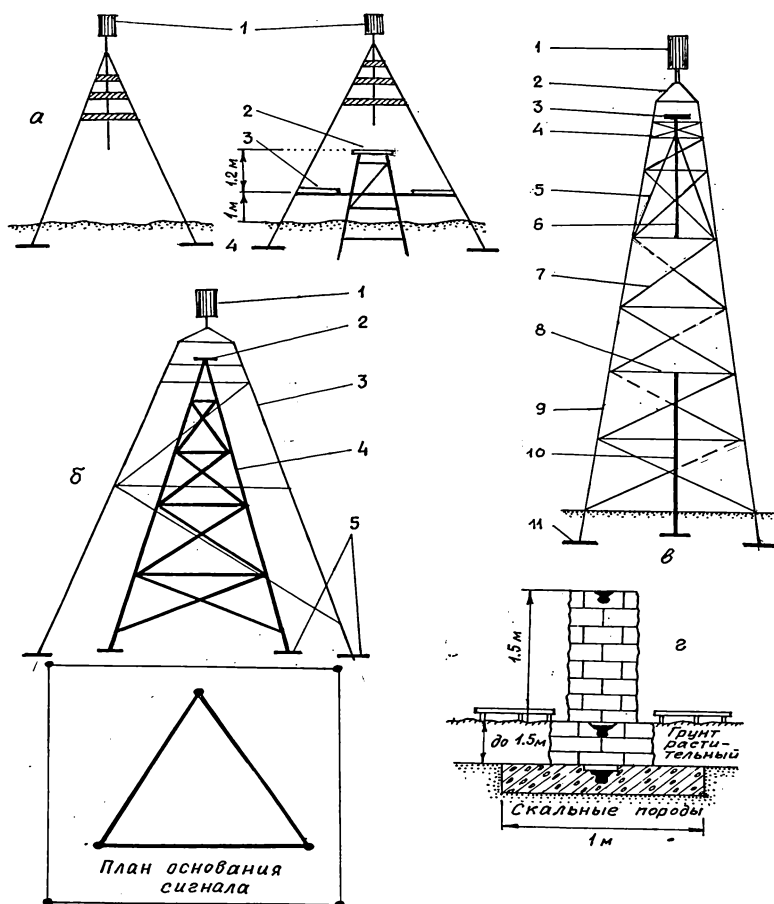


Рис. 4.3. Конструкции сигналов  
 а – простые пирамиды; б – простые сигналы;  
 в – сложные сигналы; г – туры.

*Простые сигналы* (рис. 4.3 б) используют в тех случаях, когда прибор необходимо поднять над землей на высоту от 4 до 10 м. Простой сигнал состоит из двух изолированных сооружений: внешнего 3 и внутреннего 4, имеющего площадку 2 для наблюдателя. Внешняя часть имеет четыре опоры, внутренняя – три опоры, закрепленные якорями 5 в грунте.

Простые сигналы могут быть деревянными и металлическими. Они могут быть также постоянными и разборными. Разборные сигналы перевозят с точки на точку в районах, где нет препятствий для использования транспорта.

*Сложные сигналы* (рис. 4.3 в) имеют значительную высоту. Их строят тогда, когда прибор следует поднять на высоту от 11 до 40 м. Внутренняя пирамида 5 сложного сигнала опирается не на землю, а на конструкцию 9 внешней пирамиды. На внутренней пирамиде находится столик 3 для установки прибора. Наблюдатель находится на специальной площадке 4.

Высота внутренней пирамиды порядка 7 - 7,5 м. Прочность конструкции обеспечивают связи, образованные крестовинами 7, венцами 8, скрепленными с основными столбами 9. Внутренняя пирамида имеет свою стойку 5 с болванкой 6. Фрагмент 2 называется крышей знака. Элемент 10 представляет собой промежуточный столб знака. Опоры внешней пирамиды и промежуточный столб знака закреплены в грунте на якорях 11.

Сложные сигналы в настоящее время изготавливают только трехгранными, что облегчает их полную сборку на земле и установку в рабочее положение уже в полностью собранном виде.

Туры (рис. 4.3 *з*) устанавливают в тех местах, где имеется скальный грунт на глубине не более 1,5 м, а также обеспечивается хорошая видимость по всем необходимым для измерений направлениям. Над туром устанавливают простую пирамиду с визирным цилиндром. Иногда визирный цилиндр закрепляют непосредственно на туре. При измерениях на таких турах визирный цилиндр временно снимают.

Для обустройства пунктов высотной сети используют различные типы марок и реперов (рис. 4.4).

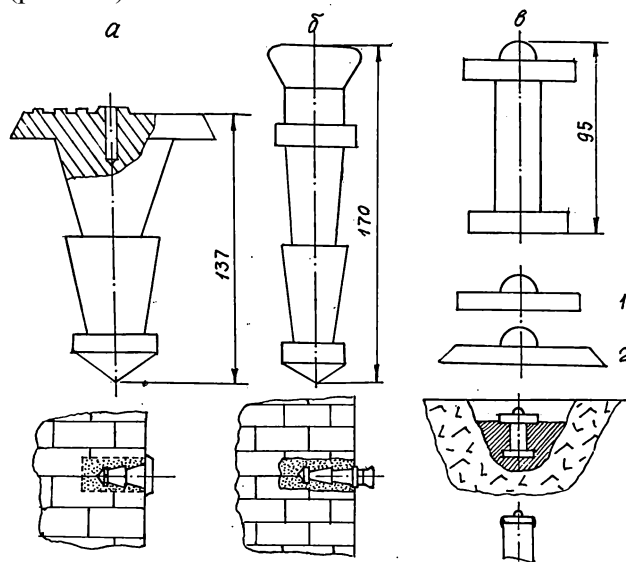


Рис. 4.4. Типы реперов нивелирной сети

*а* – стенная марка; *б* – стенной репер; *з* – марка для бетонных и скальных реперов;  
1 и 2 – марки для установки на трубчатых реперах

На дисках марок или реперов помещают надпись, содержащую в себе аббревиатуру организации и номер данного репера.

В центре стенной марки (рис. 39 *а*) имеется глухое отверстие диаметром 4 мм. В это отверстие устанавливают на специальном штифте подвесную нивелирную рейку. В некоторых случаях к указанному отверстию могут быть отнесены плановые координаты, т.е. высотный знак может быть совмещен и с плановым. Способы закрепления знаков показаны на рисунке под каждым

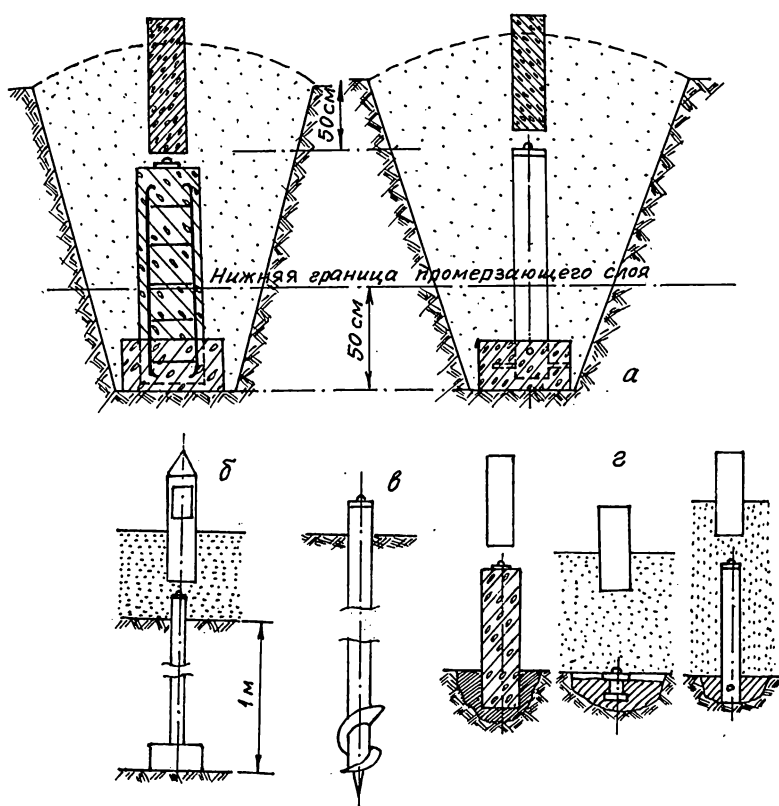


Рис. 4.5. Конструкции грунтовых реперов

*а* – для районов с сезонным промерзанием грунта; *б* – для районов вечной мерзлоты; *в* – для районов сыпучих песков; *г* – для скальных грунтов

видом. На позициях 1 и 2 указаны марки в виде дисков. Такие марки устанавливают на трубчатых реперах (штангах).

Закладка пунктов высотной сети (реперов) должна обеспечивать их устойчивость по высоте, в связи с чем хвостовик репера должен находиться ниже глубины промерзания и оттаивания грунта в устойчивых к проседанию породах. Основные конструкции реперов приведены на рис. 4.5. В районах сезонного промерзания грунтов хвостовик репера должен быть установлен ниже глубины промерзания не менее чем на 50 см. При установке основания репера в котлованах дно котлована зачищают вручную с таким расчетом, чтобы не нарушать естественное состояние грунта. В районах вечной мерзлоты хвостовик репера должен быть установлен на глубине, превышающей на 1 м глубину сезонного оттаивания грунта. В тех случаях, когда головка репера, несущая марку, находится ниже уровня земли, то над ней, в насыпном грунте, устанавливают опознавательный столб сечением 12х12 см и длиной 80 см. Он может быть бетонным или деревянным. На столбе наносят информацию об организации и номер репера.

Знаки Государственной геодезической сети охраняются государством.

## § 35. Оценка точности построения опорных геодезических сетей

При сгущении геодезических и маркшейдерских сетей на поверхности с целью построения опорных точек вблизи района работ часто выполняют построения, представляющие собой ряды треугольников триангуляции или трилатерации с базисом и азимутом (дирекционным углом) одной стороны (рис. 4.6 а), либо с базисными сторонами и азимутом (дирекционным углом) на концах (рис. 4.6 б), а также системы полигонометрических ходов, чаще имеющих вытянутую форму (рис. 4.5 б). Т.е. сгущение Государственных геодезических сетей высоких классов выполняется теми же методами, которые используются и при построении самих исходных сетей. При выполнении указанных работ необходимо выполнять оценку точности построения тех или иных сетей с учетом метода их построения. Эти вопросы и будут рассмотрены далее в § 36 - § 38.

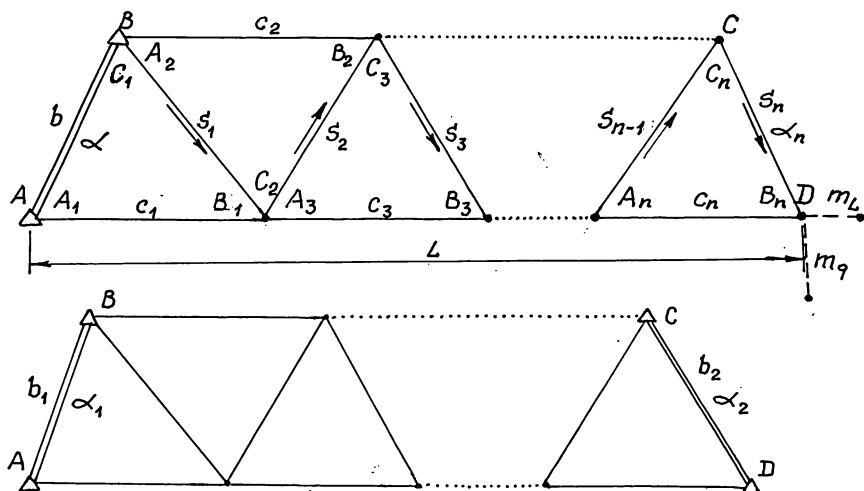


Рис. 4.6. Ряды треугольников триангуляции и трилатерации.

а) с базисом и азимутом на двух его концах;

б) с базисом и азимутом на одном его конце.

Для анализа точности построения опорных геодезических плановых сетей введем общие обозначения в соответствии с рис. 4.6:

- $b$  – базис (исходная сторона сети высшего класса);
- $s$  – связующие стороны треугольников;
- $c$  – промежуточные стороны треугольников;
- $A$  и  $B$  – связующие углы;
- $C$  – промежуточные углы;
- $L$  – длина диагонали ряда;
- $n$  – число промежуточных сторон в диагонали ряда, отсчитываемых по одному его краю;
- $N$  – число треугольников в ряде;
- *средние квадратические погрешности:*

- -  $\mu''$  - измерения направлений;
- -  $m''$  - измерения углов ( $m'' = \mu'' \sqrt{2}$ );
- -  $m_{\alpha k}''$  - азимута связующей стороны треугольника  $k$ ;
- -  $m_{sk}$  - связующей стороны треугольника  $k$ ;
- -  $m_L$  - продольный сдвиг ряда;
- -  $m_q$  - поперечный сдвиг ряда;
- -  $M$  - положение конечной точки ряда относительно начала;
- -  $m_{\alpha L}''$  - азимута диагонали ряда.

При оценках точности построения рядов триангуляции, трилатерации, полигонометрии обычно принимают, что погрешности исходных данных (базиса и азимута исходных сторон) равны нулю. В некоторых случаях этим пренебрегать нельзя, и указанные погрешности учитывают при оценках точности. В последующих параграфах этой главы будут даны расчетные формулы без учета погрешностей исходных данных.

### § 36. Оценка точности построения сетей триангуляции

Рассмотрим два случая построения сетей триангуляции: ряд треугольников с одним базисом на его конце и азимутом (рис. 4.6 а) и ряд треугольников с базисами и азимутами на его концах (рис. 4.6 б).

**Ряд треугольников с одним базисом и азимутом на его конце.**

*Средняя квадратическая погрешность длины связующей стороны ряда триангуляции.*

Формула для относительной погрешности связующей стороны имеет вид:

$$\sigma_{sk}^2 = \frac{m_s^2}{s_k^2} + \frac{m_{\alpha k}^2}{s_k^2} + \frac{m_{sk}^2}{s_k^2} + \frac{m_{\alpha L}^2}{s_k^2} + \frac{m_L^2}{s_k^2} + \frac{m_q^2}{s_k^2} + \frac{m^2}{s_k^2} + \frac{m_{\alpha k}^2}{s_k^2} + \frac{m_{sk}^2}{s_k^2} + \frac{m_{\alpha L}^2}{s_k^2} + \frac{m_L^2}{s_k^2} + \frac{m_q^2}{s_k^2} + \frac{m^2}{s_k^2} \quad (4.1)$$

где  $\rho'' = 20626''$ .

Из (4.1) получим, что

$$m_{sk} = \delta_{sk} s_k. \quad (4.2)$$

Для оценки точности длин линий обычно используют относительную погрешность.

Если углы в треугольниках примерно равные ( $\approx 60^\circ$ ), то формула (4.1) для оценки точности упрощается

$$\delta_{sk} = \frac{m''}{\rho''} \sqrt{\frac{2}{3}} k. \quad (4.3)$$

*Средняя квадратическая погрешность азимута связующей стороны ряда.*

В зависимости от способа уравнивания (глава 16) углов в треугольниках для оценки вероятной погрешности азимута связующей стороны используются разные формулы:

- при уравнивании за условие фигур:

$$m_{ak} = m'' \sqrt{\frac{2}{3} k}; \quad (4.4)$$

- при уравнивании за условие направлений:

$$m_{ak} = m'' \sqrt{\frac{2k+5}{10}}. \quad (4.5)$$

*Продольный и поперечный сдвиги ряда триангуляции.*

Оценка продольного сдвига ряда производится для равносторонних треугольников при уравнивании в них углов любым способом. Для указанной оценки используют формулу:

$$m_L = L \frac{m''}{\rho''} \sqrt{\frac{4n^2 \pm 3n + 5}{9n}}. \quad (4.6)$$

В формуле (4.6) знак «плюс» при  $3n$  берется при четном  $N$  (числе треугольников), знак «минус» - при нечетном.

Поперечный сдвиг ряда равносторонних треугольников определяется при четном числе  $N$  треугольников в ряде по формуле

$$m_q = L \frac{m''}{\rho''} \sqrt{\frac{2n^2 + 5n + 5}{n}}, \quad (4.7)$$

а при нечетном – по формуле

$$m_q = L \frac{m''}{\rho''} \sqrt{\frac{n^2 + n + 3}{15n}}, \quad (4.8)$$

*Относительная погрешность диагонали ряда определяется по формуле*

$$\delta_L = \frac{m_L}{L}, \quad (4.9)$$

*средняя квадратическая погрешность азимута диагонали ряда – по формуле*

$$m_{aL}'' = \frac{m_q}{L} \rho''. \quad (4.10)$$

*Погрешность положения конечной точки ряда относительно его начала:*

$$M = \sqrt{m_q^2 + m_L^2}. \quad (4.11)$$

***Ряд треугольников с двумя базисами и азимутами на его концах.***

В данном ряду триангуляции менее надежно определяется длина стороны и ее азимут, находящейся в середине ряда. В связи с этим приводимые ниже формулы дают наибольшие значения при  $n = k = 0,5N$  и меньшие значения для треугольников, близких к базисным сторонам.

*Средняя квадратическая погрешность связующей стороны ряда*

$$\delta_{sk} = \frac{m_{sk}}{s_k} = \frac{m_{igs}}{434300}, \quad (4.12)$$

где



$$m_{\lg s} \approx 1,78 m'' \sqrt{\frac{(N-k)k}{N}} \quad (4.13)$$

в логарифмической форме.

*Средняя квадратическая погрешность азимута связующей стороны равна*

$$m_{\alpha k} = m'' \sqrt{\frac{1}{25} \left( 5k + 12 - \frac{(5k+6)^2}{5N+12} \right)}. \quad (4.14)$$

Для оценки *продольного и поперечного сдвига* используются формулы:

$$m_L = \frac{m'' L}{\rho'' \sqrt{2}} \sqrt{\frac{2n^2 - 3n + 10}{9n}}; \quad (4.15)$$

$$m_q = \frac{m'' L}{\rho'' \sqrt{2}} \sqrt{\frac{n^2 + 2n + 12}{15n}}. \quad (4.16)$$

Значения  $\delta_L$ ,  $m_{\alpha k}$  и  $M$  вычисляют соответственно по формулам (4.9), (4.10), (4.11).

В *сплошной сети триангуляции* точность определения дирекционных углов и длин сторон, удаленных от границы сети не менее чем на 4-5 треугольников, примерно одинаковая во всех частях сети. При решении задачи сгущения геодезических и маркшейдерских сетей такие построения встречаются в исключительных случаях, при весьма небольшом числе исходных пунктов, расположенных на больших расстояниях друг от друга.

В сплошных сетях триангуляции *погрешность дирекционного угла* оценивают по формуле

$$m_{\alpha} \approx 0,16 m'' \sqrt{N - 6,5 + 48 t_{(N/2)}}, \quad (4.17)$$

а *погрешность в логарифме стороны* (в шестом знаке) – по формуле

$$m_{\lg s} \approx 0,35 m'' \sqrt{N - 6,5 + 48 t_{(N/2)}}, \quad (4.18)$$

$$\text{где } t_{(N/2)} = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{N}{4}} - \left( \frac{1}{2} \right)^{\left( \frac{N}{2} + 1 \right)}.$$

*Среднюю квадратическую погрешность направлений  $m_T$*  получают по формуле

$$m_T'' = m'' \sqrt{\frac{n^2 - 3n + 50}{45n} - \frac{n^2 - 5n + 80}{70N}}. \quad (4.19)$$

*Продольный и поперечный сдвиг* концов диагоналей, соединяющих пункты, разделенные  $n$  треугольниками, примерно равны друг другу:

$$m_L \approx m_q \approx m_T'' \frac{L}{\rho''}. \quad (4.20)$$

Следует иметь ввиду, что приведенные формулы оценки точности построения рядов триангуляции и геодезических сетей триангуляции, как и формулы других геодезических построений, дают предварительные величины, по которым принимаются решения о методике выполнения работ. При практическом выполнении фактические значения погрешностей элементов построений могут отличаться в ту или другую сторону.

Рассмотрим примеры оценки точности построения рядов триангуляции при равносторонних треугольниках, уравненных за условие фигур, и построения сплошной сети триангуляции.

**Пример 4.1.** Оценка точности построения ряда треугольников триангуляции с базисом и азимутом на одном его конце.

Исходные данные:  $L = 15$  км;  $s = 3$  км;  $N = 9$ ;  $k = 9$ ;  $n = 5$ ;  $m'' = 2,0''$ .

**Решение.** См. табл. 4.3.

Таблица 4.3

№ № п/п	Наименование величины	оцениваемой	Расчетная формула	Значение погрешности
1	СКП стороны треугольника $k$ : - относительная; - абсолютная		(4.3) (4.2)	1:41900 0,072 м
2	СКП азимута связующей стороны треугольника $k$		(4.4)	4,9"
3	Продольный сдвиг ряда		(4.6)	0,206 м
4	Поперечный сдвиг ряда		(4.8)	0,096 м
5	Относительная погрешность длины диагонали ряда		(4.9)	1:72800
6	СКП азимута диагонали ряда		(4.10)	1,3"
7	СКП конечной точки ряда		(4.11)	0,227 м

**Пример 4.2.** Оценка точности построения сплошной сети триангуляции.

Исходные данные:  $N = 20$ ;  $n = 5$ ;  $m'' = 2,0''$ ;  $s = 2$  км.

**Решение.** См. табл. 4.4.

Таблица 4.4

№№ п/ п	Наименование оцениваемой величины	Расчетная формула	Значение погрешности
1	Значение параметра $t_{(N/2)}$	(4.18)- ссылка	0,031
2	СКП логарифма стороны - абсолютная; - относительная	(4.18) из (4.2)	2,7 1:160850
3	СКП дирекционного угла	(4.17)	1,2"
4	Продольный и поперечный сдвиги ряда	(4.20)	0,044 м
5	СКП направления	(4.19)	0,9"

### § 37. Оценка точности построения звена полигонометрии

Все формулы, приводимые ниже, предусматривают построение вытянутого полигонометрического хода с базисами на его концах (рис. 4.5 б). При этом ход уравнен за условие дирекционных углов (гл. 16).

Для оценки *средней квадратической погрешности азимута стороны* звена с номером  $k$  используется формула

$$m_{ak} = m'' \sqrt{\frac{k(n+1-k)}{n+1}}. \quad (4.21)$$

Очевидно, что при обязательном наличии исходных сторон в начале и конце звена полигонометрического хода наиболее слабой по точности определения координат будет средняя (центральная) точка хода с номером  $n/2$  в предположении, что длины сторон и углы измерены равноточно. Практически, при оценках, можно полагать, что наиболее слабая точка находится в середине длины хода на расстоянии  $L/2$  от его концов.

*Средняя квадратическая погрешность стороны* полигонометрического хода, измеренной на местности, зависит от точности используемого светодальномера (гл. 6). При оценке точности можно принимать, что  $m_c \approx s \cdot 10^{-6}$ .

*Продольный и поперечный сдвиги* конечной точки звена относительно начальной равны:

$$m_L = \sqrt{m_s^2 n + m_c^2 n^2}; \quad (4.22)$$

$$m_q = L \frac{m''}{\rho''} \sqrt{\frac{n+3}{12}}. \quad (4.23)$$

Если полигонометрический ход значительно изогнут, то ожидаемая линейная погрешность в определении координат любой его точки может быть оценена по формуле

$$M = \sqrt{m_s^2 n + \frac{m''}{\rho''} \sum_{i=0}^i D_i^2}. \quad (4.24)$$

где  $D_i$  – расстояния от каждой вершины до центра тяжести изогнутого хода.

**Пример 4.3.** Оценка точности построения звена полигонометрии.

Исходные данные:  $L = 6$  км;  $s = 600$  м;  $n = 10$ ;  $k = 5$ ;  $m'' = 2,0''$ ;  $\frac{m_s}{s} = 1:50000$  ( $m_s = 0,012$  м);  $m_c = s \cdot 10^{-6} = 0,001$  м.

**Решение.** См. табл. 4.5.

Таблица 4.5

№№ п/п	Наименование оцениваемой величины	Расчетная формула	Значение погрешности
1	СКП стороны: - относительная, - абсолютная	исх. данные	1:50000
		исх. данные	0,012 м
2	СКП азимута стороны $k$	(4.21)	3,3"
3	Продольный сдвиг ряда	(4.22)	0,039 м
4	Поперечный сдвиг ряда	(4.23)	0,061 м
5	Относительная погрешность длины диагонали ряда	(4.9)	1:153850
6	СКП азимута диагонали ряда	(4.10)	2,1"
7	СКП конечной точки ряда	(4.11)	0,072 м

### § 38. Оценка точности построения сетей трилатерации

Использование метода трилатерации при сгущении геодезических и маркшейдерских сетей в настоящее время стало возможным благодаря появлению на рынке геодезических приборов точных и высокоточных светодальномеров, а также электронных тахеометров. При использовании светодальномеров измеряют только длины сторон сетей, а при использовании электронных тахеометров реализуется как измерение длин сторон, так и измерение углов. Такие сети относятся к *линейно-угловым сетям* (построениям).

Оценка точности рядов и сетей трилатерации основана на погрешностях вычисления углов в треугольниках через погрешности измеренных его сторон.

Для **ряда трилатерации** средняя квадратическая погрешность азимута связующей стороны

$$m_{\alpha k} = \frac{m_s}{s} \rho'' \sqrt{\frac{4}{3} \times \frac{N-k}{N} k}, \quad (4.25)$$

продольный сдвиг ряда

$$m_L = \frac{m_s}{2} \sqrt{\frac{N^2 - 1}{N}}, \quad (4.26)$$

поперечный сдвиг ряда

$$m_q = \frac{m_s}{6} \sqrt{(N-1)(N^2 + N + 48)}. \quad (4.27)$$

Для **сплошной сети трилатерации** продольный сдвиг диагонали ряда, соединяющей пункты, разделенные рядом треугольников, оценивается по формуле

$$m_L = m_s \sqrt{\frac{(N+15)(k+11)}{10(N+25)}}, \quad (4.28)$$

поперечный сдвиг – по формуле

$$m_q = m_s \sqrt{\frac{(N+15)(5k^2 + 12k + 8)}{30(N+25)}}. \quad (4.29)$$

**Пример 4.4.** Оценка точности построения ряда трилатерации.

Исходные данные:  $N = 10$ ;  $k = 5$ ;  $s = 2,0$  км;  $m_s = 0,005$  м;  $L = 20$  км.

**Решение.** См. табл. 4.6.

Таблица 4.6

№ №	Наименование величины	оцениваемой	Расчетная формула	Значение погрешности
1	СКП стороны: - относительная; - абсолютная		исх. данные исх. данные	1:400000 0,005 м
2	СКП азимута стороны $k$		(4.25)	0,9"
3	Продольный сдвиг ряда		(4.28)	0,008 м
4	Поперечный сдвиг ряда		(4.29)	0,031 м
5	Относительная погрешность		(4.9)	1:153850

	длины диагонали ряда		
6	СКП азимута диагонали ряда	(4.10)	0,6"
7	СКП конечной точки ряда	(4.11)	0,032 м
8	СКП вычисленных углов в треугольниках: $m_{\beta}$		0,6"

## Глава 5 ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

В этой главе будут рассмотрены только общие схемы основных геодезических приборов: *теодолитов* (приборов для измерения углов); *нивелиров* (приборов для измерения превышений, служащих для передачи высот с точки на точку); *дальномеров* (приборов для измерения расстояний). Это связано с тем, что в настоящее время существует весьма большое количество различных геодезических приборов, отличающихся друг от друга не только точностью измерений, но и существенными конструктивными особенностями. Общая же схема построения и основной принцип работы практически сохраняются во всех названных выше приборах.

### § 39. Классификация геодезических приборов

Классификация геодезических приборов, в соответствии со стандартом на них, производится по назначению и по точности.

По назначению в настоящее время существует семь групп приборов:

- для измерения горизонтальных углов и углов наклона – теодолиты;
- для измерения превышений – нивелиры;
- для измерения расстояний – дальномеры;
- для производства планово-высотных топографических съемок – тахеометры;
- для производства планово-высотных топографических съемок (углона-чертательный способ) - кипрегели;
- комплектующие принадлежности (рейки, штативы, оптические центриры, механические центриры, буссоли, и др.);
- вспомогательные приборы и принадлежности (эккеры, планиметры, транспортиры, тахеографы, координатометры, масштабные линейки и др.).

По точности классифицируют только теодолиты, нивелиры и дальномеры. Они делятся на высокоточные, точные, повышенной точности, средней точности и технические.

*Высокоточные приборы* используют при измерениях в плановых геодезических сетях 1 и 2 классов и в нивелирных сетях I и II классов, а также при выполнении инженерно-геодезических работ высокой точности при решении специальных инженерных задач, например, при наблюдениях за деформациями сооружений и земной поверхности, при выверке установки прецизионного оборудования на промышленных предприятиях и уникальных объектах и т.п.

*Точные приборы* используются для сгущения главной геодезической основы (при построении сетей сгущения), а также для производства значительного объема инженерных работ при строительстве инженерных сооружений.

*Приборы повышенной точности* используют как при геодезических работах по созданию сетей сгущения, так и при решении ряда научных, технических и научно-технических задач, связанных, в основном, со строительством и эксплуатацией инженерных сооружений.

*Приборы средней точности* применяют при производстве работ технической точности при создании для них сетей сгущения в виде теодолитных ходов, при горизонтальной съемке ответственных точек местности и др.

*Технические приборы* применяются в основном для топографических съемок различных масштабов при создании сетей съемочного обоснования, выполнении отдельных и массовых привязок точек местности в принятой системе координат.

Любая из поставленных геодезических задач характеризуется, в первую очередь, необходимой точностью измерений и точностью получения конечного результата. Этим и определяется выбор для работы прибора соответствующего класса точности.

Надежность и достоверность получаемых при измерениях результатов обеспечивается правильной работой прибора. В связи с этим рабочие средства измерений подвергаются т.н. метрологическому надзору, который заключается в аттестации используемых средств измерений через систему испытаний и поверок. До выполнения работ каждый геодезический прибор должен быть поверен и юстирован.

*Поверка* – установление соответствия конструктивных геометрических соотношений в приборе, обеспечивающих качественную его работу.

*Юстировка* – устранение несоответствия геометрических соотношений в конструкции прибора, которые могут повлиять на его качественную работу. Т.е. юстировка выполняется только тогда, когда в результате поверки будут выявлены недопустимые отклонения в геометрическом положении узлов и деталей прибора.

Об основных поверках геодезических приборов будет рассказано ниже.

## **§ 40. Теодолиты**

Теодолит служит для измерения горизонтальных и вертикальных углов.

В обозначение отечественных теодолитов входит буква Т и число, указывающее среднюю квадратическую погрешность измерения горизонтального угла одним полным приемом в лабораторных условиях.

В табл. 5.1 приведены данные о величине средней квадратической погрешности измерения горизонтального угла в принятых стандартом классах точности приборов, а также марки отечественных теодолитов, относящихся к указанным классам точности.

Различные модификации теодолитов в приведенных классах точности отражаются в их обозначении дополнительными цифрами впереди основного обозначения и буквами – после основного обозначения. В настоящее время для теодолитов используют следующие буквы: А – теодолит снабжен автоколлимационным окуляром (т.е. им можно работать на отражение направленного к объекту оптической системой прибора светового пучка); К – конструкция с компенсатором угла наклона при вертикальном круге; П – установлена зрительная труба прямого изображения (земная труба); М – теодолит в маркшейдерском исполнении. Например, Т5К, 2Т5К, 3Т2КП, Т30М, 3Т2КА и т.п.

Таблица 5.1

Класс точности прибора	Средняя квадратическая погрешность измерения горизонтального угла, сек	Марки теодолитов
Высокоточные	0,5" – 1,0"	Т05, Т1
Точные	2,0" – 4,0"	Т2, 2Т2, 3Т2КП
Повышенной точности	5,0" – 10,0"	Т5, Т5К, 2Т5КП, 2Т5А
Средней точности	15,0" – 20,0"	Т15, Т15К, Т15М, Т15МКП
Технические	30,0" – 60,0"	Т30, 2Т30П, Т30М

Рассмотрим схему измерения горизонтальных углов и углов наклона, представленную на рис. 5.1.

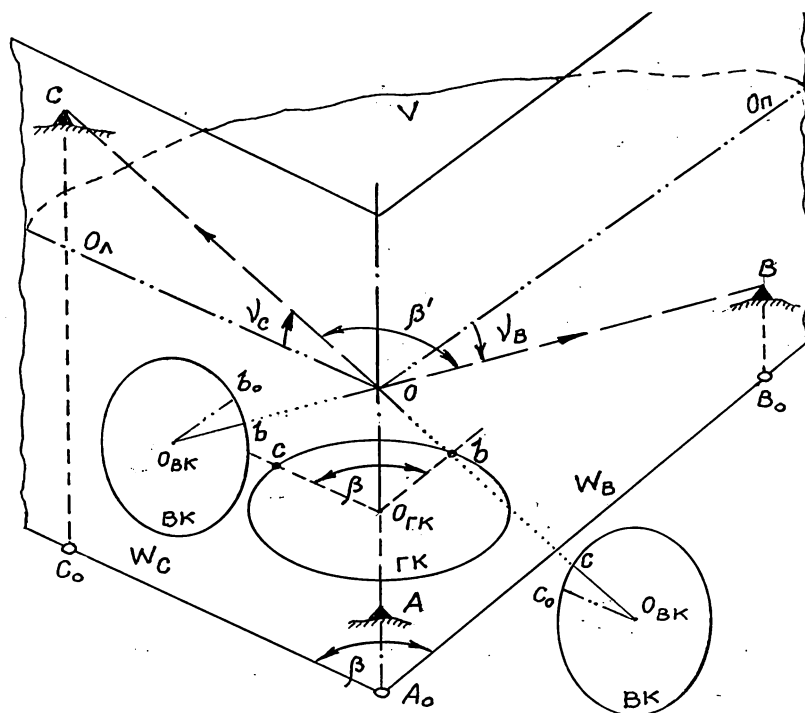


Рис. 5.1. Схема измерения горизонтального угла и угла наклона

Пусть на местности имеются точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , расположенные друг относительно друга на разных высотах. Выберем вершиной измеряемых углов точку  $A$ . Построим в этой точке вертикальные плоскости  $W_B$  и  $W_C$ , в которых лежат направления из точки  $A$  соответственно на точки  $B$  и  $C$ . Выберем произвольно на вертикальной линии пересечения плоскостей  $W$  точку  $O$  и построим в ней плоскость  $V$ , перпендикулярную плоскостям  $W_B$  и  $W_C$ . В этой плоскости будут лежать направления  $OO_{\text{л}}$  и  $OO_{\text{п}}$ , а в плоскости, параллельной плоскости  $V$ , находятся проекции точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  ( $A_o$ ,  $B_o$ ,  $C_o$ ).

Линии визирования  $OB$  и  $OC$  образуют в пространстве угол  $\beta'$ . Проекция этого угла на плоскость  $V$  образует угол  $\beta$ , который называется *горизонтальным углом*.

Если в т.  $A$  поместить плоский круг (горизонтальный круг – ГК) с градусными делениями и расположить его плоскость в горизонтальной плоскости  $V$ , то на каждое из направлений ( $A_oB_o$  и  $A_oC_o$ ) можно взять отсчеты  $b$  и  $c$ . Разность этих отсчетов и определит величину горизонтального угла

$$\beta = b - c \quad (5.1)$$

При оцифровке горизонтального круга по часовой стрелке, как это и исполняют в теодолитах, разность (5.1) дает значение угла  $\beta$ , показанного на рисунке. Если же взять разность  $(c - b)$ , то полученное значение горизонтального угла будет отличаться от угла  $\beta$  на  $360^\circ$ .

*Вертикальный угол* в общем случае – это угол в вертикальной плоскости между двумя направлениями. Если одно из направлений совпадает с горизонтальной плоскостью, то такой угол  $\nu$  называется (*углом наклона*).

Угол наклона указывают со знаком «плюс» или «минус» (кроме  $\nu = 0^\circ$ ).

Если в точке  $A$  поместить вертикальный круг (ВК) с градусными делениями и совместить его плоскость, например, с вертикальной плоскостью  $W_C$ , то направлению линии  $AC$ , параллельной горизонтальной плоскости  $V$ , будет соответствовать отсчет  $c_o$  по вертикальному кругу, а направлению на точку  $C$  – отсчет  $c$ . Аналогичные рассуждения можно провести и в отношении точки  $B$ . Если оцифровка вертикального круга в плоскости  $W_C$  со стороны читателя выполнена по часовой стрелке, то значение угла наклона легко найдется из разности

$$\nu_C = c - c_o; \quad \nu_B = b - b_o \quad (5.2)$$

Таким образом, как горизонтальный угол  $\beta$ , так и угол наклона  $\nu$ , вычисляют как разность отсчетов, полученных по двум направлениям, взятых по оцифрованным кругам, плоскости которых параллельны соответственно горизонтальной и вертикальной плоскостям местности. Для угла наклона один из отсчетов всегда должен определять положение горизонтальной плоскости в точке стояния, проходящей через центр вертикального круга.

Отсчеты  $c_o$  и  $b_o$  называют *местом нуля (МО)* вертикального круга. Подробнее об этом будет сказано в § 45.



С учетом сказанного выше, теодолит должен обеспечивать выполнение определенных условий: он должен содержать в конструкции два оцифрованных круга, плоскости которых должны надежно устанавливаться специальными приспособлениями и приемами параллельно (ГК) и перпендикулярно (ВК) к плоскости горизонта.

На рис. 5.2 представлена схема теодолита с его основными осями, взаимосвязь которых определяет условия измерений углов.

Ось 1-1 называется *осью вращения теодолита*. При измерениях она должна располагаться по направлению отвесной линии в точке стояния, т.е.

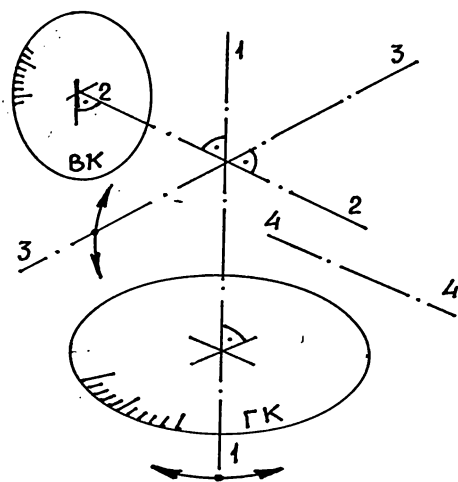


Рис. 5.2. Схема теодолита

перпендикулярно горизонтальной плоскости. Для придания этой оси отвесного положения служит специальный установочный элемент (*уровень* – см. § 42), ось 4-4 которого должна быть перпендикулярна оси 1-1. Плоскость горизонтального круга (ГК) должна быть перпендикулярна оси 1-1, а также и параллельна оси уровня 4-4. (Заводы-изготовители геодезических приборов гарантируют перпендикулярность оси вращения теодолита к плоскости горизонтального круга).

Ось 2-2 называется *осью вращения зрительной трубы* (о зрительной трубе см. § 41). Оси 2-2 и 1-1 должны быть взаимно перпендикулярны, кроме того, ось 2-2 должна быть перпендикулярна плоскости вертикального круга.

*Визирная ось 3-3* зрительной трубы может перемещаться в вертикальной плоскости (вверх-вниз) относительно оси 2-2. Оси 2-2 и 3-3 должны быть перпендикулярны.

## § 41. Зрительные трубы

*Зрительная труба* служит для наблюдения удаленных объектов. При этом она дает возможность четко видеть сам объект и прицельную точку прибора.

Существуют зрительные трубы с обратным изображением (*астрономические*) и прямым изображением (*земные*). Основными конструктивными элементами зрительных труб являются (рис. 5.3) *объектив* 1, в который входит *фокусирующая линза* 2, имеющая возможность поступательного перемещения вдоль оптической оси трубы, *сетка нитей* 3, *окуляр* 4. В земных трубах перед сеткой нитей устанавливают призмennую оборачивающую систему.

*Оптическая ось*  $O_1O_4$  зрительной трубы определяется положением центра объектива  $O_1$  и центром окуляра  $O_4$ . *Визирная ось*  $O_1O_3$  зрительной трубы проходит через центр объектива  $O_1$  и центр сетки нитей  $O_3$ . *Геометрическая ось* – это линия, на которой находятся центры всех оптических элементов.

*Сетка нитей* представляет собой тонкий стеклянный диск с нанесенными на него горизонтальной и вертикальной нитями. Часто половину вертикального штриха выполняют в виде *биссектора* (двойной линии). Сетки ни-

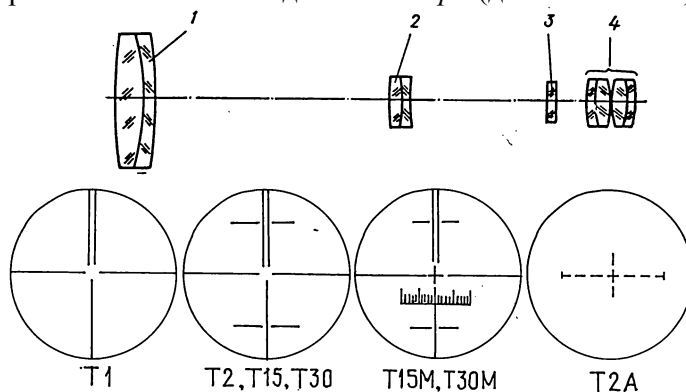


Рис. 5.3. Зрительная труба теодолита Т30

тей имеют дополнительные короткие штрихи, т.н. *дальномерные нити*, служащие совместно с рейкой с сантиметровыми делениями для измерения расстояний (*нитяной дальномер*). На рисунке приведены виды сеток нитей некоторых теодолитов.

В первых теодолитах сетка нитей представляла собой латунное кольцо с нанесенными на него диаметрально противоположными рисками, в которые укладывалась с некоторым натяжением нитка паутины. При порче сетки нитей геодезист восстанавливал ее нити, для чего в наборе инструментов и приспособлений у него имелся кокон паутины. Если этого не было, то он мог воспользоваться таким же материалом, отыскав необходимую паутину в природе, что не является сложным. Отсюда и сохранилось название – нити. В специальной лаборатории Московского межевого института (МИИГАиК, сейчас – Московский государственный университет геодезии и картографии) разводили особый вид пауков, а их паутину (только весеннюю) собирали в коконы и снабжали геодезические инструменты своеобразным ЗИПом.

Впервые предложил использовать сетку нитей в зрительной трубе в 1611 г. *Иоганн Кеплер* (Германия), но только в 1670 г. французским астрономом *Пикаром* выполнялись работы по градусным измерениям с применением сетки нитей вместо диоптров. Дальномерные нити в зрительных трубах стали использоваться только с 1810 г. по предложению немецкого оптика-механика *Рейхенбаха*.

Объектив 1 с помощью фокусирующей линзы 2 строит изображение в плоскости сетки нитей 3. Окуляр 4 может поступательно перемещаться вдоль оптической оси, что позволяет наблюдателю получить четкое изображение совмещенных предмета и сетки нитей с учетом остроты его зрения.

Элементы 1, 2, 3, конструктивно расположены в герметичном корпусе, что обеспечивает защиту оптических и механических деталей зрительной трубы от попадания пыли и влаги.

Важнейшими характеристиками зрительных труб являются ее увеличение, поле зрения, разрешающая способность и светопропускание.

*Увеличение*  $\Gamma^x$  зрительной трубы определяется величинами фокусных расстояний объектива и окуляра:

$$\Gamma^x = f_{об} / f_{ок} \quad (5.3)$$

Зрительные трубы технических приборов и приборов средней точности имеют увеличение  $20^x - 25^x$ . С повышением точности увеличение зрительных труб возрастает и достигает  $60^x$ .

*Поле зрения* зрительных труб определяется угловым расхождением лучей от предметной плоскости, видимых на диаметрально противоположных концах сетки нитей. В современных геодезических приборах поле зрения труб находится в пределах  $0,5^\circ$  (высокоточные приборы) –  $2^\circ$  (технические приборы).

*Разрешающей способностью* зрительных труб определяется качество изображения предмета, в данном случае - способность трубы передавать без искажений необходимые детали предмета. На это влияют качество изготовления оптических деталей, установка деталей в корпусе трубы и т.п. У современных зрительных труб разрешение в центре поля зрения составляет  $2'' - 6''$ , на краях поля зрения оно меньше (т.е. больше  $6''$ ). При работе с геодезическими приборами необходимо стремиться к тому, чтобы наблюдаемая точка находилась ближе к центру сетки нитей.

*Светопропускание* определяет видимую яркость изображения предмета при наблюдениях объектов различной освещенности. Для увеличения светопропускания на оптические детали наносят специальные тонкие многослойные покрытия.

При наблюдении в зрительную трубу после фокусирования предмета в плоскости сетки нитей может возникнуть т.н. *параллакс нитей*. Параллакс нитей обнаруживается при небольших перемещениях глаза наблюдателя относительно окуляра. Если изображение предмета не совпадает с плоскостью сетки нитей, то возникает ощущение разноудаленности нитей и изображения предмета. В таком случае необходимо дополнительно выполнить фокусировку изображения до исключения параллакса.

## § 42. Уровни и компенсаторы наклона

*Уровни* предназначены для ориентирования основных осей приборов относительно отвесной линии (параллельно или перпендикулярно к ней).

В зависимости от формы ампулы уровни подразделяются на *круглые* и *цилиндрические* (рис. 5.4).

Круглые уровни служат для грубой, предварительной установки прибора в рабочее положение. Их точность часто значительно ниже точности рабочих

цилиндрических уровней, используемых в том же приборе для точной установки осей.

Внутренняя часть стеклянной ампулы уровня имеет сферическую поверхность. *Осью круглого уровня* является вертикальная линия, проходящая через *нуль-пункт*  $O$  перпендикулярно к плоскости, касательной к сферической поверхности в нуль-пункте. *Осью цилиндрического уровня* является линия, касательная к сферической поверхности в точке нуль-пункта.

Ампула цилиндрического уровня имеет деления через каждые 2 мм. Угол, на который необходимо наклонить ось уровня, чтобы его пузырек пе-

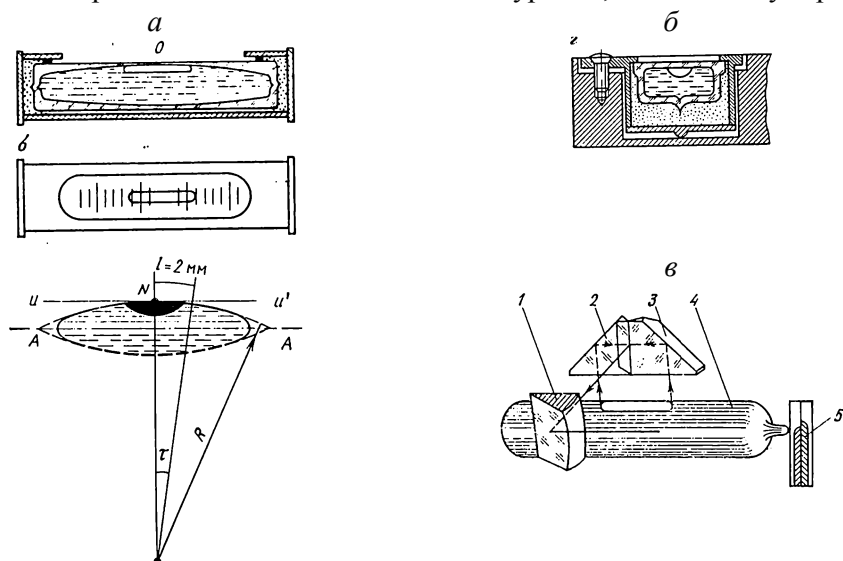


Рис. 5.4. Уровни  
а) цилиндрический; б) круглый; в) контактный

реместился на одно деление, называется *ценой деления*  $\tau$  уровня, определяющей его точность. Из геометрических соображений

$$\tau = \frac{l}{R} \rho'' , \quad (5.4)$$

где  $l = 2$  мм;  $\rho'' = 206265''$ ;  $R$  – радиус сферической поверхности ампулы.

Для того, чтобы изготовить уровень с ценой деления, например,  $10''$ , необходимо сферическую поверхность ампулы выполнить с радиусом

$$R = l \rho'' / \tau'' = (2 \text{ мм} \cdot 206265'') : 10'' = 42 \text{ м}.$$

В геодезических приборах используют цилиндрические уровни с ценой деления от  $2''$  до  $20''$ , в зависимости от точности самого прибора.

При измерениях на местности в различных температурных условиях длина пузырька уровня изменяется. В связи с этим в конструкциях точных уровней предусмотрено регулирование длины пузырька. В одних случаях это обеспечивается с помощью дополнительной камеры в ампуле уровня, в которую можно удалить часть пузырька, либо дополнить его длину. В других случаях внутри ампулы помещают инородное тело, которое при изменении

температуры изменяет свой объем, компенсируя, тем самым изменение длины пузырька (компенсированные уровни).

В большинстве геодезических приборов (в основном – нивелиров) используют т.н. контактные уровни (рис. 5.4 в). Сверху ампулы 4 над концами пузырька размещают блок призм 2 и 3, который создает совмещенное изображение концов пузырька, направляемое на призму-лупу. Это изображение и наблюдается в зрительную трубу. Горизонтальное положение оси цилиндрического уровня соответствует совмещению концов пузырька в изображении.

В современных геодезических приборах (теодолитах и нивелирах) все большее применение находят *компенсаторы наклонов*, заменяющие цилиндрические уровни. В этом случае прибор снабжается только круглым уровнем, либо цилиндрическим уровнем сравнительно невысокой точности. При использовании таких уровней производят установку прибора в рабочее положение, при котором в рабочее положение выводится компенсатор наклона. В теодолитах компенсатор приводит в отвесное положение отсчетный индекс вертикального круга, по положению которого определяют значение *места нуля* ( $MO$ ). В нивелирах компенсатор удерживает визирную ось зрительной трубы в положении, параллельном горизонтальной плоскости. В приборах вертикального проектирования компенсатор отрабатывает вертикальное направление визирной оси.

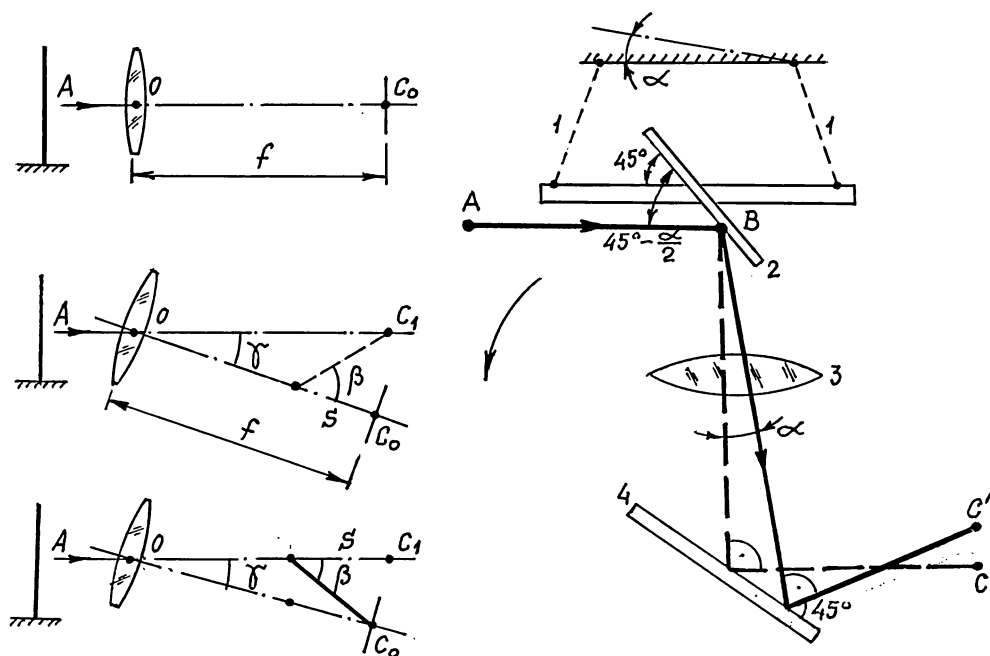


Рис. 5.5. Принцип работы компенсатора. Схема компенсатора

Принцип компенсации визирного луча геодезического прибора заключается в следующем (рис. 5.5). Если визирный луч занимает горизонтальное

положение, то отсчет  $A$  не будет содержать погрешности. При наклоне прибора на некоторый угол горизонтальный луч смещается вверх или вниз относительно первоначального положения. Для того, чтобы отсчет по средней нити сетки не изменился, необходимо изменить положение сетки из положения  $C_0$  в положение  $C_1$ . Либо, с другой стороны, изменить направление горизонтального луча так, чтобы он снова попал на среднюю нить сетки. В первом случае компенсация осуществляется в механических компенсаторах, во втором – в оптико-механических компенсаторах.

Одна из схем компенсации поясняется на рис. 5.5 (правый рисунок). Эта схема реализована в нивелире НЗК-1. При наклоне прибора, например, против часовой стрелки на угол  $\alpha$  центр сетки нитей сместится из положения  $C$  в положение  $C'$ . Зеркало 2 компенсатора подвешено на нитях 1 к корпусу прибора. При наклоне прибора это зеркало также наклонится относительно корпуса на угол  $0,5\alpha$ , в связи с чем луч  $AB$  при отражении от зеркала 2 изменит свое направление на угол  $(90^\circ \pm \alpha)$ , т.е. его направление компенсируется – при отражении от зеркала 4 он попадет в то же место сетки нитей.

Существуют различные конструкции компенсаторов, в которых чувствительным элементом являются объективы (либо их часть), призмы, включенные в ход оптических лучей, сетки нитей и др. Чаще всего используют компенсаторы маятникового типа, в которых оптический элемент под действием силы тяжести занимает всегда одно и то же положение при возможных отклонениях осей прибора из-за внешних воздействий, либо из-за погрешностей установочного уровня. Чувствительный оптический элемент компенсатора в маятниковых системах подвешивается на специальных нитях, либо в осевых системах качения.

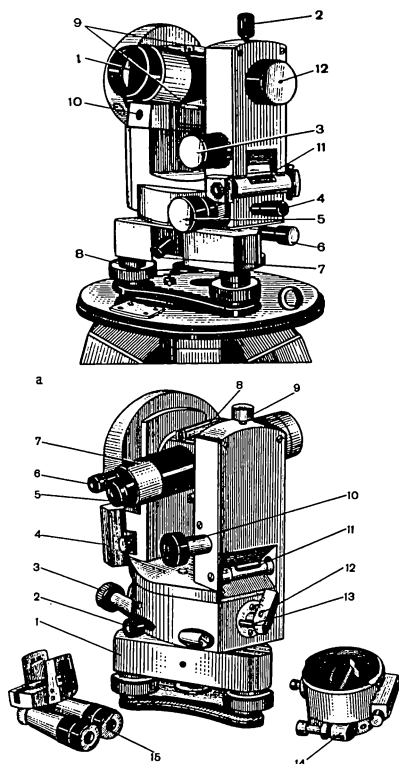
### § 43. Устройство теодолита

Основные принципы построения любых теодолитов вот уже на протяжении 250 лет остаются неизменными. В любых конструкциях обеспечивается сохранение схемы, приведенной на рис. 5.2. Все теодолиты имеют подставки с тремя подъемными винтами, колонки, на которых размещены все остальные узлы: горизонтальный и вертикальный круги с их отсчетными устройствами, зрительные трубы, зажимные и наводящие устройства, уровни, системы подсветки шкал и др. Конструктивно перечисленные части могут отличаться в теодолитах различных типов, но их назначение – сохраняется. В связи с этим в качестве основного примера рассмотрим технический теодолит 2Т30П (рис. 5.6), представленный в разрезе в правой части рисунка. В левой части рисунка приведены виды оптических теодолитов отечественного производства (сверху вниз): 2Т30, Т30М, 2Т5К.

Теодолит 2Т30 – технический. На колонке теодолита размещены: зрительная труба 1 обратного изображения с визирами 9 и накладным уровнем 10; цилиндрический уровень 11, служащий для горизонтирования прибора; наводящий 3 и зажимной 2 винты зрительной трубы; наводящий 5 и зажимной 4 винты алидады горизонтального круга; наводящий 6 и зажимной 7

винты горизонтального круга (расположены конструктивно в подставке); кремальера 12 (маховичок, при помощи которого в зрительной трубе перемещается фокусирующая линза). Подставка теодолита снабжена подъемными винтами 8, с помощью которых теодолит центрируют и приводят в рабочее положение.

Теодолит Т30М – технический. Выпускается в рудничном исполнении. Конструкция вертикальной оси вращения теодолита, наличие реверсивного уровня 11 и съемной подставки 1 позволяют выполнять работу с теодолитом, подвешенном в перевернутом положении в шахте. Теодолит имеет зрительную трубу 5 с визирами 8 и кремальерой 7, зажимной 9 и наводящий 10 винты зрительной трубы, зажимной 2 и наводящий 3 винты горизонтального круга, отсчетный микроскоп 6, 12 и 13 – курковый зажим, предназначенный для скрепления горизонтального круга и его алиады. При значительных углах наклона визирной оси используется зенитная (призменная) насадка 14, а также коленчатый окуляр 15. Для подсветки шкал сбоку колонки имеется специальное осветительное устройство 4.



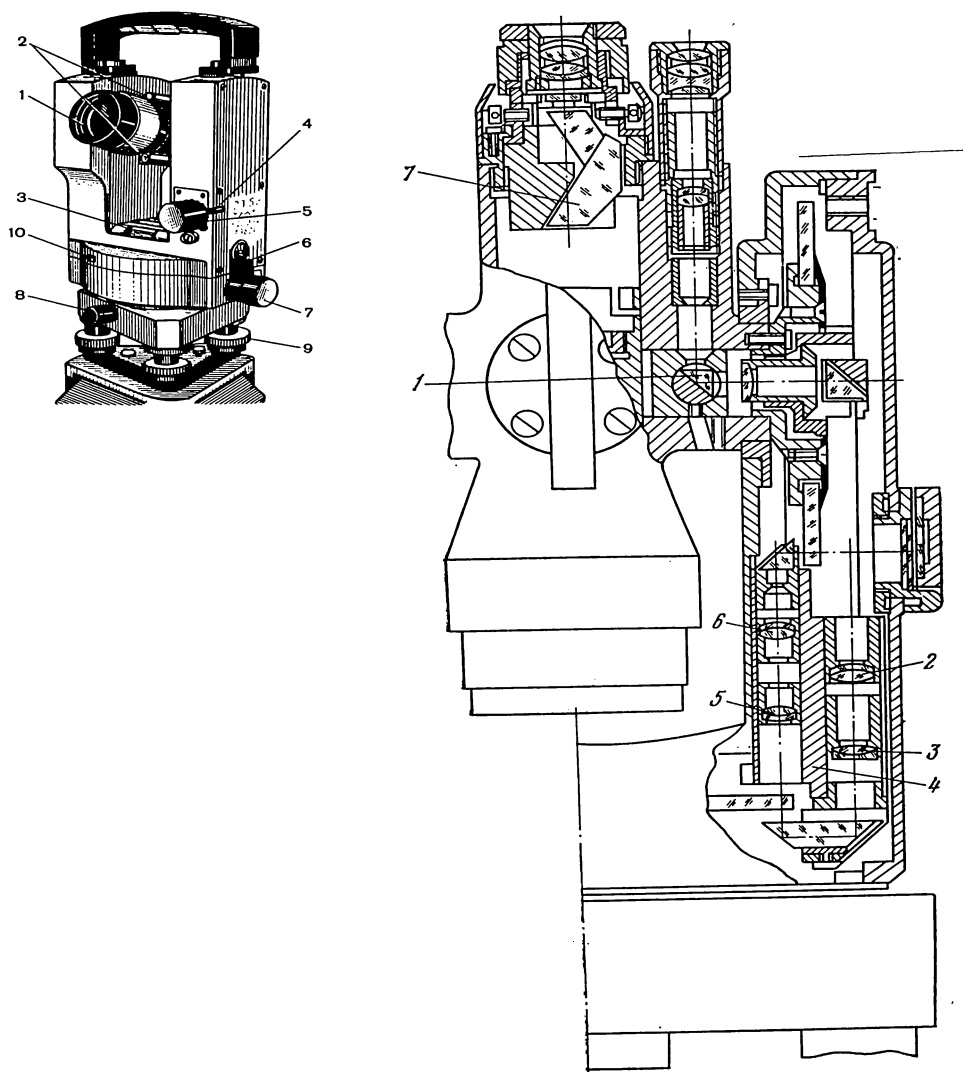


Рис. 5.6. Устройство теодолита 2Т30П.

Теодолит 2Т5К относится к точным приборам. Вертикальный круг теодолита снабжен компенсатором, который позволяет удерживать в отвесном положении отсчетный индекс алидады вертикального круга. Зрительная труба 1 теодолита снабжена визирами 2. Узлы 4-5 и 6-7 представляют собой зажимное и наводящее устройства соответственно зрительной трубы и горизонтального круга. Установка теодолита в рабочее положение выполняется с помощью подъемных винтов 9 подставки и цилиндрического уровня 3. В подставке имеется зажимной винт 8, с помощью которого фиксируется в ней колонка теодолита. В корпусе колонки имеется окно искателя отсчетов горизонтального круга. Теодолит снабжен *оптическим центриром* (на рисунке не показан).



Конструкции теодолитов ТЗ0 и 2ТЗ0П (правая часть рисунка) практически идентичны. Зрительная труба теодолита 2ТЗ0П прямого изображения, для чего в нее введен блок 7 оборачивающих призм, расположенный перед сеткой нитей. Изображение штрихов горизонтального и вертикального кругов соответственно объективами 2-3 и 5-6, конструктивно закрепленными на кронштейне 4, передаются через призму 1 в окулярную часть отсчетного микроскопа.

Ход лучей в теодолите 2ТЗ0П поясняется на рис. 5.7.

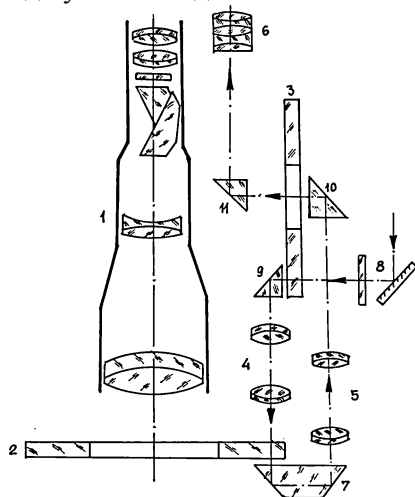


Рис. 5.7. Оптическая схема теодолита 2ТЗ0П

Теодолит 2ТЗ0П имеет одноканальную оптическую систему, отсчеты в которой производятся по одной стороне горизонтального и вертикального кругов. Световой поток от системы подсветки 8 (зеркала) попадает на шкалу вертикального круга 3, затем призмой 9 направляется в окуляр 4 и далее на шкалу горизонтального круга 2. Совмещенное изображение шкал призмой 7 через объектив 5 и систему прямоугольных призм 10 и 11 передается в окулярную часть системы отсчетного микроскопа через внутреннюю механическую полую часть осевой системы зрительной трубы 1.

Поле зрения отсчетной системы теодолитов сконструировано одинаково (рис. 5.8): в верхней части – шкала вертикального круга (индекс В), в нижней – горизонтального (индекс Г).

Принцип получения отсчета простой. Шкалы горизонтального и вертикального кругов оцифрованы через  $1^\circ$ . Этот интервал разбит на 12 частей (одно деление соответствует  $5'$ ), либо разбивка выполнена через  $1'$ .

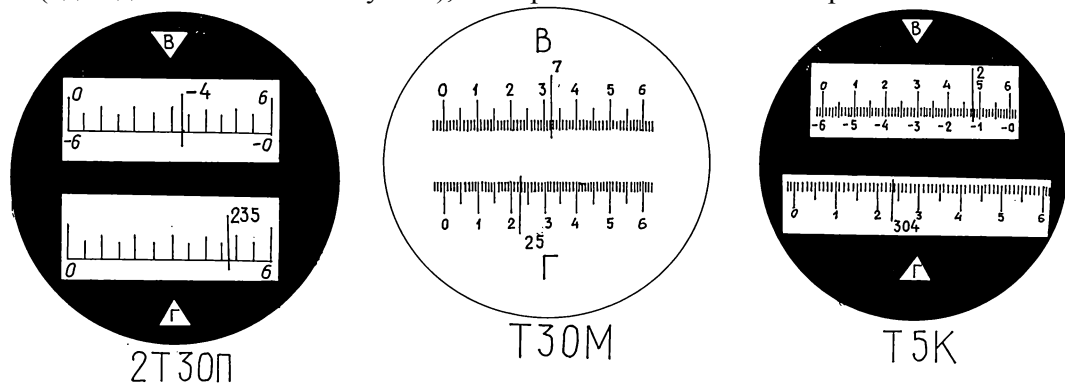


Рис. 5.8. Поле зрения отсчетной системы теодолитов 2ТЗ0П, ТЗ0М, Т5К.

Шкала вертикального круга для большинства теодолитов двойная – для отрицательных и положительных отсчетов. Если отсчетный индекс в шкале имеет знак «плюс» (он не проставляется), то минуты определяют от нулевого индекса по положительной шкале минут до оцифрованного градусного штриха. Если отсчетный индекс отрицательный, то число минут определяется до него от нулевого индекса минусовой шкалы. На рис. 5.8 в поле зрения теодолита 2Т30П отсчеты равны: ГК =  $235^{\circ}47,5'$ ; ВК =  $-4^{\circ}27,0'$ . В поле зрения теодолита Т30М: ГК =  $25^{\circ}22,6'$ ; ВК =  $7^{\circ}32,3'$ . В поле зрения теодолита Т5К: ГК =  $304^{\circ}23,6'$ ; ВК =  $+2^{\circ}47,5'$ . При отсчетах по пятиминутным интервалам точность отсчета равна  $1'$ , а при соответствующем навыке –  $0,5'$ . По шкалам с ценой деления  $1'$  точность отсчета равна  $0,1'$ .

#### § 44. Установка теодолита в рабочее положение

Установка теодолита в рабочее положение выполняется перед началом любых с ним работ, касается это основных измерительных работ, либо специальных работ, связанных с установлением его работоспособности.

Установка теодолита в рабочее положение заключается в его центрировании над вершиной измеряемого угла, горизонтировании и установке для наблюдений зрительной трубы и отсчетной системы. При проведении поверок в большинстве случаев центрирование теодолита не выполняют.

*Центрирование* – это совмещение его вертикальной оси вращения с вершиной измеряемого горизонтального угла. *Горизонтирование* – приведение вертикальной оси вращения теодолита в отвесное положение. Для центрирования теодолита 2Т30П используется *отвес*, который подвешивается на крючок *станового винта штатива* (рис. 5.9).

Горизонтирование и центрирование выполняют методом последовательных приближений.

Становым винтом через резьбовое гнездо подставки теодолит прикрепляется к плоской головке штатива. Предварительно штатив необходимо установить так, чтобы плоскость его головки заняла примерно горизонтальное положение, а острие отвеса совпало с вершиной угла.

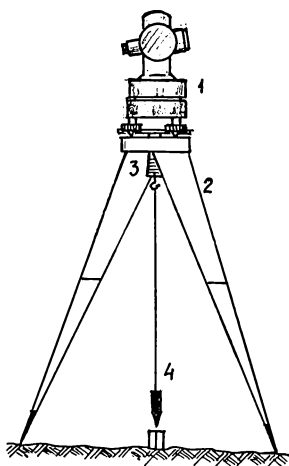


Рис. 5.9. Центрирование теодолита

При этом ножки штатива должны быть надежно зафиксированы в грунте, либо быть устойчивыми на твердой поверхности, например, асфальте. Небольшие перемещения острия отвеса над вершиной измеряемого угла достигаются перемещением самого теодолита при ослабленном становом винте. После выполнения центрирования становой винт снова необходимо зажать.

Горизонтирование теодолита 2Т30П рекомендуется выполнять в указанной ниже последовательности (рис. 5.10).

1. Установить ось цилиндрического уровня по направлению двух любых ножек штатива и, ослабив у одной из них зажим раздвижной системы, по возможности точно привести пузырек уровня к середине ампулы (рис. 5.10 а, поз. 1).

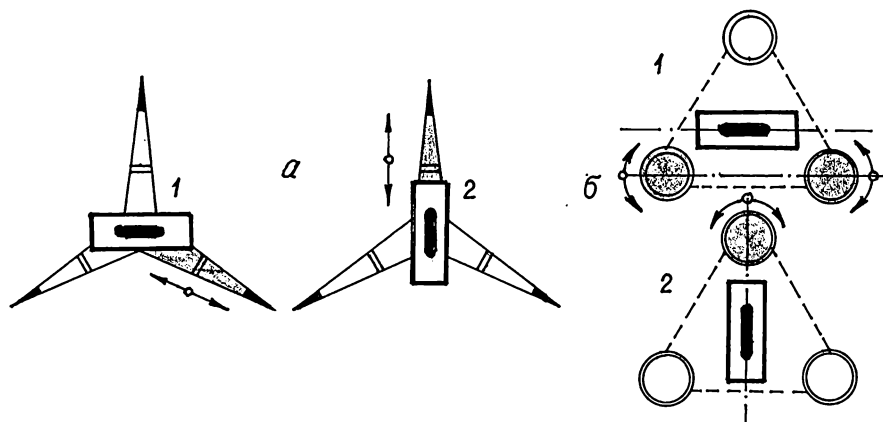


Рис. 5.10. Горизонтирование теодолита  
а – предварительное горизонтирование ножками штатива; б – горизонтирование подъемными винтами подставки

2. Установить ось цилиндрического уровня по направлению на третью ножку штатива и изменением ее длины привести пузырек уровня к середине ампулы (поз. 2). Проверить позицию 1 по двум ножкам штатива.

3. Установить ось уровня на два любых подъемных винта подставки и, вращая эти винты в противоположные стороны примерно на одинаковый угол, привести пузырек точно на середину ампулы (рис. 5.10 б, поз. 1).

4. Установить ось уровня по направлению на третий подъемный винт подставки (по симметрии частей колонки или по отсчетам по шкале ГК) и вращением этого винта привести пузырек уровня точно на середину ампулы (поз. 2). Проверить позицию 1, а затем снова позицию 2, и при необходимости поправить положение пузырька.

Установка зрительной трубы и отсчетной системы для наблюдений заключается в установке четкого (по глазу) изображения сетки нитей вращением окулярного колена зрительной трубы и четкого изображения шкал ГК и ВК вращением окулярного колена зрительной трубки отсчетной системы.

Многие теодолиты снабжены *оптическими центрами* (рис. 5.11). Установка теодолита в рабочее положение (центрирование и горизонтирование) с помощью оптического центра выполняется приближениями.

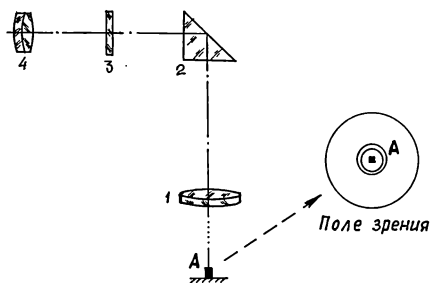


Рис. 5.11. Устройство оптического центра

Найти в поле зрения оптического центра точку, над которой производится центрирование, и закрепить в грунте или на твердой поверхности ножки штатива, следя за тем, чтобы изображение точки находилось как можно ближе к центру поля зрения центра.

Выполнить установку пузырька цилиндрического уровня с помощью ножек штатива, а затем - с помощью подъемных винтов подставки, как это выполняется при использовании отвеса.

При нарушении условия центрирования необходимо ослабить становой винт и переместить теодолит на головке штатива до совмещения центра поля зрения оптического центра с вершиной измеряемого угла. Повторить действия по центрированию и горизонтированию по ножкам штатива и подъемным винтам подставки до достижения желаемого результата.

Горизонтирование может считаться удовлетворительным, если при любом положении колонки теодолита пузырек цилиндрического уровня при горизонтальном круге будет отклоняться от своего среднего положения не более чем на 2 деления ампулы.

## § 45. Измерение горизонтальных углов и углов наклона

Горизонтальные углы измеряют *способом приемов*, *способом повторений* и *способом круговых приемов* (рис. 5.12) при двух положениях колонки: *круг лево* (КЛ) – вертикальный круг расположен слева от наблюдателя; *круг право* (КП) – вертикальный круг расположен справа от наблюдателя.

Здесь мы рассмотрим только приведенные способы измерения углов. При высокоточных измерениях существуют и другие способы.

Измерение горизонтального угла при одном из положений колонки (КП или КЛ) называется *полуприемом*. Два полуприема составляют *полный прием*. Наблюдения можно начинать с любого полуприема.

#### 45.1. Способ приемов

1. Установить теодолит в рабочее положение.

2. Пользуясь прицельным приспособлением, размещенным на зрительной трубе, навести его светлый крест на наблюдаемую точку *В*. Зажать (легко) зажимные винты сначала колонки, затем – зрительной трубы. Вращением кремальеры фокусирующей системы, наблюдая в трубу, добиться четкого изображения объекта.

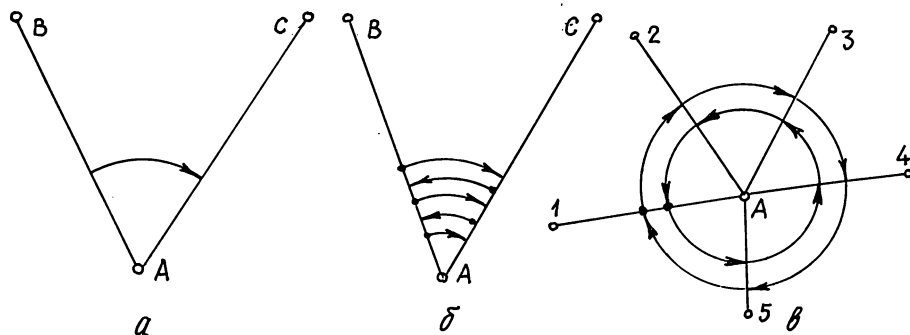


Рис. 5.12. Измерение горизонтальных углов.

*a* – способ приемов; *б* – способ повторений; *в* – способ круговых приемов

3. Наводящими винтами колонки и зрительной трубы переместить изображение наблюдаемой точки на вертикальную нить сетки нитей недалеко от центрального перекрестия (либо вывести изображение точки точно в центр сетки нитей).

4. Взять отсчет по шкале горизонтального круга (см. табл. 5.2, отсчет  $117^{\circ} 36,5'$ ).

5. Открепить колонку и зрительную трубу и выполнить наведение на точку *C* (по аналогии с наведением на т. *B*: пп. 2-4). Отсчет –  $236^{\circ} 01,0'$ .

6. Перед сменой круга ослабить зажимной винт подставки и повернуть колонку в любую сторону (на  $1^{\circ} - 2^{\circ}$ ). Затем этот винт снова закрепить.

Ослабить зажимные винты колонки и зрительной трубы, перевести трубу через зенит и повернуть колонку на  $180^{\circ}$ . Такое положение колонки соответствует измерениям во втором полуприеме.

В теодолите Т15, например, не имеется наводящего устройства в подставке. Однако такую же функцию выполняет у него курковый зажим. Перед сменой круга необходимо нажать на курок зажима и слегка повернуть колонку. Затем снова отпустить зажим нажатием на вторую защелку.

7. Выполнить последовательно все действия по пп. 2-5 с записью отсчетов в журнал.

Вычисления в журнале заключаются в определении разностей отсчетов на правое (*C*) и левое (*B*) направления:

$$236^{\circ} 01,0' - 117^{\circ} 36,5' = 118^{\circ} 24,5' \text{ (КЛ);}$$

$$58^{\circ} 43,5' - 300^{\circ} 18,5' = (58^{\circ} 43,5' + 360^{\circ}) - 300^{\circ} 18,5' = 118^{\circ} 25,0' \text{ (КП).}$$

Таблица 5.2

№ стан-ции	№№ го-чек	КП КЛ	Отсчеты по ГК	Разность отсчетов	Среднее значение угла	Отсчеты по ВК	Место нуля <i>МО</i>	Значение угла наклона
	В		117°36,5'			+1°36,5'	-0,75'	+1°37,25'
		КЛ		118°24,5'				
	С		236°01,0'			- 3°20,0'	-1,0'	- 3°19,0'
А					118°24,75'			
	В		300°18,5'			- 1°38,0'		
		КП		118°25,0'				
	С		58°43,5'			+3°18,0'		

При получении отрицательного результата к меньшему значению следует прибавить 360°.

Можно вычислить и угол  $\beta'$ , дополняющий угол  $\beta$  до 360°. Для этого из отсчета на левое (В) направление необходимо вычесть отсчет на правое (С) направление:

$$(117^\circ 36,5' + 360^\circ) - 236^\circ 01,0' = 241^\circ 35,5';$$

$$300^\circ 18,5' - 58^\circ 43,5' = 241^\circ 35,0'.$$

Если разность в значениях горизонтального угла, полученного в полуприемах, не будет превышать двойной точности теодолита, то вычисляют среднее значение угла из полуприемов.

Если разность будет больше допустимой, то измерение угла необходимо выполнить заново.

#### 45.2. Способ повторений

Принцип измерения углов способом повторений (рис. 5.12 б) заключается в многократном ( $n$  раз) откладывании угла на шкале горизонтального круга, т.е. производится  $n$  раз суммирование горизонтального угла. Затем полученную сумму делят на число  $n$ , что дает значение искомого угла. Действия по измерению угла выполняются по следующей схеме (теодолит установлен в рабочее положение).

1. Выполнить визирование на т. В и записать полученный на нее отсчет в журнал (табл. 5.3, отсчет 33°16,0').

2. Открепить колонку и зрительную трубу и выполнить наведение на т. С. Взять контрольный отсчет на т. С.

3. Ослабить зажимной винт подставки и выполнить наведение на т. В, пользуясь наводящим устройством подставки. В результате этого отсчет на т. С переведется на т. В, поскольку алидада горизонтального круга и сам горизонтальный круг остаются неподвижными друг относительно друга.

*Алидада* – отсчетное приспособление горизонтального и вертикального кругов. Ось вращения алидады должна совпадать с осью вращения соответственного круга. В системе вертикального круга алидада всегда остается неподвижной, а вращается относительно нее вертикальный круг, жестко связанный со зрительной трубой. В системе горизонтального круга подвижными являются и горизонтальный круг и его алидада.

В теодолите Т15, например, после выполнения п. 2 необходимо взвести курок куркового зажима и затем выполнить наведение на т. В, пользуясь теми же наводящими устройствами.

4. Открепить колонку и зрительную трубу и выполнить действия по пп. 1, 2 и 3  $n$  раз (в примере табл. 5.3 –  $n = 3$ ) и записать последний отсчет на т. С (200°56,5').

5. Поменять круг и выполнить все действия по пп. 1 – 4.

Таблица 5.3

№ стан-ции	№№ точек	КП КЛ	Число повто-рений	Отсчеты по ГК	Значение угла в полуприеме	Среднее значение угла
	В			33°16,0'		
		КЛ	3		55°53'30"	
	С			200°56,5'		
А						55°53'45"
	В			214°49,5'		
		КП	3		55°54'00"	
	С			22°31,5'		

Обработка журнала заключается в следующем:

- вычислить разности отсчетов в полуприемах и разделить их на число повторений  $n$ :

$$(200°56,5' - 33°16,0') : 3 = 55°53'30'';$$

$$(22°31,5' + 360° - 214°49,5') : 3 = 55°54'00''.$$

При переходе через 0° (360°)  $N$  раз к последнему отсчету в точке С следует прибавить  $N360°$ . В примере  $N = 1$ ;

- вычислить среднее значение угла:

$$(55°53'30 - 55°54'00) : 2 = 55°53'45''.$$

### 45.3. Способ круговых приемов

Этот способ (рис. 5.12 в) используется при измерении углов между несколькими направлениями. Часто такие измерения приходится выполнять при сгущении геодезических и маркшейдерских сетей методом триангуляции. Методика измерений следующая (теодолит установлен в рабочее положение).

1. Устанавливают примерно нулевые индексы лимба и алидады горизонтального круга. Алидаду закрепляют. При свободном лимбе трубу наводят на первую точку, например, при КЛ, и берут на нее отсчет (0°01'15,6") – табл. 5.4.

2. Алидаду освобождают (лимб при этом остается неподвижным), зрительную трубу наводят по часовой стрелке поочередно на точки 2, 3, 4, 5 и берут на них отсчеты (66°36'24,3" и т.д.).

3. Заканчивают наблюдение в первом полуприеме наведением на первую точку с регистрацией контрольного отсчета на нее (0°01'15,0").

Таблица 5.4

№№ точек	Измеренное направление (КЛ)	Измеренное направление (КП)	Средний отсчет	Приведенное направление	Вычисленный угол	$\beta_i$
1	2	3	4	5	6	7
			(0°01'14,6")			
1	0°01'15,6"	180°01'14,4"	0°01'15,0"	0°00'00,0"		
2	66°36'24,3"	246°36'22,8"	66°36'23,6"	66°35'09,0"	66°35'09,0"	$\beta_1$
3	138°05'08,7"	318°05'08,3"	138°05'08,5"	138°03'53,9"	71°28'44,9"	$\beta_2$
4	181°42'36,0"	1°42'35,1"	181°42'35,6"	181°41'21,0"	43°37'27,1"	$\beta_3$
5	272°16'42,4"	52°16'41,0"	272°16'41,7"	272°15'27,1"	90°34'06,1"	$\beta_4$
1	0°01'15,0"	180°01'13,6"	0°01'14,3"	(0°) 360°00'00,0"	87°44'32,9"	$\beta_5$

5. Второй полуприем (здесь – КП) выполняется при другом положении круга с первой точки, но против часовой стрелки. Т.е. по сравнению с первым полуприемом второй наблюдаемой точкой будет последняя, 5-я, (см. столбец 3), последовательность отсчетов: 1, 5, 4, 3, 2, 1.

После окончания измерений вычисляют *коллимационную погрешность*, по величине которой оценивают точность измерений.

Вычисляют средние значения направлений (столбец 4) из отсчетов на каждую точку при КЛ и КП с записью их значений по одному из полуприемов (в примере – для КЛ).

В столбце 4 вычисляют средний отсчет на исходное направление на точку 1 (0°01'14,6") и в столбце 5 вычисляют приведенные направления по отношению к полученному среднему направлению на первую (начальную) точку. Приведенное направление будет равно разности средних направлений по отношению к среднему направлению на начальную точку.

При необходимости вычисляют горизонтальные углы (столбец 6) как разности соответствующих приведенных направлений.

#### 45.4. Измерение углов наклона

Весьма важной характеристикой вертикального круга, а также параметром, определяющим работу теодолита, является *место нуля (МО)* вертикального круга. Поясним этот параметр на схеме, представленной на рис. 5.13.

Предположим, что при положении «круг лево» отсчет на точку местности по вертикальному кругу составил ВК(КЛ). Предположим также, что ноль вертикального круга смещен от положения горизонтальной плоскости на величину МО. При принятой на рисунке оцифровке и ее знаках то же самое можно проследить и при положении «круг право». Разность отсчетов даст значение угла наклона

$$v = \text{ВК(КЛ)} - \text{МО} ; v = \text{МО} - \text{ВК(КП)} \quad (5.5)$$

С учетом формул (5.5) можно записать, что

$$\text{МО} = 0,5 [\text{ВК(КЛ)} + \text{ВК(КП)}] \quad (5.6)$$



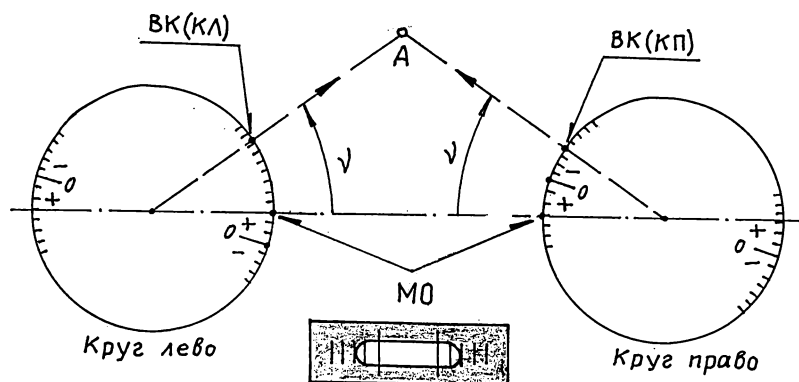


Рис. 5.13. Измерение угла наклона

Последовательность измерения угла наклона (при установленном в рабочее положение теодолите).

При измерениях углов наклона теодолитами без компенсатора при вертикальном круге после грубого визирования на точку В (или С) с помощью прицельного приспособления зрительной трубы обязательно выполнить установку пузырька цилиндрического уровня на середину. Это можно сделать любым подъемным винтом подставки, который позволит это выполнить максимально быстро и с меньшими его поворотами. В теодолитах с компенсатором выполнять такую установку уровня не требуется.

1. Выполнить наведение на т. В или С (рис. 5.12 а) при КЛ, переместив изображение точки наводящими винтами колонки и зрительной трубы на горизонтальную нить сетки нитей вблизи от центрального перекрестия (либо точно в центр сетки нитей). Взять отсчет по шкале вертикального круга (КЛ: т. В -  $+1^{\circ}36,5'$ ; т. С -  $-3^{\circ}18,0'$ ) – см. табл. 5.2.

2. Поменять круг (на КП) и выполнить действия по п. 1. Отсчеты также записать в журнал.

Вычисления заключаются в определении места нуля (МО) вертикального круга по формуле (5.6).

Таким образом,

$$МО_B = 0,5 (КЛ_B + КП_B) = 0,5 (+1^{\circ}36,5' - 1^{\circ}38,0') = -0,75' = -45'';$$

$$МО_C = 0,5 (КЛ_C + КП_C) = 0,5 (-3^{\circ}20,0' + 3^{\circ}18,0') = -1,0' = -60''.$$

Допускаются расхождения в значениях места нуля не более двойной точности отсчета по вертикальному кругу. В этом случае определяют значения углов наклона без усреднения величины МО по формулам (5.5).

В примере:

$$\nu_B = +1^{\circ}36,5' - (-0,75') = +1^{\circ}37,25' = +1^{\circ}37'15'';$$

$$\nu_C = -3^{\circ}20,0' - (-1,0') = -3^{\circ}19,0' = -3^{\circ}19'00''.$$

Обычно значения углов наклона вычисляют только при КЛ (при КП – контрольное вычисление) и записывают в соответствующей строке журнала.

Значение места нуля вертикального круга стремятся сделать равным или очень близким к нулю. О выполнении такой работы см. в § 46.

## § 46. Поверки теодолитов

К основным поверкам теодолитов относится установление выполнения следующих условий.

*Условие 1.* Ось цилиндрического уровня при алидаде горизонтального круга должна быть перпендикулярна к оси вращения теодолита.

*Условие 2.* Вертикальный штрих сетки нитей должен находиться в вертикальной (коллимационной) плоскости.

Коллимационная плоскость определяется плоскостью, образованной визирной осью зрительной трубы при ее вращении вокруг оси 2-2 (рис. 5.2).

*Условие 3.* Место нуля вертикального круга должно быть близким к нулю и постоянным.

*Условие 4.* Визирная ось зрительной трубы должна быть перпендикулярна к горизонтальной оси ее вращения.

*Условие 5.* Горизонтальная ось вращения зрительной трубы должна быть перпендикулярна к вертикальной оси вращения теодолита.

Установление выполнения указанных выше условий называют поверкой.

Условие 1 проверяют в начале каждого рабочего дня, а также при необходимости и в течение рабочего дня. При использовании теодолита для *ориентировки* или при *разбивочных работах* на монтажных горизонтах – на каждой станции.

Условие 2 проверяют перед выполнением *разбивочных работ*, при *створных измерениях*, при выполнении *ориентировок*, перед измерениями в ходах *съёмочного обоснования* и др.

Условие 3 поверяют перед измерениями углов наклона (*тригонометрическое нивелирование*), перед *ориентировками*, при визировании на близкие цели.

Условие 4 проверяют одновременно с проверкой условия 3 перед выполнением указанных выше работ.

Условие 5 проверяют периодически в соответствии с инструкцией по эксплуатации прибора, но не реже одного раза в 2 месяца, а также после известных наблюдателю механических воздействий, происшедших во время работы с теодолитом, либо во время его транспортировки или хранения.

Перед поверками теодолит необходимо установить в рабочее положение. Поскольку измерение горизонтальных углов при указанных поверках не производится, то центрирование теодолита не выполняют.

Перед выполнением любой поверки (2, 3, 4 и 5) поверка условия 1 обязательна.
--

Поверка 1. (Выполнение условия 1).

1. Установить ось цилиндрического уровня при алидаде горизонтального круга по направлению на два любых подъемных винта подставки (рис. 5.14). Вращением этих винтов в противоположные стороны привести пузырек уровня точно на середину.

2. Повернуть колонку на  $180^\circ$  (это можно выполнить «на глаз» по симметрии частей колонки, либо по отсчетам шкалы горизонтального круга).

Если пузырек уровня отклонился не более чем на два деления ампулы, то условие считают выполненным. В этом случае поверку следует контролировать по двум другим подъемным винтам подставки.

3. Если пузырек уровня отклонился более чем на два деления, то половину этого отклонения следует исправить подъемными винтами подставки, вращая их одновременно в противоположные стороны, а другую половину – юстировочными винтами уровня, перемещая его хвостовик вверх или вниз, в зависимости от положения пузырька.

После выполнения юстировки поверку повторяют на других подъемных винтах.

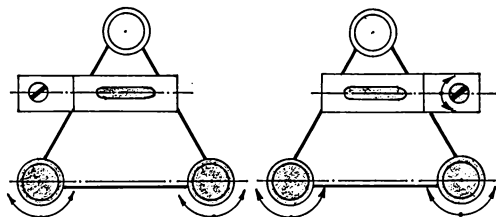


Рис. 5.14. Первая поверка теодолита

Юстировочные винты уровня находятся на одном из его концов. Ими зажат хвостовик уровня. Кроме того, многие уровни снабжены и боковыми юстировочными винтами. При выполнении юстировки необходимо слегка ослабить боковые юсти-

ровочные винты, а затем отпустить один из юстировочных винтов и подкрутить второй. Этим обеспечивается жесткое положение хвостовика после выполнения каждого шага юстировки. После выполнения поверки и юстировки боковые винты уровня следует снова зажать.

Часто встречаются случаи, когда после выполнения п. 2 поверки пузырек полностью уходит в один из концов ампулы, т.е. ось уровня весьма заметно отклонена от горизонтального положения. В такой ситуации не регистрируется величина полного отклонения пузырька. Для оценки полного отклонения пузырька необходимо подъемными винтами привести пузырек уровня на середину, при этом следует стараться поворачивать оба винта на один и тот же угол и считать число  $n$  таких поворотов. После этого надо вернуть пузырек назад на половину ( $n/2$ ) таких же оборотов подъемных винтов, а юстировочными винтами уровня привести пузырек на середину ампулы. Такие действия выполняют до тех пор, пока исправляемое положение пузырька уровня не достигнет регистрируемой по ампуле величины.

#### Поверка 2. (Выполнение условия 2).

Для поверки условия 2 визируют верхний конец вертикальной нити сетки нитей на какую-либо точку и наводящим винтом зрительной трубы переводят изображение точки в нижнюю часть вертикальной нити. Если изображение точки при этом смещается не более чем на  $1/3$  ширины биссектора сетки нитей, то условие 2 считают выполненным. В противном случае ослабляют крепежные винты сетки и проворачивают ее до необходимого положения. После этого крепежные винты закручивают и повторяют поверку этого условия.

Вертикальность нити сетки можно проверить и по нити отвеса, подвешенного на расстоянии 5 – 10 м от теодолита.

Перпендикулярность вертикальной и горизонтальной нитей сетки гарантирует предприятие-изготовитель.

Поверка 3. (Выполнение условия 3).

1. На местности выбирают несколько (3 – 4) точек примерно на горизонте прибора и определяют по всем выбранным направлениям значения места нуля (*МО*) вертикального круга – см. § 45.

Если колебания *МО* превышают допустимую величину, а также само значение *МО* существенно больше 0, то условие 3 считают не выполненным.

Значительные колебания *МО* говорят о неисправности теодолита, либо системы вертикального круга. Исследование неисправности и ремонт производится только в специализированной мастерской.

Если колебания *МО* допустимы, но величина *МО* больше 0, то обычно выполняют исправление *МО*.

Если значение *МО* большое, но стабильное, то, вообще говоря, можно пользоваться и этим значением. Но удобнее, когда оно близко к 0, в этом случае угол наклона примерно равен отсчету по вертикальному кругу при КЛ.

2. Вычисляя значение угла наклона на какую-либо из выбранных точек по формуле (5.6).

3. У теодолитов Т30 наводящим винтом зрительной трубы устанавливают значение полученного угла наклона (при этом пузырек цилиндрического уровня при алидаде горизонтального круга должен находиться в середине ампулы), а затем вертикальными юстировочными винтами сетки нитей перемещают изображение точки на горизонтальную нить сетки, либо в ее центр.

У теодолитов Т15 устанавливают изображение точки в центр сетки нитей, а установочным винтом цилиндрического уровня алидады вертикального круга устанавливают отсчет, соответствующий измеренному углу наклона. В этом случае пузырек уровня алидады вертикального круга отклонится от среднего положения. Тогда юстировочными винтами уровня его необходимо вернуть в центр ампулы.

Поверку необходимо повторить по другой точке.

Поверка 4. (Определение коллимационной погрешности *c*).

1. Выполнить визирование вертикальной нитью при двух положениях круга (КП<sub>1</sub> и КЛ<sub>1</sub>) на удаленную точку, находящуюся примерно на горизонте прибора.

2. У теодолита Т30 ослабить зажимной винт подставки наводящего устройства и повернуть горизонтальный круг на 180°. Затем этот винт зажать и повернуть колонку в первоначальное положение.

У теодолита Т15 поворот горизонтального круга на 180° осуществляется с помощью куркового зажима.

3. Выполнить п.1 для той же точки и получить отсчеты КП<sub>2</sub> и КЛ<sub>2</sub>.

Значение коллимационной погрешности получают по формуле

$$c = 0,5 [(КП_1 - КЛ_1 \pm 180^\circ) + (КП_2 - КЛ_2 \pm 180^\circ)] \quad (5.7)$$

Если значение коллимационной погрешности превышает допустимую величину (для ТЗ0 – 1', Т15 – 0,5'), то выполняют юстировку.

4. Вычисляют правильный отсчет  $a$  на точку

$$a = 0,5 (КП_2 + КЛ_2 \pm 180^\circ) \quad (5.8)$$

5. Наводящим винтом алидады горизонтального круга устанавливают правильный отсчет на лимбе ГК. При этом изображение точки сместится вбок с центра сетки нитей (с вертикальной нити) на величину  $c$ .

6. Боковыми юстировочными винтами сетки нитей совместить ее центр (или вертикальную нить) с изображением точки.

Проверку необходимо повторить по другой точке.

Проверка 5. (Выполнение условия 5).

1. Теодолит установить недалеко от высокого объекта (например, стены здания). В верхней части стены выбрать какую-либо заметную точку так, чтобы визирование на нее производилось при наклоне визирной оси к горизонту примерно на  $30^\circ$  (рис. 5.15).

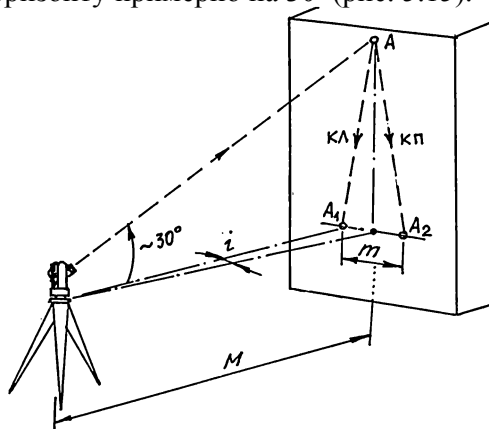


Рис. 5.15. Пятая проверка теодолита

2. При КП и КЛ визируют на точку и сносят ее изображение на стену примерно на уровень высоты прибора. В этом месте лучше закрепить лист бумаги. Положение спроецированной точки на листе бумаги отмечают и измеряют между полученными метками расстояние  $m$  (в мм).

3. Вычисляют угловую погрешность

$$i = \frac{m}{2M} \rho', \quad (5.9)$$

где  $M$  – расстояние от теодолита

до стены (переведенное в мм);  $\rho' = 3438'$ .

Предельная величина угла  $i$  не должна быть больше 0,5'. При значениях указанного угла больших 0,5' исправление производят в мастерской.

## § 47. Нивелиры

В обозначение отечественных нивелиров входит буква Н и число, указывающее среднюю квадратическую погрешность измерения превышения на 1 км двойного хода. Например, Н05, Н1, Н2, Н3, Н10 – соответственно 0,5 мм, 1 мм, 2 мм и т.п.

Кроме того, в обозначение могут входить и другие элементы, определяющие особенности конструкции прибора. Впереди основного обозначения в различных модификациях указывают номер 2, 3 и т.п. После основного обозначения буквы: Л – прибор снабжен лимбом, с помощью которого можно с точностью отсчета до 6 угловых минут измерять горизонтальные углы; К – в конструкцию прибора входит компенсатор, позволяющий удерживать

визирную ось зрительной трубы в горизонтальном положении, П – со зрительной трубой прямого изображения.

Высокоточным нивелиром является Н-05. При визировании на расстояния до 50 м от нивелира до рейки погрешность визирования составляет 0,1 – 0,3 мм. Цена деления цилиндрического уровня на 2 мм равна 10". Цена деления шкалы оптического микрометра 0,05 мм.

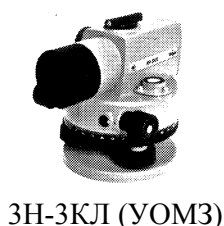
К специальным нивелирам повышенной точности относятся нивелиры Н-1 и Н-2. Нивелиры Н-2 Уральского оптико-механического завода (УОМЗ) снабжаются микрометричной насадкой, что позволяет повысить точность нивелирования до 1 мм на 1 км двойного хода.

К точным нивелирам относят нивелиры Н-3. С помощью нивелира Н-3 выполняют нивелирование в сетях III и IV классов.

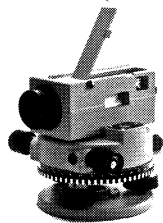
Н-10 – технический нивелир.

## § 48. Устройство нивелира

Нивелир с уровнем при зрительной трубе (рис. 5.16) состоит, из подставки 3 с тремя подъемными винтами 4, с помощью которых совместно с круглым уровнем 5 нивелир устанавливают в рабочее положение, наводящего и зажимного устройств, элевационного винта 8, при вращении которого зрительная труба 1 может в небольших пределах поворачиваться в вертикальной плоскости в шарнире 6.



3Н-3КЛ (УОМЗ)



3Н-5Л (УОМЗ)

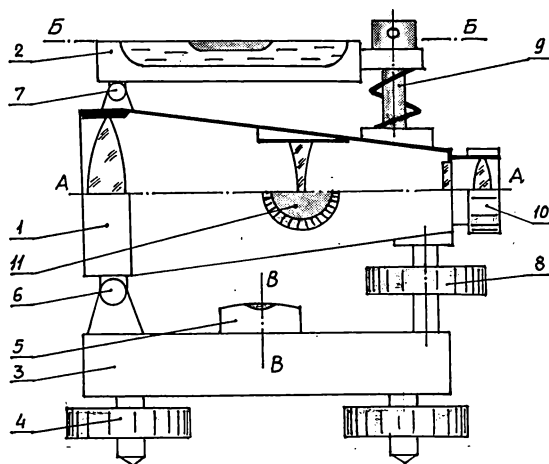


Рис. 5.16. Устройство нивелира

Зрительная труба 1 и цилиндрический уровень 2 жестко скреплены друг с другом. При юстировке положения оси Б-Б уровня эта ось может на небольшие углы поворачиваться относительно оси зрительной трубы в шарнире 7 при вращении в ту или другую сторону юстировочного винта 9, расположенного в хвостовике уровня.

Фокусирование изображения предмета производится кремальерой 11, при вращении которой перемещается отрицательный компонент объектива зрительной трубы (фокусирующая линза). Четкое изображение сетки нитей получают вращением окулярного колена 10.

В поле зрения трубы нивелира выведены специальной оптической системой противоположные концы пузырька цилиндрического уровня (устройство контактного уровня см. в § 46).

Нивелиры с компенсаторами не имеют цилиндрического уровня при зрительной трубе, а содержат только установочный (круглый или цилиндрический) уровень, находящийся на корпусе прибора. Приведение визирной оси нивелира в рабочее положение производится автоматически при приведении в рабочее положение установочного уровня. Принципиальная схема компенсатора маятникового типа нивелира Н-10К приведена на рис. 5.17. Для примера на этом же рисунке показана схема нивелира 2Н-10Л с цилиндрическим контактным уровнем при зрительной трубе.

В нивелире 2Н-10Л установка визирной оси в горизонтальное положение осуществляется с помощью контактного цилиндрического уровня, оптическая система которого передает изображение концов пузырька в плоскость сетки нитей.

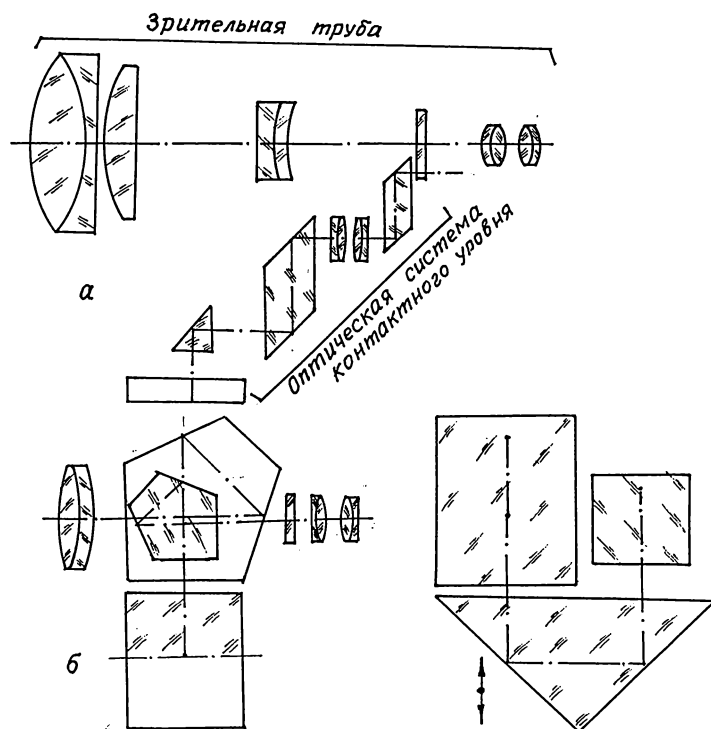


Рис. 5.17. Устройство нивелира с компенсатором.  
Нивелир 2Н-10Л (а). Нивелир Н-10КЛ (б)

В таком же по классу точности нивелире Н-10КЛ отсутствует фокусирующая линза, а ее функцию выполняет прямоугольная призма компенсатора, свободно подвешенная на жестких нитях в опорах качения (маятниковый компенсатор). Фокусирование осуществляется перемещением этой призмы по направляющим в вертикальном направлении. В этом случае изменяется длина хода оптических лучей в оптической системе нивелира, в результате чего изображение предмета накладывается на плоскость сетки нитей, где нанесены штрихи.

Над призмой установлен неподвижно блок из двух пентапризм (большой и малой пентапризм), которые создают вместе с прямоугольной призмой ломаный ход лучей от объектива к сетке нитей и окуляру. Изображение получается прямым (земная зрительная труба).

Нивелиры с компенсаторами значительно облегчают работу при измерениях, поскольку при их использовании отпадает необходимость в приведении визирной оси в горизонтальное положение самим наблюдателем. Одним из недостатков нивелиров с компенсаторами является сложность работ в условиях вибрации почвы (грунта) от работы механизмов, либо от проходящего рядом транспорта.

## § 49. Нивелирные рейки

В комплект нивелира входят две нивелирные рейки, представляющие собой (рис. 5.18) бруски или жесткие металлические профилированные полосы с нанесенными на них делениями (обычно сантиметровыми или пятидесяти сантиметровыми). Для точного и технического нивелирования используют деревянные рейки РН-3 и РН-10 с сантиметровыми делениями, нанесенными с двух сторон, каждая из которых окрашена в свой цвет (черная и красная шкалы). Буква С в обозначении рейки говорит о том, что рейка складная. Для точного нивелирования используют не складные, а цельные (с односторонней или двухсторонней шкалами). Высокоточное нивелирование выполняют только с использованием специальных реек типа РН-05 с инварной полосой, на которую нанесены две смещенные шкалы с делениями 5 мм. Инварная полоса имеет устройство для натяжения силой 20 кг. Длина любого интервала шкал такой рейки нанесена с погрешностью не более 0,05 мм. Рейка снабжена круглым уровнем с ценой деления 10', служащим для установки рейки в вертикальное положение.

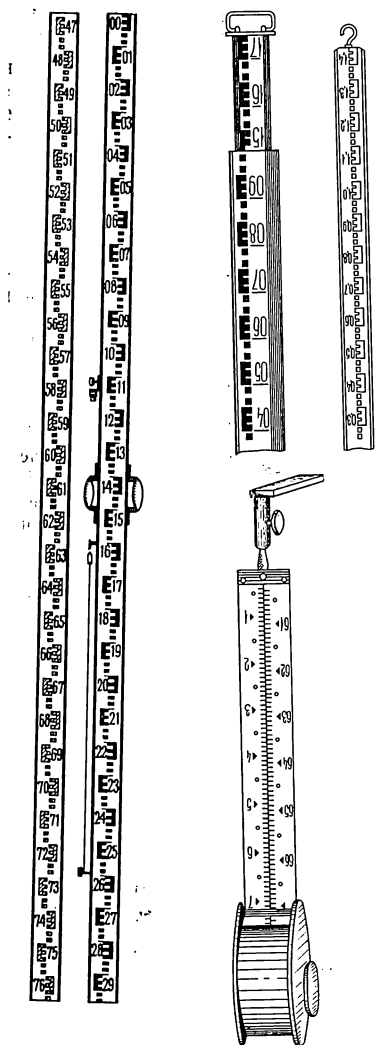
*Инвар* – это сплав железа и никеля, имеющий весьма малый коэффициент линейного расширения в большом диапазоне температур окружающего воздуха.

Рейки для точного и высокоточного нивелирования могут иметь различную длину, от 1,5 до 4,0 м, что позволяет расширить возможности их использования в различных условиях, в том числе и при работе внутри помещений при проведении специальных инженерно-геодезических работ.

Концы реек окованы металлическими пластинами, чем обеспечивается защита пятки реек от повреждений и сохранность начального отсчета.



На черной стороне рейки, используемой для технического или точного нивелирования, нулевой отсчет совпадает с ее пяткой. Наименьшее деление другой шкалы всегда больше наибольшего деления черной шкалы. Тем



самым невозможно перепутать черный и красный отсчеты). Например, для реек длиной 3 м наименьший красный отсчет равен 4787 мм (4,787 м). Красные шкалы двух комплектов реек смещены друг относительно друга на 100 мм, например 4787 и 4687. Это позволяет контролировать работу наблюдателя на станции.

Контроль работы на станции часто обеспечивают и другим способом. Для точного нивелирования, например, изготавливают цельную рейку, деления красной стороны которой больше основных делений на 10%. Одному сантиметру деления черной шкалы соответствует деление 1,1 см красной. Таким образом, превышения, получающиеся по красным шкалам комплектных реек, должны в 1,1 раза отличаться от превышений, полученных по черным шкалам.

При высокоточных и точных измерениях в горных условиях разработаны нивелирные рейки с термодатчиками, установленными на внутренней стороне инварной полосы (4 термодатчика).

Для выполнения привязок к стенным маркам, а также при работе в стесненных условиях используют подвесные инварные рейки длиной 1,2 м.

Для работы в шахтах, тоннелях, а также в условиях слабой освещенности шкалы реек

выполняют светоотражающими. При этом шкалы могут освещаться как со стороны наблюдателя, так и непосредственно речником.

## § 50. Установка нивелира в рабочее положение

Установка нивелира в рабочее положение заключается в установке для наблюдений зрительной трубы и горизонтировании прибора.

Так же, как и для зрительных труб теодолита, установка для наблюдения зрительных труб нивелиров заключается в получении четкого изображения

сетки нитей и изображения концов цилиндрического уровня, которое проецируется оптической системой в левую часть поля зрения (у нивелиров с цилиндрическим уровнем при зрительной трубе).

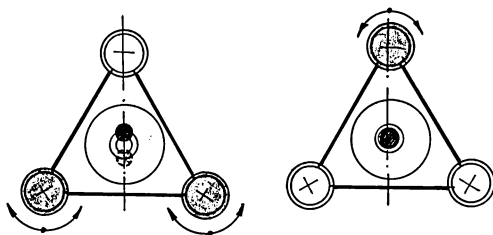


Рис. 5.19. Установка нивелира в рабочее положение

подъемных винта в противоположные стороны (рис. 5.19), выводят пузырек уровня по направлению на третий винт подставки. После этого третьим подъемным винтом приводят пузырек на середину ампулы. Затем установку следует повторить на другом подъемном винте.

Горизонтирование нивелиров, имеющих компенсатор наклона, выполняют аналогично. Высокоточные нивелиры с компенсаторами и нивелиры повышенной точности имеют обычно цилиндрический установочный уровень.

Горизонтирование выполняется приведением пузырька установочного уровня в центр ампулы. Если установочный уровень цилиндрический, то последовательность горизонтирования такая же, как и при горизонтировании теодолита (см. § 44). Если установочный уровень круглый, то для установки нивелира в рабочее положение вращают два

## § 51. Измерение превышений

Превышение на станции геометрического нивелирования определяется как разность отсчетов, полученных по рейкам, установленным в определяемых точках (рис. 5.20).

(О нивелировании, геометрическом нивелировании – см. гл. 9).

Рассмотрим последовательность определения превышения на станции (пример записи и обработки результатов нивелирования приведен в табл. 5.5).

1. Установить нивелир в рабочее положение (§ 50).
2. Выполнить наведение зрительной трубы на заднюю точку – рейку *A*. Для этого получить ее четкое изображение и наводящим винтом переместить это изображение в положение, указанное на рис. 5.20, справа или слева от вертикальной нити сетки нитей, либо непосредственно по центру.
3. Элевационным винтом привести пузырек цилиндрического уровня на середину. При этом изображения концов пузырька должны совместиться.
4. Взять отсчеты по черной (2063) и красной (6748) сторонам рейки *A*.

Отсчет по рейке формируется от младшего к старшему, независимо от того, видим мы перевернутое или прямое изображение. На рейках с сантиметровыми делениями подписаны дециметровые штрихи: 06, 13, 57 и т.п., значение которых занимают первые две позиции отсчета. Между деци-

метровыми штрихами выполнена шашечная разбивка через каждый сантиметр, в связи с чем третьей позиции отсчета соответствует полное число сантиметров между дециметровой оцифровкой и горизонтальной нитью сетки. Четвертая позиция в отсчете – это число миллиметров от последнего полного сантиметрового штриха до горизонтальной нити. Число миллиметров определяют «на глаз». На рис. 5.20 отсчет равен 2063.

5. Ослабить зажимной винт наводящего устройства и выполнить визирование на рейку *В* (передняя точка).

6. Элевационным винтом привести пузырек цилиндрического уровня на середину и взять черный (0941) и красный (5628) отсчеты.

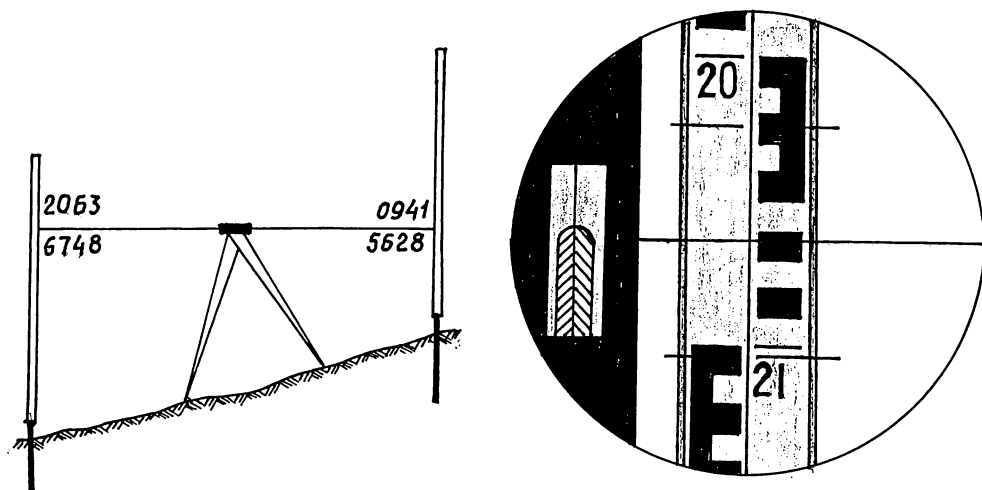


Рис. 5.20. Измерение превышений нивелиром

На каждой станции контролируют разности красного и черного отсчетов, взятых по соответствующей рейке (контролируют ноль красной пятки). Эти разности не должны отличаться для одной и той же рейки на установленную величину. Для технического нивелирования, например, допускаются колебания красной пятки рейки до 5 мм.

$$6748 - 2063 = 4685; \quad 5628 - 0941 = 4687.$$

Если указанные разности в пределах допуска, то вычисляют отдельно по черной и красной сторонам реек превышение передней точки *В* над задней *А* по формуле

$$h = \text{Задний отсчет} - \text{Передний отсчет} \quad (5.10)$$

В примере

$$h_{\text{ЧЕРН}} = 2063 - 0941 = +1122 \text{ (мм)},$$

$$h_{\text{КРАСН}} = 6748 - 5628 = +1120 \text{ (мм)}.$$

Разность полученных превышений не должна превышать установленной величины. Для технического нивелирования допускается разность черного и красного превышений на станции не более 5 мм.

Если разность полученных превышений в пределах допуска, то вычисляют среднее превышение

$$h_{CP} = 0,5 (h_{ЧЕРН} + h_{КРАСН}) \quad (5.11)$$

В примере  $h_{CP} = 0,5 [ (+ 1122 ) + ( + 1120 ) ] = + 1121$  (мм).

В полевом журнале геометрического нивелирования записи отсчетов и превышений должны иметь четыре позиции. Например, превышение (– 76 мм) должно быть записано как (– 0076). Кроме того, у *превышений обязательно указывают знак «плюс» или «минус»*.

Таблица 5.5

№ станции	№№ точек	Отсчеты		Превышения	
		задний	передний	черное красное	среднее
1	A	2063	0941	+ 1122	+ 1121
	B	6748	5628	+ 1120	
		4685	4687		
2	B	1330	1939	- 0609	- 0610
	C	6016	6627	- 0611	
		4686	4688		

В примере (табл. 5.5) рассмотрена обработка результатов нивелирования и на следующей по ходу станции: превышение т. С относительно т. В.

## § 52. Поверки нивелиров

В нивелирах проверяется выполнение следующих основных условий.

*Условие 1.* Ось установочного круглого уровня должна быть параллельна вертикальной оси вращения нивелира. Либо, ось установочного цилиндрического уровня должна быть параллельна плоскости горизонта.

*Условие 2.* Горизонтальная нить сетки нитей должна быть параллельна плоскости горизонта.

*Условие 3. Главное условие нивелира.* Визирная ось зрительной трубы должна быть горизонтальной.

Условие 1 проверяется перед каждой работой в одной смене, либо перед циклом измерений.

Условие 2 проверяется в тех случаях, когда требуется работа по крайним частям горизонтальной нити (например, при разбивке горизонтальной плоскости). Кроме того, это условие дополнительно проверяется после выполнения поверки по условию 3. В любом случае периодичность поверки этого условия должна быть не реже одного раза в неделю.

Условие 3 проверяется в следующих случаях:

- перед каждым циклом измерений в начале рабочего дня;
- при необходимости измерений при неравных расстояниях от нивелира до реек;
- при обнаружении постоянных значительных расхождений в превышениях на станциях *нивелирования из середины*;
- после транспортировки прибора;

- после механических ударов по прибору, его падении и др., что было замечено в процессе выполнения работ.

При выполнении поверок нивелир должен быть установлен в рабочее положение (§ 50).

Поверки необходимо выполнять в последовательности указанных выше условий: 1, 2, 3.

Поверка 1. (Выполнение условия 1).

1. Расположить круглый уровень по направлению на один из подъемных винтов подставки и тщательно вывести его пузырек на середину ампулы.

2. Повернуть корпус нивелира на 180°. Если пузырек уровня не вышел при этом за пределы двойного кольца сетки уровня, то условие считают выполненным.

Если отклонение пузырька от середины ампулы больше допустимого, то половину этого отклонения устраняют подъемными винтами подставки (в соответствии с направлением отклонения), а другую половину – юстировочными винтами уровня.

Поверку повторяют на другом винте подставки до тех пор, пока при любом положении корпуса нивелира пузырек уровня будет оставаться в допустимых пределах сетки ампулы.

Поверка установочного цилиндрического уровня выполняется так же, как и установочного уровня теодолита (§ 46 ).

Поверка 2. (Выполнение условия 2).

1. Навести последовательно крайний левый и крайний правый края центральной горизонтальной нити сетки нитей на рейку с миллиметровыми делениями, установленную на расстоянии 4 – 5 м от нивелира, и взять по ней отсчеты. Если отсчеты отличаются, то необходимо ослабить закрепительные винты сетки и повернуть ее до необходимого положения, контролируя по отсчетам на рейке.

Здесь в качестве визирной цели можно использовать и рейку с сантиметровыми делениями, которую следует установить в 20 – 25 м от нивелира.

Поскольку предприятие-изготовитель гарантирует перпендикулярность горизонтальной и вертикальной нитей сетки, то поверку 2 можно выполнить с использованием отвеса, на который следует навести вертикальную нить. Условие 2 выполнено при совпадении вертикальной нити сетки нитей зрительной трубы с ниткой отвеса. В противном случае сетку необходимо повернуть на необходимый угол. Для этого следует снять с сетки нитей защитный колпачок, ослабить соответствующие винты сетки и вручную повернуть сетку до соблюдения необходимого условия. После этого винты сетки последовательно в несколько приемов закрутить.

После юстировки сетки поверку следует повторить (целесообразно другим способом).

Поверка 3. (Поверка выполнения главного условия нивелира).

Визирная ось зрительной трубы нивелира должна быть параллельна оси цилиндрического уровня.

Эта поверка является весьма ответственной. Она должна выполняться с большой частотой, поскольку нарушение главного условия происходит даже при сравнительно незначительных механических воздействиях, а также и при воздействии внешней температуры. Особенно это важно при выполнении высокоточных, точных и специальных работ повышенной точности, которые требуют выполнения данной поверки в начале каждого рабочего дня, а при необходимости и в течение рабочего дня.

Нивелир с уровнем при зрительной трубе

1. Выбрать на местности на расстоянии 70 – 80 м друг от друга две точки  $A$  и  $B$  и закрепить их деревянными колышками с гвоздями в их верхней части, либо металлическими штырями со сферической головкой, либо установить в этих точках специальные *нивелирные башмаки*.

2. Установить нивелир посередине (рис. 5.21, станция 1) между точками так, чтобы расстояния до них были одинаковыми (с разностью плеч не более 1 м). При поверке высокоточных и точных нивелиров целесообразно разность плеч выдерживать не более 0,2 м. Это можно выполнить промером рулеткой или использовать для этого нитяной дальномер зрительной трубы нивелира. Число сантиметров между дальномерными нитями сетки нитей по рейке, установленной в точке  $A$  или  $B$  и видимой в зрительную трубу, соответствует числу метров от нивелира до рейки.

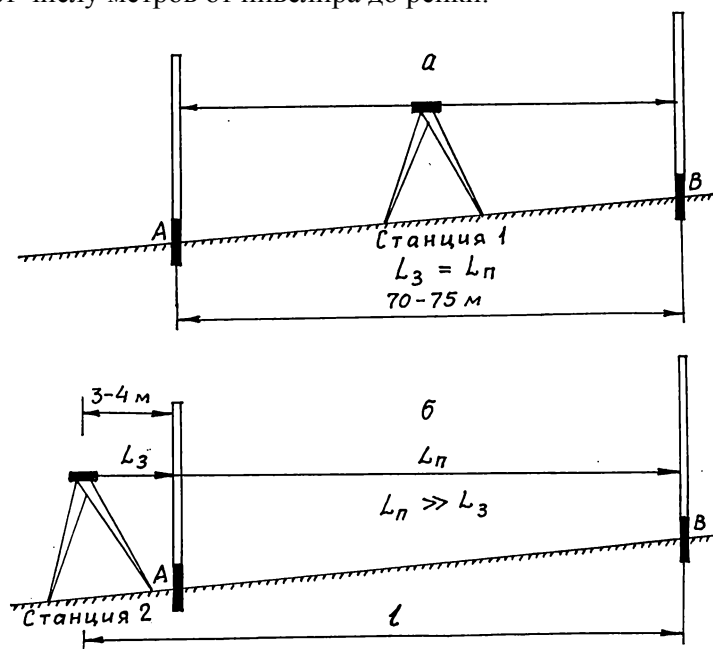


Рис. 5.21. Поверка выполнения главного условия нивелира

3. Определить превышение  $h_{Bo}$  т.  $B$  над точкой  $A$  по двум сторонам реек при двух горизонтах прибора.

Для изменения горизонта прибора (высоты визирного луча над поверхностью земли) необходимо нивелир переставить на том же месте с изменением его высоты примерно на 10 см и снова установить его в рабочее положение.

Полученное превышение равно среднему превышению, определенному из двух горизонтов прибора.

4. Переместиться с нивелиром к точке  $A$  и установить его за ней (в 3 – 4 м от нее) примерно в створе на т.  $B$  (станция 2). Определить превышение  $h_B$  т.  $B$  над т.  $A$  при двух горизонтах прибора.

5. Сравнить полученные превышения. Превышение  $h_{Bo}$ , полученное при нивелировании из середины (см. гл. 9), считается точным, не содержащим погрешностей. Если же ось цилиндрического уровня будет не параллельна визирной оси зрительной трубы нивелира, то в превышение  $h_B$  будет входить погрешность из-за невыполнения главного условия ( $\Delta h = h_B - h_{Bo}$ ).

Угол  $i$  между осью цилиндрического уровня и визирной осью зрительной трубы определится по формуле

$$i = \frac{\Delta h}{l} \rho, \quad (5.12)$$

где  $l$  – расстояние от нивелира до рейки  $B$ ;  $\rho = 206265''$ .

Если значение угла  $i$  допустимо, то главное условие нивелира считают выполненным. Для технических нивелиров  $i < 45''$ , для точных –  $i < 15''$ , для высокоточных –  $i < 10''$ .

Зная величину  $l$ , можно определить допустимое отклонение  $\Delta h$  в превышениях, полученных на станциях 1 и 2:

$$\Delta h = \frac{il}{\rho}. \quad (5.13)$$

Например, для точного нивелира, при  $l = 75$  м,  $\frac{15'' \times 75000 \text{ мм}}{206265''} = 6 \text{ мм}$ .

При тех же условиях поверки для высокоточного нивелира  $\Delta h = 4$  мм, для технического  $\Delta h = 17$  мм.

Если полученное значение  $i$  (или  $\Delta h$ ) превышает допустимое, то выполняют юстировку.

6. Вычисляя правильный отсчет на т.  $B$  по черной стороне рейки, соответствующий горизонтальному положению визирной оси зрительной трубы на последнем горизонте прибора,

$$b_{ПР} = a_{A(\text{ЧЕРН. Ст. 2})} - h_{Bo} \quad (5.14)$$

7. Элевационным винтом устанавливают по рейке  $B$  правильный отсчет  $b_{ПР}$ . В это время пузырек цилиндрического уровня уйдет из среднего положения.

8. Юстировочными винтами цилиндрического уровня зрительной трубы привести его пузырек на середину (по изображению его концов в поле зрения трубы). Для этого немного ослабить боковые винты хвостовика уровня и вращением в противоположные стороны вертикальных юстировочных винтов перемещать хвостовик. Необходимо следить за тем, чтобы хвостовик уровня был после каждого шага его подвижки зажат вертикальными

винтами. После установки пузырька уровня на середину боковые винты снова зажать.

Поверка обязательно повторяется полностью по схеме, указанной в пп. 2 – 8.

#### Нивелир с компенсатором

Поверки 1 и 2 нивелиров с компенсатором аналогичны поверкам нивелиров с уровнем при зрительной трубе.

Поверка выполнения главного условия выполняется также двойным нивелированием с определением превышений и вычислением  $i$  и  $\Delta h$ .

Исправление главного условия (исправление положения визирной оси) выполняется вертикальным перемещением сетки нитей на полученное значение правильного отсчета. Для этого необходимо снять защитный колпачок с сетки нитей и боковыми юстировочными винтами (верхним и нижним) переместить сетку нитей на вычисленный отсчет.

### **§ 53. Приборы для линейных измерений**

Приборы, используемые для линейных измерений, условно делят на три группы: механические, оптические и физико-оптические. Здесь речь пойдет о первых двух группах. О третьей группе, физико-оптических приборах, будет рассказано в гл. 6.

*Механические* приборы используются для непосредственного измерения расстояний. К ним относятся землемерные ленты, рулетки, тросы, длинмеры, инварные проволоки и др.

*Землемерные ленты* изготавливают длиной 20 м, 24 м и 50 м. Обозначают землемерные ленты буквами ЛЗ (лента землемерная) и ЛЗШ (лента землемерная штриховая). Изготавливают их из стальной полосы, которая наматывается на барабан. На обоих концах ленты имеются рукоятки, предназначенные для выравнивания полосы на поверхности земли и обеспечения необходимого натяжения при измерениях силой 10 кг.

Таблица 5.6

Длина рабочей части ленты, м	Допустимые отклонения действительной длины от номинальной, ±мм		
	1 класс	2 класс	3 класс
5	-	1,0	2,0
10	0,5	1,0	2,5
20	1,0	2,0	4,0
30	-	3,0	5,0
50	2,0	5,0	7,0
75	-	7,5	10,0
100	-	10,0	14,0
Отдельные дециметровые деления и метровые интервалы	0,2	0,3	0,4
Отдельные сантиметровые деления	0,1	0,2	0,3
Отдельные миллиметровые деления	0,05	0,1	0,2



Рулетки измерительные металлические выпускают нескольких типов: РС – самосвертывающаяся; РЖ – желобчатая; РЗ – в закрытом корпусе; РК – на крестовине; РВ – на вилке; РЛ – с грузом. У рулеток типа А начало шкалы сдвинуто от торца ленты, а у рулеток типа В начало шкалы совпадает с торцом ленты. По точности тип А – 1 и 2 класса, остальные – практически все класса 3 (табл. 5.6).

Из используемых в геодезических и маркшейдерских измерениях *длиномеров* рассмотрим схему АД1М (рис. 5.22).

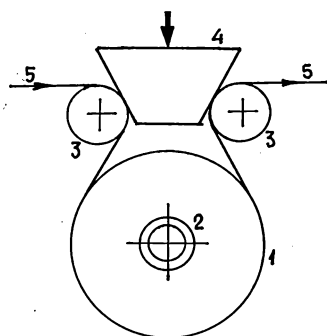


Рис. 5.22. Схема длиномера АД1М.

Длиномер состоит из эталонированного диска 1 диаметром приблизительно 300 мм с закрепленным соосно с ним счетным механизмом 2 емкостью 1000 м и точностью отсчета 1 мм. Проволока 5 диаметром 0,8 мм с натяжением 150 Н проходит через направляющие ролики 3. Для остановки движения проволоки служит тормозное устройство 4. Длина линии измеряется по предварительно протянутой между точками проволоке (рис. 5.23) прокаткой по ней длиномера. Измеряемая длина определяется по количеству оборотов мерного диска от шкал в начале и конце измеряемой линии. Шкалы за-

крепляются в соответствующих местах на мерной проволоке.

Длина одной линии не должна превышать 500 м, поскольку при больших длинах образуется значительная стрелка провеса проволоки.

После установки всей системы для измерений с помощью стремени 6 поднимают груз 5, чем обеспечивается необходимое натяжение проволоки 2. Длиномер переводят к шкале 3 в точке А, берут по ней и по счетному механизму отсчеты и затем прокатывают устройство 1 до шкалы 3 в точке В, где

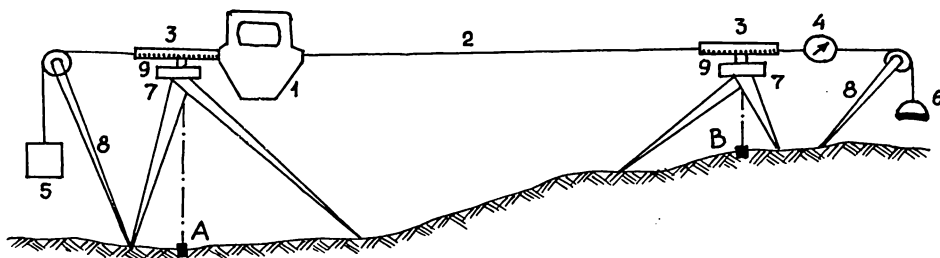


Рис. 5.23. Схема измерения расстояния длиномером.

1 – длиномер; 2 – проволока; 3 – шкалы; 4 – динамометр; 5 – груз; 6 – стремя; 7 – штативы; 8 – раздвижные стойки-упоры; 9 – оптический центрир.

также берут отсчеты по шкале и счетному механизму.

Центрирование шкал в точках  $A$  и  $B$  выполняется с помощью специальных оптических центриров 9, которые позволяют проектировать изображение точки с поверхности земли на шкалу.

Таким способом можно измерять как горизонтальные линии, так наклонные и вертикальные расстояния (в наклонных и вертикальных горных выработках и тоннелях).

*Инварные проволоки* используют для высокоточного измерения базисов сравнительно небольшой длины, а также для выполнения точных разбивок и компарирования землемерных лент и рулеток. При этом до использования сами инварные проволоки эталонируют (компарировуют) на специальном оборудовании в лабораторных условиях.

*Жезлы* представляют собой профилированные металлические линейки с делениями 0,1 мм и встроенным в корпус линейки термометром. В длину жезла вводят поправку за температуру, если она будет отличаться от температуры, при которой определялась длина жезла при компарировании. Номинальная длина жезлов стандартная – 2 и 3 м. Чаще всего применяются *рейки Балла* («Karl Zeiss») и жезл K070 (MOM, Венгрия).

Жезлы используют для компарирования рулеток, их шкал, а также шкал и интервалов нивелирных реек различной точности и назначения, для точных разбивок базисов на местности.

Из *оптических дальномеров* наибольшее распространение получили *нитяный дальномер* и *дальномеры с переменной базой и переменным параллактическим углом*. Схемы определения расстояний указанными дальномерами представлены на рис. 5.24.

*Нитяной дальномер* имеется практически во всех геодезических приборах (теодолитах, нивелирах). Сетка нитей зрительной трубы содержит две дальномерные нити, проекция которых через зрительную трубу в пространство предмета образует параллактический угол

$$\beta_{\pi} = \arctg \frac{a}{2f}, \quad (5.15)$$

где  $a$  – расстояние между дальномерными нитями на сетке нитей;  $f$  – фокусное расстояние объектива зрительной трубы.

При определении расстояний нитяным дальномером используют рейки  $MN$  с сантиметровыми делениями, по которым берут отсчет  $l$  (число видимых в зрительную трубу сантиметров между проекциями дальномерных нитей).  $VV$  – вертикальная ось вращения прибора;  $\delta$  – расстояние от оси вращения прибора до центра объектива;  $p$  – расстояние между дальномерными нитями;  $E$  – расстояние от переднего фокуса до рейки;  $s$  – общее расстояние от оси вращения прибора до рейки.

Дальномерное расстояние получают по формуле

$$D = Kl + c, \quad (5.16)$$

где  $K = 100$  – коэффициент дальномера;  $c = (\delta + f)$  – постоянная нитяного дальномера (для большинства приборов  $c$  близка к нулю).

Коэффициент дальномера зависит от величины параллактического угла и фокусного расстояния. В связи с тем, что при фокусировании на различные расстояния значение фокусного расстояния у зрительных труб с внутренней

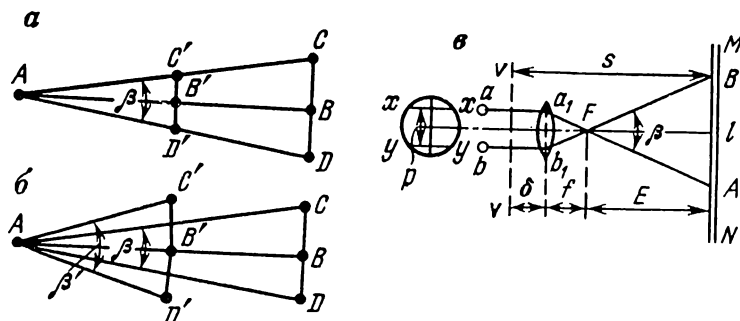


Рис. 5.24. Схемы измерения расстояний оптическими дальномерами  
а – с постоянным параллактическим углом; б – с переменным параллактическим углом;  
в – с использованием нитяного дальномера

фокусировкой несколько изменяется, то и коэффициент  $K$  может оказаться не равным 100. Кроме того, и значение  $s$  может отличаться от нуля. Для повышения точности измерения расстояний выполняют проверку значения  $K$  с целью установления зависимости  $F = K(D)$ .

Для выполнения проверки на местности выполняют разбивку створной линии через 20 м (до 200 – 250 м) и последовательно определяют значения  $D_{20}, D_{40}, \dots, D_n$  по нитяному дальномеру для получения значений  $K_{20}, K_{40}, \dots, K_n$

$$K_i = \frac{D_{i(\text{НОМИНАЛЬНО } E)}}{D_{i(\text{ИЗМЕРЕННОЕ})}}. \quad (5.17)$$

Составляют таблицу  $K(D)$ , которую используют затем при измерениях интерполированием значений  $K$  для текущего расстояния.

Точность нитяного дальномера примерно составляет 1 : 300 от измеренного расстояния. Длинные линии целесообразно измерять короткими отрезками длиной 50 – 100 м. Точность измерений в этом случае может достигать 1: 600 и даже 1:1000.

Чаще всего нитяной дальномер используют при определении дальномерных расстояний до точек при *тахеометрической съемке*.

Дальномер с постоянным параллактическим углом (ДНР-5) представляет собой насадку к теодолитам Т15 и Т30. Он служит для измерения расстояния по вертикально установленной рейке, имеющей установочный уровень. Погрешность измерений составляет 1:2000. Диапазон измеряемых расстояний от 20 до 120 м. Измерительная рейка снабжена шкалой с делениями 2 см. Длина рейки 1,5 м.

Применяют ДНР-5 при прокладке *теодолитных ходов* и при съемке на пересеченной местности.

Насадка ДНР-5 автоматически приводит (редуцирует) наклонные до  $10^\circ$  расстояния к горизонту. Если наклон линий больше  $10^\circ$ , то в измеренное

расстояние вводят дополнительно поправку, определяемую по специальной номограмме.

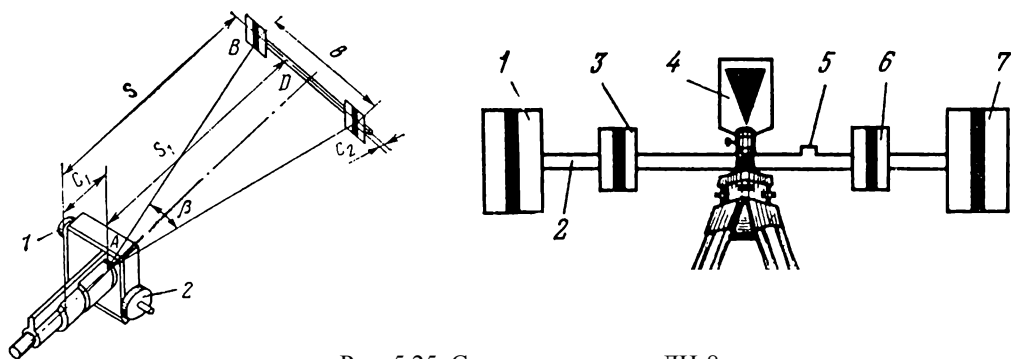


Рис. 5.25. Схема дальномера ДН-8

Дальномерами с переменным параллактическим углом являются Д-2 и ДН-8, которые изготавливаются, так же, как и ДНР-5, в виде насадок на теодолит. В комплекте с ними применяют горизонтальные рейки с базисом 2 м и 0,4 м (Д-2) и 1,018 м и 0,550 м (ДН-8). Один из базисов образован визирными целями 1 и 7, второй – визирными целями 3 и 6 (рис. 5.25). Рейка устанавливается на штатив и горизонтируется с помощью круглого уровня 5. Наведение на рейку выполняют по центральной марке 4.

Указанные приборы выпускаются и в исполнении самостоятельных дальномеров, устанавливаемых на штатив.

Диапазон измеряемых расстояний для Д-2 составляет от 40 до 400 м, а для ДН-8 – от 50 до 700 м.

## § 54. Гироскопические приборы

Если массивному физическому телу задать вращение относительно оси  $X$  (рис. 5.26), то направление этой оси в пространстве останется неизменным при любом последующем изменении направлений осей  $Y$  и  $Z$  (при условии отсутствия сил трения в опорах подвесок). Такая система называется *свободным гироскопом*.

Если на ось  $X$  при вращении ротора 1 воздействовать внешней силой, то эта ось будет поворачиваться (прецессировать) в плоскости, перпендикулярной приложенной силе.

На рис. 5.26 а показан трехстепенной гироскоп, с тремя степенями свободы. Если одну степень свободы ограничить, например, создать вокруг оси чувствительности  $Y$  дополнительную маятниковую нагрузку (рис. 5.26 б), то центр тяжести этой системы сместится вниз. Такая система называется *маятниковым гирокомпасом*. В гирокомпасе груз  $P$  заставляет ось  $X$  принимать положение, параллельное плоскости горизонта.

Указанное явление (свободного гироскопа) происходит при вращении Земли вокруг своей оси. Как известно, ось Земли в мировом пространстве занимает весьма длительное время неизменное положение, в результате чего и происходит смена времен года, поскольку эта ось наклонена к плоскости, в которой Земля вращается вокруг Солнца.

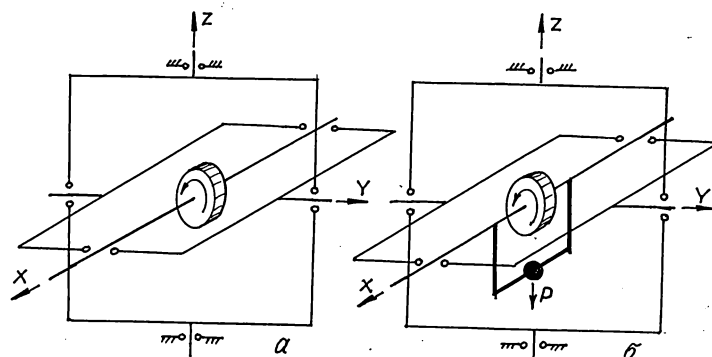


Рис. 5.26. Схема гироскопа  
а – свободный гироскоп; б – маятниковый гироскоп

При вращении Земли вокруг своей оси в пространстве одновременно вращается (поворачивается) плоскость горизонта вокруг меридиана места и плоскость самого меридиана вокруг отвесной линии. Все эти вращения связаны с первичным, т.е. угловой скоростью вращения Земли  $\omega$ , и широтой места  $\varphi$ :

- для угловой скорости  $\omega_1$  вращения горизонта –

$$\omega_1 = \omega \cos \varphi ; \quad (5.18)$$

- для угловой скорости  $\omega_2$  вращения меридиана места –

$$\omega_2 = \omega \sin \varphi . \quad (5.19)$$

Составляющая  $\omega_1$  определяет изменение высоты Солнца и других небесных тел относительно горизонта, а составляющая  $\omega_2$  показывает изменение положения светил по азимуту.

Предположим, что ось  $X$  гирокомпаса установлена на широте  $\varphi$  под углом  $\alpha$  к меридиану. При суточном вращении Земли положение оси  $X$  по отношению к плоскости горизонта будет непрерывно изменяться – северный ее конец будет подниматься над горизонтом. В то же время, на главную ось  $X$  действует момент силы тяжести маятникового груза. Этот момент приложен в вертикальной плоскости, и его действие вызывает поворот этой плоскости к меридиану в горизонтальной плоскости. В результате непрерывных воздействий указанных сил главная ось гирокомпаса получает незатухающие гармонические колебания относительно направления меридиана места. Период  $T$  незатухающих колебаний зависит от маятникового момента  $M$  гирокомпаса, кинетического момента  $H$  ротора, угловой скорости  $\omega$  суточного вращения Земли и широты  $\varphi$  стояния:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{M\omega \cos \varphi}} . \quad (5.20)$$

В действительности, из-за воздействия сил трения в опорах, в токопроводящих устройствах и т.п., колебания главной оси гирокомпаса посте-

пенно затухают, ось  $X$  при этом движется не по замкнутому эллипсу, а по эллипсовидной спирали, что вызывает погрешность в определении направления. Эту погрешность, как систематическую, определяют специальными приемами в процессе измерений и вводят в виде поправки в измеренную величину.

Здесь следует заметить, что гироскопические геодезические приборы не являются чисто оптическими приборами, рассмотренными выше, поскольку они включают в себя весьма сложные электрические и электронные системы, обеспечивающие работу гирокомпасов и управление им.

Гирокомпасы широко используют для ориентирования линий на поверхности земли и в подземных горных выработках, поскольку, как указывалось выше, главная их ось сохраняет свое направление по меридиану места (как на поверхности, так и под землей). Использование гирокомпасов в подземных условиях значительно сокращает объем работ по ориентированию подземных маркшейдерских сетей.

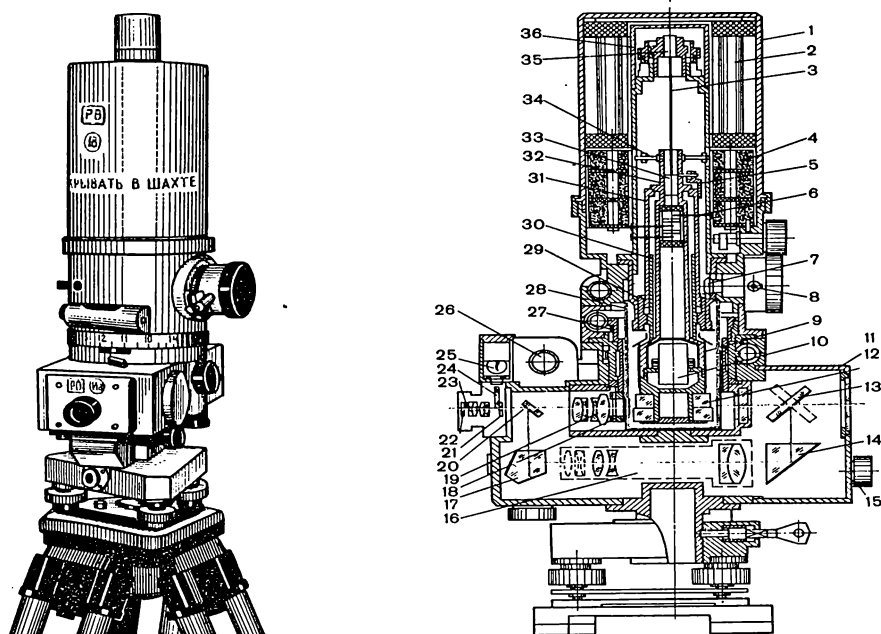


Рис. 5.27. Гиробуссоль МВБ4М.

1 – крышка гироблока; 2 – батарея; 3 – торсионный подвес; 4 – преобразователь; 5 – ловитель; 6 – токопровод; 7 – арретир; 8 – блокировочное устройство; 9 – экран на ЧЭ; 10 – гиромотор; 11 – зеркало (многогранное); 12 – корпус измерительного блока; 13 – зеркало наведения зрительной трубы по вертикали; 14 – призма; 15 – рукоятка наведения по вертикали; 16 – объектив (телескопический); 17 – пентапризма; 18 – зеркало; 19 – объектив; 20 – зеркало переключения каналов зрительной трубы; 21 – сетка-шкала отсчетной системы; 22 – окуляр; 23 – светофильтр; 24 – призма подсветки; 25 – лампа подсветки; 26 – батарея системы подсветки; 27 – шкала корпусного зеркала; 28 – магнитный экран (расположен на корпусе гироблока); 29 – зубчатое колесо арретира; 30 и 31 – нижняя и верхняя втулки арретира; 32 – чувствительный элемент (ЧЭ); 33 и 35 – нижний и верхний зажимы подвеса; 34 – шпилька с балансирующими грузами; 36 – защитный колпачок верхнего зажима подвеса.

В настоящее время на службе у маркшейдеров находятся различные гироскопы трех основных групп. Некоторые гироскопы уже устарели, сведения о них приводятся как историческая справка.

В 1951-1959 гг. выпускались гироскопы М-2, М-3, МУГ-2 с жидкостным подвесом чувствительного элемента (ЧЭ) и электромагнитным центрированием. Подобные конструкции, но во взрывобезопасном исполнении (что важно для подземных условий), имеют гироскопы МВ1, МВ2, МВ2М, МВШЗ, в обычном исполнении – МГ. Эти гироскопы использовались до 1969 г.

Сейчас наибольшее распространение получают гироскопы с торсионным подвесом ЧЭ. К ним относятся марки МВТ2, МВТ4, а также гироскоп МВГ4М. На рис. 5.27 показана конструкция и описание частей гироскопа МВБ4М.

Погрешность единичного определения азимута прибором МВТ2 составляет 30", МВБ4М - 40", но время определения азимута гироскопом составляет 15 мин., в то время как для гироскопа оно равно 20 мин. Существенным является и то, что вес гироскопа (19 кг) в два раза меньше, чем вес гироскопа.

Кроме указанных выше приборов имеются и другие марки (гиротеодолиты), точность измерения азимутов которыми составляет от 5" до 20": Ги-Б1 (15" - 20"); Ги-Б2 (10" - 15"); Ги-Б3 (5" - 8") и др.

При измерениях (ориентировании) с помощью гироскопа отсчет  $N_o$ , соответствующий среднему (равновесному) положению главной оси, определяют по наблюдению четырех последовательных реверсий:  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  и  $n_4$ . Точки реверсии – это крайние точки азимутальных колебаний ЧЭ, в которых происходит смена направления его видимого движения. Отсчет  $N_o$  вычисляют как средний из разности

$$N_o = 0,5(N_1 - N_2), \quad (5.21)$$

где

$$N_1 = 0,5 \left( \frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_2 + n_3}{2} \right), \quad N_2 = 0,5 \left( \frac{n_2 + n_3}{2} + \frac{n_3 + n_4}{2} \right).$$

Полученное значение  $N_o$  соответствует отсчету по горизонтальному кругу теодолита в месте пересечения с плоскостью меридиана.

В шахте и на поверхности гироскопические азимуты исходных сторон геодезической или маркшейдерской сети определяют дважды независимо. Погрешность в двух определениях не должна превышать 2'.

## § 55. Приборы для поиска подземных коммуникаций

К инженерным подземным коммуникациям относятся: кабели электро- и телефонных линий; трубопроводы для транспортировки воды, горючих жидкостей, газа воздуха и т.п.; резервуары и др.

Поиск коммуникаций производится с поверхности земли, а затем исконую точку закрепляют и любыми из известных методов определяют ее плановые и высотные координаты (см. гл. 7).

Используют для поиска подземных коммуникаций следующие методы: индуктивный низкочастотный метод, который основан на детектировании переменного магнитного поля, создаваемого вокруг коммуникации; индуктивный высокочастотный метод, который основан на детектировании наведенного на коммуникацию магнитного поля способом электромагнитной индукции; акустический метод, который основан на выявлении подземных пустот, образованных в трубопроводах и коллекторах.

Большинство приборов сконструировано на использовании первого метода, индуктивного низкочастотного.

В этом методе по отыскиваемой коммуникации, непосредственным подключением к ней, пропускают переменный ток низкой частоты (в пределах 1 КГц). Этот ток в проводнике, которым и является коммуникация, образует переменное электромагнитное поле, регистрируемое на различных расстояниях от источника излучения приемным устройством.

Схема поиска подземных коммуникаций приборами индукционного типа представлена на рис. 5.28. К коммуникации в смотровом колодце, либо на вскрытом ее месте, подключается генератор звуковой частоты. Вокруг трубопровода создается переменное электромагнитное поле, силовые линии которого имеют вид концентрических окружностей. В антенне, являющейся частью приемника-преобразователя, наводится ЭДС, и сигнал в виде звуковых колебаний поступает в наушники, либо на регистрирующий прибор. Максимальный сигнал характеризует ближайшее положение в плане исследуемого объекта.

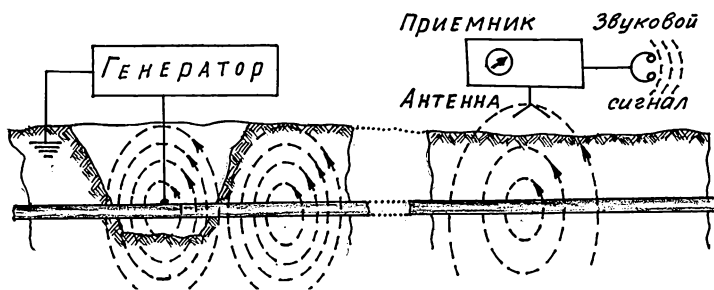


Рис. 5.28. Схема поиска подземных коммуникаций

Существуют конструкции трассоискателей с двумя антеннами, направленными под углом  $45^\circ$  к вертикали, либо с одной антенной, имеющей возможность поворачиваться на угол  $45^\circ$ . Использование таких устройств позволяет определять и глубину заложения коммуникации. Если в траншее



находится несколько коммуникаций, то к каждой из них поочередно подключают генератор.

Точность определения положения коммуникации в плане и по глубине при небольших мощностях сигнала генератора (30-35 Вт) примерно одинаковая и зависит от глубины заложения  $h$  и диаметра  $d$  трубопровода:

$$m_s \approx m_h \approx 0,5(0,1h + d). \quad (5.22)$$

Так, при  $h = 3$  м,  $d = 120$  мм = 0,12 м  $m_s = m_h = 0,5(0,1 \cdot 300 \text{ см} + 12 \text{ см}) = 21$  см.

Дальность действия (расстояние от генератора до приемника) различна для разных типов трассоискателей: от 0,5 м до 10 км с фактическими точностями определений от 10 до 30 см.

Среди отечественных трассоискателей нашли применение ТКИ-1, ТКИ-2, ТПК-1, ВТР-IVM, ВТР-V, Абрис-12, ИК-50, Сталкер-2. Из зарубежных приборов можно указать D-Test 100 фирмы Bosh, приборы серий Easylos FL 10 фирмы Seba KMT, серий RD 4000 фирмы Radiodetection и др.

По техническим характеристикам все указанные приборы делятся на два класса. Приборы мощностью более 20 Вт и коэффициенте усиления не менее 10000 относятся к 1 классу, приборы мощностью до 20 Вт и коэффициентом усиления не менее 2000 относятся ко 2 классу.

Точность поиска трасс подземных коммуникаций определяется классностью прибора, наличием в грунтах блуждающих токов, наличием отводов от определяемой коммуникации и количеством другого вида коммуникаций, проложенных вблизи определяемой, состоянием грунтов (их влажностным и температурным режимом), числом муфт на линии и числом стыков, которые уменьшают мощность распространяемого по коммуникации электромагнитного сигнала, а также опытом наблюдателя.

Генераторы низкой частоты подключают к коммуникации различными способами: на два участка коммуникации, один из которых должен находиться на расстоянии не менее 20 м от генератора; на коммуникацию и «землю» через специальный заземляющий штырь; индуктивным присоединением с передающей шиной, обхватывающей трубопровод; индуктивным присоединением с передающей рамой ( в тех случаях, когда прибор работает в активном режиме).

Особое значение имеет разработка новых точных приборов для поиска и обследования подземных коммуникаций в настоящее время. Это связано с изменением технологии строительства трубопроводов и других систем. Если раньше строительство трубопроводов велось открытым способом, когда положение коммуникаций могло быть первоначально зафиксировано непосредственными измерениями, то при строительстве коммуникаций закрытым способом такая возможность не может быть реализована. В связи с этим контроль строительства и исполнительная съемка должны проводиться только специальными трассоискателями, обеспечивающими требуемую инструкцией точность определения объектов съемки в плановом и высотном положении.

## Глава 6

### ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Вопросы, изложенные в настоящей главе, по мнению авторов, являются весьма важными, поэтому данный раздел выделен в отдельную главу.

Здесь будут рассмотрены лишь некоторые особенности конструкции геодезических *оптико-электронных приборов*, области их применения, указаны технические характеристики нескольких типов приборов. Более подробную информацию по указанным вопросам сейчас легко найти в *Internet*.

#### § 56. Общие замечания

В настоящее время геодезическая и маркшейдерская службы в строительстве промышленных зданий, инженерных сооружений, проектировании и проведении горных выработок, при выполнении топографических съемок и решении специальных инженерных задач со своими традиционными методами и инструментами не всегда соответствуют уровню механизации строительства (при проектировании и геодезическом и маркшейдерском контроле). Здесь имеется в виду, что к традиционным геодезическим инструментам и методам пока мы относим оптические приборы различных конструкций, а также специфическую камеральную обработку полевых результатов измерений и графическую подготовку отчетной документации. К сожалению, наша отечественная промышленность (приборостроение) не обеспечивает в полной мере наши потребности в геодезических приборах нового поколения. Нельзя сказать, что в этом направлении не предпринималось никаких шагов. Выпускались и выпускаются оптико-электронные приборы (теодолиты, тахеометры, светодальномеры, нивелиры, лазерные приборы и др.). Многие из них нашли широкое применение в геодезическом и маркшейдерском производстве. Речь идет о массовом применении оптико-электронных приборов нового поколения, значительно облегчающих полевые измерения и практически исключая камеральные работы, в том числе и графические. Имеются приборы, которые позволяют после грубой первичной установки полностью автоматически измерять направления (углы) и расстояния.

Современный рынок геодезических приборов представлен в большинстве своем зарубежными образцами различного назначения и точности. При их сравнительно высокой стоимости не все геодезические и маркшейдерские службы на предприятиях имеют возможность приобрести такое оборудование.

Совершенствование геодезических приборов нового поколения идет такими высокими темпами, что через 10-15 лет, а то и менее, на смену современным оптико-электронным приборам придут новые приборы, с большими возможностями автоматизации полевых и камеральных работ. Так, как это

случилось за короткий срок в области электронно-вычислительной техники, телекоммуникаций и мн.др. Все эти превращения произошли на глазах нашего, старшего поколения. Не будет ошибкой сказать, что в вашем представлении, студентов и молодых специалистов, телевизоры были всегда, калькуляторы – тоже, и в космос человек полетел исторически давно, а не 40-45 лет назад. Это естественно для человека. И о приборах нового поколения, о части из которых будет рассказано ниже, через 10-15 лет будут говорить как о давно прошедшем времени.

## § 57. Краткие сведения о лазерных источниках излучения

*Лазер* в переводе с английского означает «усиление света за счет вынужденного излучения».

В основу действия лазера положено усиление электромагнитных колебаний при помощи вынужденного излучения атомов и молекул какого-либо вещества. Вследствие волновых свойств электронов, их движение вокруг ядра происходит не по орбитам, а в некоторой области, в которой наиболее вероятным местом является орбита определенного радиуса. Движущийся вокруг ядра электрон обладает определенной энергией (квантовым числом), величина которой определяется дискретными значениями.

Обозначим условно энергетическое состояние электронов, находящихся на разных орбитах (рис. 6.1).  $E_i$  – потенциальная энергия электрона, находящегося на орбите  $i$ . Чем дальше орбита от ядра, тем больше потенциальная энергия электрона, населяющего эту орбиту. В основном, нормальном состоянии электроны распределяются по орбитам так, чтобы атом обладал наименьшей из всех возможных энергией  $E_0$ . Это значит, что ближние к ядру орбиты заполняются электронами полностью, до предела, а незаполненными могут быть только дальние орбиты. При воздействии на атом электромагнитного излучения (нагревании, облучении светом, бомбардировании потоком элементарных частиц и т.п.) атом возбуждается, его электроны переходят на более высокие орбиты, и энергетическое состояние может быть записано в виде  $E_0' > E_0$ . Возбужденных состояний атома может быть несколько, и время пребывания атома в таком состоянии ограничено. Например, для водорода оно составляет около  $10^{-8}$  с. При переходе атома

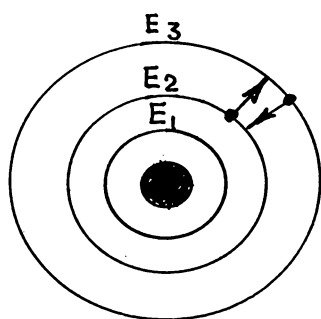


Рис. 6.1. Энергетические уровни атома

из состояния  $E_m$  в состояние  $E_n$  происходит выделение или поглощение энергии на частоте

$$\nu = \frac{E_m - E_n}{h}, \quad (6.1)$$

где  $h$  – постоянная Планка. При  $E_m > E_n$  энергия выделяется, а в обратном случае – поглощается. Каждому переходу соответствует определенная спектральная линия с длиной волны

$$\lambda = \frac{c}{\nu}, \quad (6.2)$$

где  $c$  – скорость света.

Если процесс перехода атомов вещества в другое энергетическое состояние является самопроизвольным (хаотичным), то спектр излучения получается широкополосным (как излучение Солнца).

В лазерах создается вынужденное (индуцированное) излучение под воздействием внешнего электромагнитного излучения. При этом атомы вещества излучают энергию согласованно, с одинаковой частотой (длиной волны). Такое излучение называют *когерентным*. Когерентное излучение характеризуется, кроме того, одинаковой фазой, поляризацией и направленностью.

Для того, чтобы получить вынужденное когерентное излучение необходимо выполнить следующие условия.

Условие 1. Условие резонанса, которое подразумевает совпадение частоты волны, вызывающей индуцированное излучение, с одной из частот энергетического спектра активного (рабочего) вещества.

Условие 2. Оно связано с переводом электронов с нижних заселенных уровней на более высокие «разрешенные» уровни. Для осуществления генерации излучения необходимо, чтобы верхний уровень был заселен больше, чем нижние. Это достигается за счет т.н. накачки, т.е. непрерывного подведения электромагнитной энергии извне.

Для управления индуцированным излучением необходимо, чтобы часть излучаемой световой энергии все время оставалась внутри рабочего вещества, что позволит дополнительно вынуждать к индуцированному излучению все больше и больше атомов. Эта задача решается с помощью оптических резонаторов (рис. 6.2), представляющих собой плоские или сферические зеркала. Рабочее вещество помещается между зеркалами. Одно из зеркал полупрозрачное, что позволяет части энергии выходить из системы, а другую часть – возвращать внутрь для возбуждения других атомов. В резонаторе при его настройке возникает стоячее световое поле, если в промежутке  $L$  укладывается целое число волн рабочей частоты.

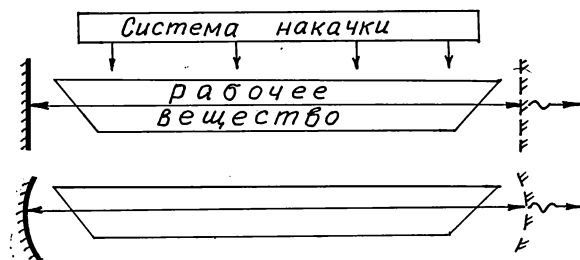


Рис. 6.2. Оптические резонаторы

Излучение лазеров отличается от обычных источников света, например, лампы накаливания, высокой интенсивностью, монохроматичностью, направленностью и спектральной плотностью мощности. Степень монохроматичности определяется соотношением

$$M = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_o}, \quad (6.3)$$

где  $\Delta \lambda = 0,5(\lambda_{MAX} - \lambda_{MIN})$  – полуширина полосы излучения с центром  $\lambda_o$ .

Рабочие (активные) вещества могут быть газообразными и твердотельными. В газовых лазерах используют смеси гелий-неон (He-Ne) в соотношении 5:1. В твердотельных лазерах в качестве рабочего вещества используют искусственные кристаллы рубина, изумруда, германия. В полупроводниковых лазерах – арсенид галлия.

Газовые He-Ne лазеры излучают на длине волны  $\lambda_o = 0,6328$  мкм. Их КПД составляет от 0,1 до 0,01%, выходная мощность от 0,1 до 0,001 Вт. Срок службы – 10000 часов непрерывной работы.

Рубиновый лазер излучает на длине волны  $\lambda_o = 0,6943$  мкм. Формируются световые импульсы с длительностью  $10^{-3}$  с. На основе рубиновых лазеров создано много светодальномеров, точность которых составляет 5-10 мм при дальности действия 10 км.

КПД полупроводниковых лазеров может быть весьма высоким, близким к 100%, но в современных конструкциях он пока достигает немногим более 50%. Выходная мощность полупроводниковых лазеров до 10 Вт при температуре рабочего вещества жидкого азота. При комнатной температуре мощность излучения сравнима с мощностью излучения газовых лазеров.

Большое значение имеет расходимость светового пучка (угловая расходимость). Она зависит от качественных характеристик резонатора, от количества колебаний в резонаторе. У газовых лазеров расходимость светового пучка достигает 5'-10', у твердотельных – до 15° – 20°. Расходимость определяет плотность энергии в световом пучке. При меньшей расходимости (при тех же выходных характеристиках) плотность энергии будет больше.

## § 58. Электромагнитные дальномеры

*Электромагнитные дальномеры* – это устройства для измерения расстояний по времени распространения электромагнитных волн между конечными точками линии. При этом предполагается, что скорость распространения электромагнитных колебаний в момент измерений известна и постоянна.

Для определения скорости распространения электромагнитных волн в атмосфере используют формулу

$$V = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}}, \quad (6.4)$$

где  $n$  – показатель преломления атмосферы на пути электромагнитного излучения, который зависит от магнитной проницаемости  $\mu$  и диэлектрической постоянной  $\varepsilon$ . В свою очередь, значения  $\mu$  и  $\varepsilon$  зависят от плотности воздуха и частоты использованных колебаний. При качественном учете метеоусловий остаточная погрешность в определении расстояния составляет 1:500000.

При измерении коротких расстояний (до 1-2 км) точность измерений определяется, в основном, погрешностями измерения времени нахождения светового пучка в пути, при расстояниях в десятки километров – погрешностями в определении показателя преломления воздуха. Скорость распространения электромагнитных колебаний в вакууме известна с высокой точностью ( $c = 299792458$  м/с). Точность измерения времени в настоящее время составляет примерно  $10^{-10}$  с, что соответствует расстоянию в 1-2 см. Такие дальномеры относят к точным.

В зависимости от вида используемых электромагнитных колебаний дальномеры делят на свето- и радиодальномеры. В зависимости от характера излучения – на импульсные и фазовые.

Все электромагнитные дальномеры состоят из двух основных частей – приемопередатчика и отражателя, устанавливаемых в конечных точках линии.

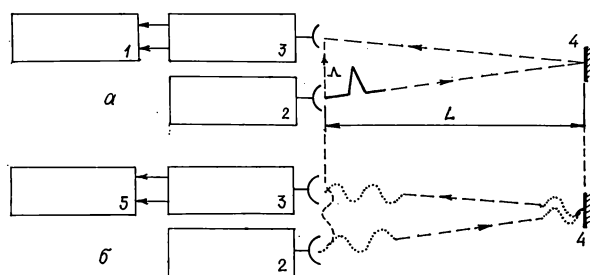


Рис. 6.3. Способы измерения расстояний: импульсный (а); фазовый (б)

При импульсном способе измерения расстояний (рис. 6.3 а) передатчиком 2 генерируются импульсы, которые направляются в сторону отражателя 4. От отражателя импульсы попадают на приемное устройство 3, которое отправляет эту информацию в индикатор времени 1, где регистрируется время

начала посылки импульса и момент его прихода от отражателя. Таким образом, регистрируется время  $\tau$  нахождения импульса в пути на двойном расстоянии. Импульсы излучаются через равные промежутки времени с высокой частотой.

Импульсные дальномеры имеют сравнительно невысокую точность (от 1,5 до 150 м), но обладают большой оперативностью, что целесообразно использовать для измерения расстояний до движущихся объектов. Наиболее точные импульсные дальномеры применяют в аэрофотосъемке для определения высоты фотографирования (точность измерений составляет 1,2 м в равнинной и до 2 м в горной местности).

Принципиальная схема фазового дальномера приведена на рис. 6.3 б.

Передатчик 2 непрерывно излучает и направляет в сторону отражателя электромагнитные колебания с частотой  $f$ . Часть сигнала ответвляется на фазометр 5 (опорный сигнал). После отражения на приемник 2, а затем – на фазометр, поступает отраженный сигнал:

$$\begin{aligned}\varphi_{оп} &= 2\pi ft + \psi \\ \varphi_{отр} &= 2\pi f(t - \tau) + \psi\end{aligned}\quad (6.5)$$

где  $\psi$  – начальная фаза колебаний при  $t = 0$ .

Разность фаз этих колебаний

$$\Delta\varphi = \varphi_{оп} - \varphi_{отр} = 2\pi f\tau, \quad (6.6)$$

откуда

$$\tau = \frac{\varphi_{оп} - \varphi_{отр}}{2\pi f} = \frac{\varphi_{оп} - \varphi_{отр}}{T}, \quad (6.7)$$

где  $T$  – период колебаний.

Современные фазовые дальномеры позволяют измерять расстояния с точностью от 1,5 до 15 мм, т.е. в пределах нескольких миллиметров.

## § 59. Светодальномеры

Достоинство *светодальномеров* заключается в возможности сведения светового потока с помощью сравнительно простых и небольших по размерам оптических систем (антенн) в узконаправленный луч с высокой плотностью энергии в его поперечном сечении (использование лазерных источников излучения). Для светодальномеров характерна практическая прямолинейность светового луча. При использовании лазерных источников излучения практическая дальность действия в чистой атмосфере составляет 40-60 км. На рис. 6.4 приведена более полная схема фазового светодальномера. Он состоит из передатчика, включающего в себя источник излучения 6, оптическое устройство формирования светового потока 1, модулятор колебаний 2 и оптическую передающую систему 3, отражателя 4, установленного в конечной точке линии, приемника, включающего приемную оптическую систему 8 с приемником излучения 9. В состав прибора входит генератор частоты 5, фазовращатель 7, который определяет значение  $\tau$ , а

также регистрирующее устройство, выдающее значение измеренного расстояния.

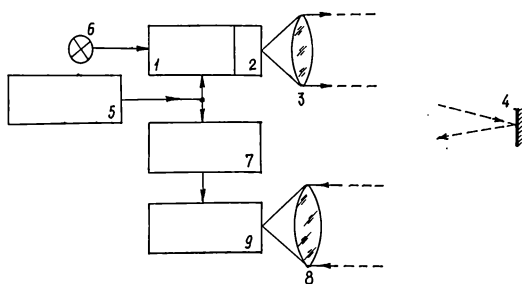


Рис. 6.4. Схема фазового светодальномера

Модуляторы изменяют излучение по амплитуде, частоте, фазе или плоскости поляризации излучения. Модуляторы должны обеспечивать изменение параметров излучения на высоких частотах (до 100 – 150 МГц) с возможным плавным изменением указанной

частоты в широком диапазоне. Модуляторы должны обладать малыми потерями света с целью обеспечения необходимой энергии выходного пучка, определяющей дальность действия прибора.

Часто оптические передающая и приемная системы конструктивно объединены в одну (приемопередатчик).

Оптические системы подразделяют на двухтрубные, однотрубные коаксиальные или разделенные, однотрубные совмещенные. По конструкции они бывают линзовыми и зеркально-линзовыми (рис. 6.5).

Оптическая схема рис. 6.5 а применяется в отечественных светодальномерах СВВ-1, СТ, СГ-3 и др. Система рис. 6.5 б используется в шведских

светодальномерах «Геодиметр». Система рис. 6.5 в применяется в светодальномерах «Кристалл».

При измерениях используют пассивные зеркально-линзовые и трипель-призменные отражатели (рис. 6.5 *г, д, е*). Конструкция отражателя позволяет возвращать световой пучок по тому же направлению, по которому он пришел на отражатель, т.е. точно в направлении на приемное устройство. При измерении больших расстояний, с целью увеличения отраженного сигнала, применяют уголковые отражатели, которые представляют собой блок из нескольких трипельпризм.

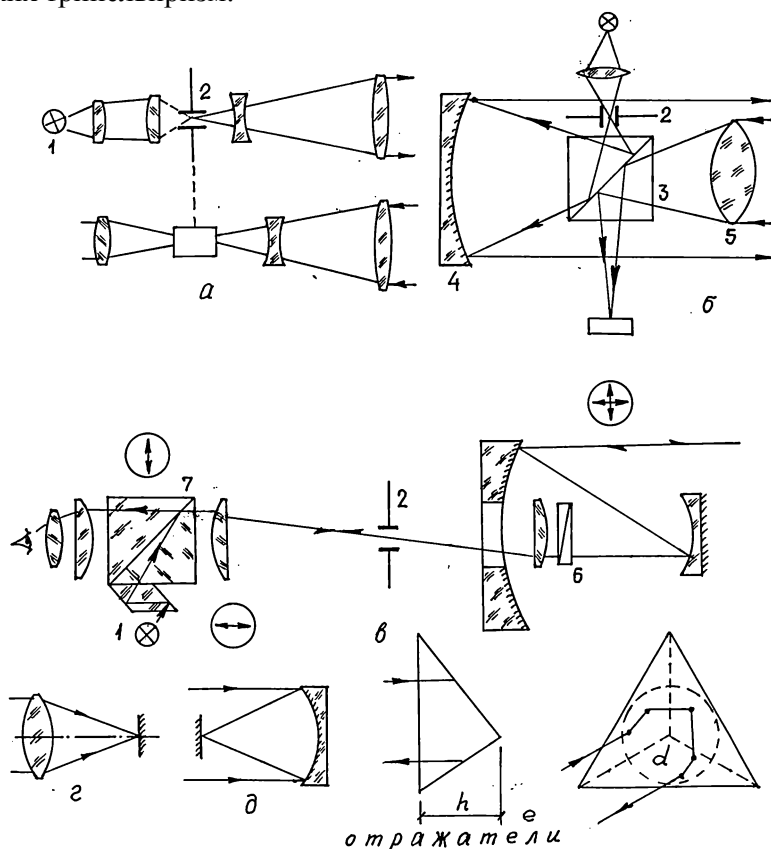


Рис. 6.5. Оптические системы, применяемые в светодальномерах:

*а* - линзовая двухтрубная; *б* - совмещенная зеркально-линзовая коаксиальная; *в* - зеркально-линзовая совмещенная; отражатели: *г* - зеркально-линзовый; *д* - двухзеркальный со сферическим зеркалом; *е* - трипельпризма; 1 - источник излучения; 2 - модулятор; 3 - светоразделительная призма-куб; 4 - сферическое зеркало передатчика; 5 - оптическая система приемника; 6 - четвертьволновая пластина; 7 - биполяризатор

Если коэффициент отражения объекта составляет 15-20%, то при использовании лазерного источника излучения можно работать без отражателя (по стене дома белого цвета и др.). В настоящее время применяют пленочные отражатели, приклеиваемые на конструкции сооружений, в том числе и в недоступных местах. Пленочный отражатель имеют широкую диаграмму



отражения светового сигнала, что позволяет производить измерения и при боковых на него направлениях светового пучка от передатчика.

В табл. 6.1 приведены характеристики некоторых светодальномеров, используемых геодезическими и маркшейдерскими службами.

Таблица 6.1

Тип	Страна	Точность измерений	Дальность действия, м
ЗСМ-2 «Блеск»	Россия	2 см	2 – 3000 (5000)
СТ-5	Россия	(10+5D <sub>км</sub> )мм	50 – 5000
2СТ-10	Россия	(5+3D <sub>км</sub> )мм	200 – 10000
СП-22 «Топаз»	Россия	(1+D <sub>км</sub> )мм	
СП-03(ДК 001)	Россия	(0,5+1,5D <sub>км</sub> )мм	0,5 - 300
СМ-5	Россия	50 мм	2 – 500
МСД-2Ц	Россия	10 мм	1 – 200
Д1-001	Россия	0,7 мм + 1,5 мм/км	0,5 – 500
ДВСД-1200	Россия	0,25 мм + 1 мм/км	0,5 – 250
«Лейка»	Швейцария	2 мм	До 50
ME-3000	Швейцария	0,2 мм + 1 мм/км	1 - 3000
PED-MINL	Япония	5 мм + 5 мм/км	1 - 800

## § 60. Интерферометры

Эта группа приборов предназначена для высокоточного измерения весьма малых расстояний. Такие приборы используются для компарирования мерных приборов, создания эталонов, высокоточного и точного смещений объектов и весьма малых скоростей перемещений.

*Интерферометр* – это прибор, в котором производится пространственное разделение двух световых лучей и создание между ними разности хода с целью получения интерференционной картины, по которой и определяют измеряемую величину.

В 1960 г. в качестве эталона единицы длины приняли длину волны излучения оранжевой линии изотопа криптона с массовым числом 86 (86Kr), равную  $6067,8021 \cdot 10^{-10}$  м. Погрешность ее воспроизведения составляет  $5 \cdot 10^{-15}$  м или в относительной форме –  $10^{-8}$ . В вакууме в 1 м укладывается 1650763,73 длин волн этого излучения.

Существуют различные схемы интерферометров (рис. 6.6).

В интерферометре Майкельсона (рис. 6.6 а) пучок лучей от источника излучения (лазера) делится полупрозрачной пластиной А на два одинаковых (1 и 2), которые под прямыми углами падают на зеркала З<sub>1</sub> и З<sub>2</sub>, отражаются от них в обратном направлении и после прохождения через пластину А (пластина В используется для компенсации разности хода лучей 1 и 2) попадают на экран. Если между пучками лучей 1 и 2 существует разность хода, то они интерферируют между собой, образуя на экране Э систему колец или полос. Перемещение полос интерференционной картины вызывается смещением одного из зеркал. При смещении зеркала на половину длины волны интерференционная картина сдвигается на одну полосу. Зная длину

волны излучения и число переместившихся полос, можно определить общее смещение зеркала.

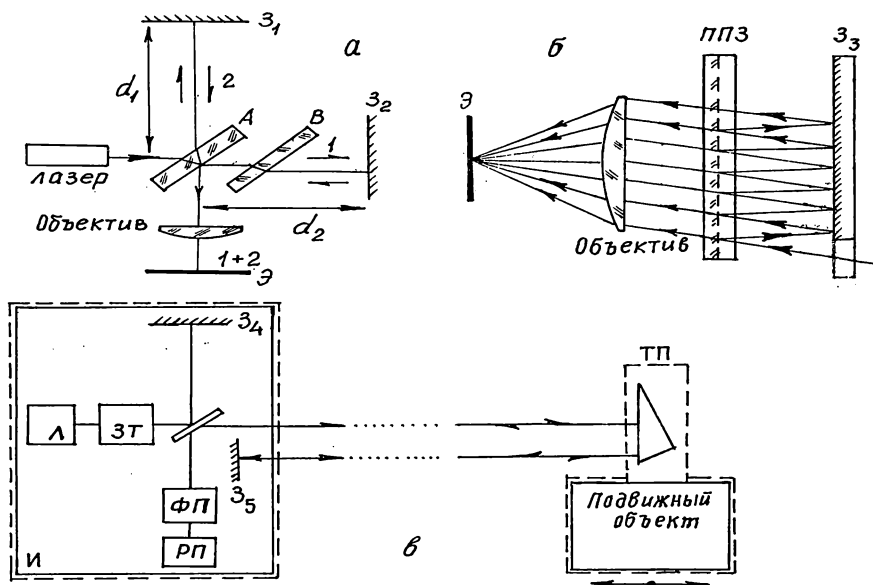


Рис. 6.6. Схемы интерферометров.

Предположим, что в качестве источника излучения используется He-Ne лазер с длиной волны 0,6328 мкм. Считаем, что точность регистрации смещения полосы равна 0,1 от расстояния между полосами. Смещение на половину длины волны, т.е. на 0,3164 мкм (0,0003164 мм) вызовет смещение на 1 полосу с точностью регистрации 0,03164 мкм = 0,00003164 мм. Пусть такое перемещение совершается за 1 с, тогда за 1 час общее смещение составит примерно 0,114 мм, за сутки – 2,7 мм. Следует отметить, что такая скорость перемещения зарегистрируется прибором весьма быстро. Т.е. оперативно можно получить информацию о состоянии объекта. Обычными методами такую информацию получить проблематично.

Интерферометр Фабри-Перо (рис. 6.6 б) содержит непрозрачное (3<sub>3</sub>) и полупрозрачное (ППЗ) зеркала. Интерференционная картина в нем создается за счет многократных переотражений входящего светового пучка. В качестве источника излучения используется He-Ne лазер.

В лазерном интерферометре (рис. 6.6 в) одно из отражающих зеркал располагается на точке или подвижном объекте вне прибора и представляет собой трипелъпризму ТП (для возвращения светового пучка) в комплекте с отражающим зеркалом 3<sub>5</sub>, жестко закрепленном в приборе. Световой поток от источника Л формируется телескопической оптической системой ЗТ и расщепляется элементом А на два. Первая часть излучения зеркалом 3<sub>4</sub> направляется на фотоприемное ФП и регистрирующее РП устройства по

небольшому оптическому пути, а вторая часть проходит двойной путь - от прибора И до трипельпризмы ТП и обратно.

Скорость перемещения трипельпризмы ограничена инерционностью фотоприемников и составляет примерно 20 м/мин. Точность измерений весьма сильно зависит от показателя преломления воздуха. Показатель преломления требуется измерять с точностью до  $10^{-7}$ . Для повышения точности используют термостатированные помещения, вакуумные световоды.

Таблица 6.2

Модель	Страна	Пределы измерений, м	Точность измерений, мкм	Скорость перемещения отражателя, м/мин
ИПЛ	Россия	0 - 1	$(1 + 5 \cdot 10^{-7}L)$	1,5
Интерферометр с вакуумным световодом	Россия	0 - 50	0,01	$2 \cdot 10^{-3}$
ДИП-2	Россия	0 - 60	$(2 + 10^{-7}L)$	-
5900-R	США	0 - 0,6	$(1 + 5 \cdot 10^{-7}L)$	9
HP35525P	США	0 - 60	$(1 + 5 \cdot 10^{-7}L)$	18
Mark II	США	0 - 45	$(1 + 5 \cdot 10^{-7}L)$	10
МК-1	Англия	0 - 5	1	18
65-L	ФРГ	0 - 10	1 мкм/м	18
LA-3000	Чехия	0 - 10	$5 \cdot 10^{-7}L$	-

С вакуумным световодом изготовлен интерферометр для измерения медленных смещений земной коры, регистрации сейсмических волн, изучения осадков и деформаций фундаментов уникальных сооружений. Основной отличительной особенностью этого прибора является наличие световода, который представляет собой секцию стальных труб диаметром 60 см и длиной 3,5 м каждая. Секции соединены между собой через вакуумный уплотнитель, а внутри них создан вакуум порядка 1 Па. Вакуумный световод располагается на пути распространения световых лучей между прибором и трипельпризмой при использовании, например, схемы рис. 6.6 в. В этом случае значительное ослабление влияния атмосферы позволяет увеличить точность измерений.

В табл. 6.2 приведены характеристики некоторых интерферометров.

## § 61. Угломерные приборы

Для производства угловых измерений применяют *кодовые теодолиты*, которые имеют преобразователь «угол-код». Они позволяют частично автоматизировать процесс измерений.

Кодовые теодолиты делят на две группы: *с фотографической регистрацией* и *с цифровым табло*.

В кодовых теодолитах угломерные круги не делят на градусы или грады, т.е. ими нельзя пользоваться как оптическими теодолитами. В них применяется такая система обозначений измеряемой величины, чтобы число знаков

для передачи информации было наименьшим и чтобы полученную информацию можно было ввести в вычислительное устройство.

Лимб теодолита делят на чередующиеся равные черные и белые (просвечивающиеся) полосы (рис. 6.7), соответствующие двум знакам двоичного кода (0 и 1). При просвечивании такого диска лучи света освещают через прозрачную полосу фотоприемник; в результате получается сигнал «1», а в непросвечивающихся частях – сигнал «0». На каждой дорожке число полей удваивается. Для лимба с 20-ю кодовыми дорожками цена деления минимального разряда составляет  $\Delta = 360^\circ / 2^{20} \approx 1,2''$ . Ограничения по точности – технологические. При диаметре лимба, равном, например, 400 мм, минимальный интервал считывания составит всего несколько микрометров, что определяет размеры окна фотоприемника.

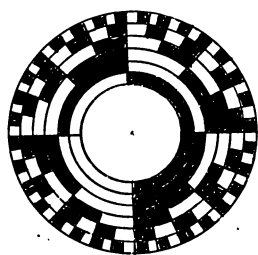


Рис. 6.7. Горизонтальный круг кодового теодолита

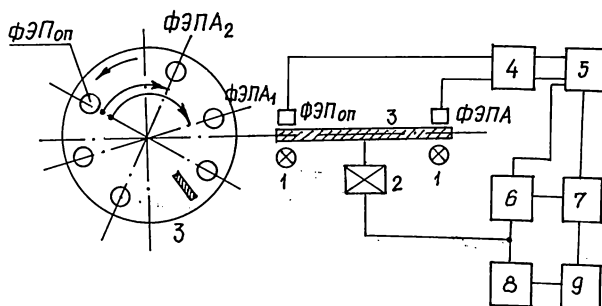


Рис. 6.8. Принципиальная схема теодолита с преобразователем «угол-код»

В других конструкциях кодовых теодолитов используют строгую зависимость между углом поворота  $\alpha$  и временем  $\tau$  при условии, что угловая скорость вращения  $\omega$  (рад/с) постоянна:

$$\alpha = \omega \tau \quad (6.8)$$

В этом методе в углоизмерительном устройстве задается опорное направление с помощью фотоприемника ФЭП<sub>оп</sub>, связанного с основанием теодолита, и источника света 1, вращающегося с постоянной угловой скоростью (рис. 6.8). Другой фотоприемник, ФЭПА (алиады 1 или алиады 2) жестко связан со зрительной трубой теодолита (с колонкой). За один оборот диска 3 сигнал от источника света попадает на опорный фотоприемник и фотоприемник, скрепленный со зрительной трубой. Временной сигнал  $\tau$  между двумя импульсами прямо пропорционален измеряемому углу. В схеме применяют по два фотоприемника с целью исключения эксцентриситета алиады.

Сигналы от фотоприемников поступают на усилитель и формирователь импульсов 4, связанный с измерителем времени 5. Необходимую частоту задает кварцевый генератор 6. Устройство управления и вычислительное устройство 7 формируют сигнал определенного вида для преобразователя 9 и регистрирующего устройство 8.

Для высокоточных работ время необходимо измерять с относительной погрешностью  $10^{-6}$  (не более). При этих условиях погрешность в измерении угла составит примерно  $1,3''$ , считая, что угловая скорость постоянна.

Высокая стабильность вращения источника света обеспечивается использованием синхронных многополюсных электродвигателей 2, частота питания которых стабилизирована от кварцевого генератора 6. Угловая скорость большинства приборов поддерживается с погрешностью порядка  $10^{-5}$ .

Кодовые теодолиты не позволяют полностью автоматизировать весь процесс измерений, поскольку наблюдателем выполняются операции по установке теодолита в рабочее положение, наведению на цель и др. При этом считается, что наиболее серьезные затруднения связаны именно с автоматизацией установки приборов и наведением на цель. Однако и автоматизация отсчетов – это весьма большой шаг по сравнению с использованием обычных оптических теодолитов. Полевые измерения во многих случаях вручную не обрабатываются, данные регистрируются в портативном бортовом носителе информации, а затем расшифровываются уже в стационарных условиях на ЭВМ.

Таблица 6.3

Марка	Страна	Увеличение (крат)	Угол поля зрения	Точность измерений (гориз/верт), сек
ТК-15	Россия	32	$1^{\circ}30'$	15/15
ТТ-11 (на базе Т2)	Россия	27,5	$1^{\circ}30'$	5/13
ТК	Россия	25	$1^{\circ}30'$	Технический
FLTЗК	ФРГ	26	$1^{\circ}20'$	Технический и средней точности
КО-В1	Венгрия	36	$1^{\circ}15'$	0,7/1,0

Характеристики некоторых кодовых теодолитов приведены в табл. 6.3. Для примера здесь указаны теодолиты различных классов точности, от технических до высокоточных.

Для угловых измерений используют также лазерные сканирующие теодолиты, которые позволяют в непрерывном режиме определять угловые координаты движущихся объектов, либо в течение длительного времени определять угловые координаты неподвижных объектов. Вместо визирной оси в пространстве предмета лазерный теодолит формирует узконаправленный световой луч (пучок света). Визирная марка представляет собой обычно плоский отражающий экран с нанесенными на нем рисками. Эти риски совмещают при измерениях с точками конструкции сооружения.

Лазерные теодолиты автоматически осуществляют поиск цели, наведение на нее, регистрацию направления и обработку информации. Скорость измерений достигает до нескольких сотен единиц в секунду и не зависит от количества наблюдаемых точек.

Сканирующий лазерный пучок разворачивается по определенному закону в пространстве измерений. В результате развертки освещаются визирные цели и от них приходит отраженный сигнал.

В настоящее время используются следующие лазерные теодолиты: ЛСТ4 (точность измерения углов техническая, от 0,5' до 1,0'); ЛСТ2 (точность измерений от 2" до 20" в зависимости от режима работы); лазерная контрольно-измерительная система ЛКИС (точность 3", дальность действия 3 км). Все указанные лазерные теодолиты – отечественные.

## **§ 62. Электронные тахеометры**

*Электронный тахеометр* – это кодовый теодолит, объединенный со светодальномером.

С помощью электронного тахеометра в настоящее время достигается максимальная (но еще не максимально возможная) автоматизация полевых и камеральных работ. В полевых условиях автоматически регистрируются горизонтальные углы, углы наклона, зенитные расстояния, линейные расстояния, плановые и высотные координаты точек местности по результатам привязки к исходным пунктам, в том числе – координаты станции. Информация обрабатывается бортовым компьютером, накапливается и хранится. При этом съёмочные точки в кодированном виде затем могут быть переведены по их координатам и принадлежности той или другой ситуации в графическое изображение. Для этого уже используется стационарная ЭВМ, в которой информация дополнительно обрабатывается и передается пользователю в необходимом виде (топографические планы, профили, разрезы, ведомости координат и высот и т.п.).

В настоящее время ведутся работы по созданию электронных тахеометров с речевым вводом дополнительной информации не измерительного вида.

Электронные тахеометры используют практически при проведении всех геодезических работ, связанных с измерениями: создание опорных сетей, топографические съемки, работы при инженерных изысканиях в строительстве, измерениях деформаций земной поверхности и инженерных сооружений, при маркшейдерских работах в горных выработках и др.

В состав электронного тахеометра входит кодовый теодолит, светодальномер, встроенная ЭВМ, функциями которой является как обработка информации, так и управление прибором. Клавиатура управления прибором находится с двух сторон, для обеспечения возможности работы при двух положениях круга. В комплект прибора входят трипельпризменные отражатели и вехи, на которые они устанавливаются.

Электронные тахеометры делятся на две группы: с визуальным съёмом информации и с автоматическим съёмом информации. В первом случае значения углов с помощью клавиатуры вводятся в ЭВМ вручную, во втором – автоматически. Наклонные расстояния вводятся автоматически и в той и другой группах приборов.

В табл. 6.4 приведена лишь небольшая часть электронных тахеометров, имеющих на рынке геодезических приборов.

Таблица 6.4

Марка	Страна, фирма	Точность измерений (гор/верт), сек	Дальность действия, м	Точность измерения расстояний, мм
Та 5	Россия	6/11	5 - 3000	20
Та 3	Россия	4/6	5 - 5000	$(10+5 \cdot 10^{-6}D)$
3Та 5«Р» 3Та 5С	Россия (северного исп.)	5	До 2000	$(5+3 \cdot 10^{-6}D)$
SET 230R	Sokkia	2	4000	2
SET 330R		3	4000	2
SET 530R		5	4000	2
SET 630R		6	3000	2
SET 210	Sokkia	2	2700	2
SET 310		3	2700	2
SET 510		5	2700	2
SET 510L		5	2700	2
GTS-603ME	TOPCON	3	3000	2
GTS-605ME		5	3000	2
GTS-226		6	3000	2
GTS-229		9	2000	3
GPT-2005		5	7000	3
GPT-2006		6	7000	3
GPT-2009		9	4000	3
Elta	ФРГ			
C 20 Move		2	до 2500	$(2+2 \cdot 10^{-6}D)$
C 20 Sprim		2	до 2500	$(2+2 \cdot 10^{-6}D)$
S 10 Move		1	до 2500	$(1+2 \cdot 10^{-6}D)$
Per-Elta 14		3/5	до 2000	5 – 10
Elta R 45		3	до 1300	$(3+3 \cdot 10^{-6}D)$
Elta R 50		3	до 1300	$(3+3 \cdot 10^{-6}D)$
Elta R 55		3	до 1300	$(5+3 \cdot 10^{-6}D)$
Geodimeter 600	Швеция	5/10 град.сек	до 5000	$(5+10^{-6}D)$
R-300N (серия)	PENTAX (Япония)	2 - 6	до 4500	$(3+2 \cdot 10^{-6}D)$
NTS 320	SOUTH	2	до 2600	$(2+2 \cdot 10^{-6}D)$
NTS 350		5	до 2600	$(3+2 \cdot 10^{-6}D)$
DTM 352	Nikon	5	2300	$(3+2 \cdot 10^{-6}D)$
DTM 332		5	2300	$(3+2 \cdot 10^{-6}D)$

Из отечественных приборов в настоящее время для геодезических работ наиболее широко используются электронные тахеометры Та5 и Та3. На рис. 6.9, 6.10 и 6.11 приведены разрезы указанных тахеометров для общего представления вообще об электронных тахеометрах и особенностях их конструкций.

В тахеометре Та5 объектив зрительной трубы используется одновременно как часть визирного, передающего и принимающего устройства.

Отсчет углов производится визуально с последующим введением их значений в ЭВМ с помощью клавиатуры, расположенной на панели управления. Ввод производится от младших разрядов к старшим.

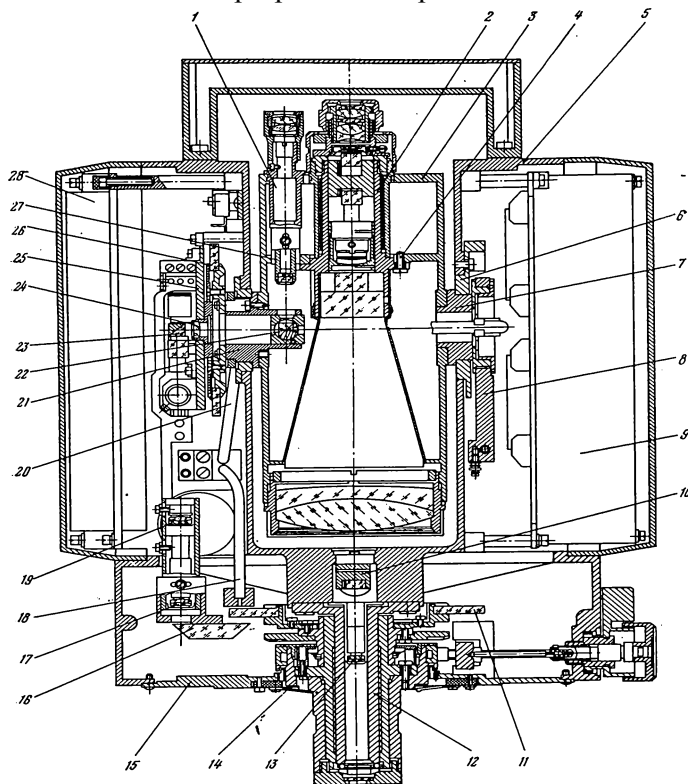


Рис. 6.9. Электронный тахеометр Та5 (разрез спереди).

1 – отсчетный микроскоп; 2 – втулка; 3 – корпус; 4 – винт крепления зрительной трубы; 5 – колонка; 6 – лагера; 7 – цапфа; 8 – хомут; 9 и 28 – блоки электроники; 10 – призма оптического отвеса; 11 – горизонтальный круг; 12 – вертикальная ось; 13 – объектив оптического отвеса; 14 – контакт; 15 – крышка; 16 – призма; 17 и 19 – объектив отсчетной системы горизонтального круга; 18, 20 – световоды подсветки; 21 – цапфа; 22 и 23 – призмы; 24 – шкала; 25 – деталь крепления зрительной трубы; 26 – вертикальный круг; 27 – объектив микроскопа

При поверках и исследованиях Та5 среднюю квадратическую погрешность измеряемого горизонтального угла определяют измерением угла в  $60^\circ$  –  $120^\circ$  12-ю приемами с перестановкой горизонтального круга после приема примерно на  $15^\circ$ . Среднюю квадратическую погрешность измеряемого зенитного расстояния определяют по измерениям не менее четырех зенитных расстояний, известных с погрешностью не более 2".

Среднюю квадратическую погрешность измерения расстояний определяют по измерениям интервалов контрольного базиса, аттестованных с погрешностью не более 5 мм. Каждый интервал базиса должен быть измерен не менее, чем четырьмя приемами. Прием состоит из четырех наведений на отражатель, при каждом наведении берут три отсчета.



Тахеометр Та3 может работать в условиях вибраций, для чего он снабжен самоустанавливающимся индексом (компенсатором) вертикального

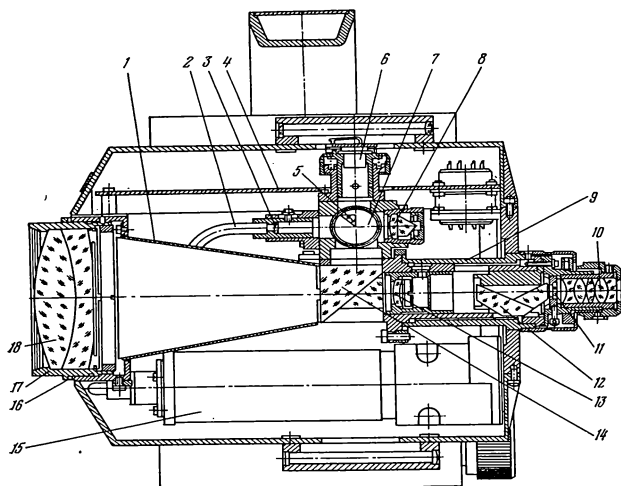
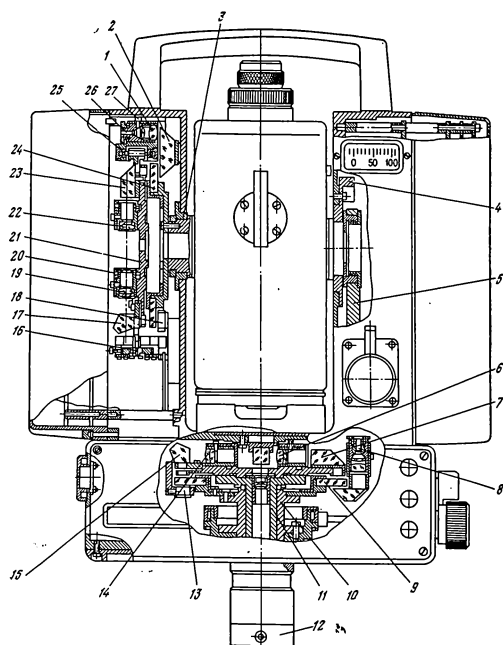


Рис. 6.10. Электронный тахеометр Та5 (разрез сбоку, без основания)

1 – корпус зрительной трубы; 2 – жгут (стекловолокно); 3 – диафрагма; 4 – блок сигнального канала; 5 – призма; 6 – лазерный диод (излучатель); 7 – переключатель (отражатель-дистанция); 8 – трипельпризма отражателя; 9 – кремальера; 10 – окуляр; 11 – сетка; 12 – призма Аббе (для оборачивания изображения); 13 – фокусирующая линза; 14 – блок призм; 15 – фотоэлектронный умножитель; 16 – компенсационное кольцо; 17 – оправа объектива; 18 – объектив



1 – конденсор; 2 – призма оборачивающей системы; 3 – 3 и 4 – лагеры; 5 – хомут; 6 и 14 – система линз мостика горизонтального круга; 7 и 15 – концевые призмы (призма с крышей – 7, пентапризма 15); 8 – светодиод с конденсором; 9 – горизонтальный круг; 10 – втулка; 11 – вертикальная ось; 12 – кронштейн; 13 и 18 – фотоприемники; 16 – пластина; 17 – пентапризма; 19 и 22 – система линз мостика вертикального круга; 20 – регулировочная (юстировочная) гайка; 21 – маятник компенсатора; 23 – призма с крышей; 24 – вертикальный круг; 25 – подшипник подвески компенсатора; 26 – светодиод; 27 – винт

Рис. 6.11. Электронный тахеометр Та3

круга. Информация обрабатывается и усредняется с учетом колебаний маятника компенсатора.

Светодалномер Та3 работает в импульсном режиме. Конструкция его подобна светодалномеру СТ5. Горизонтальное проложение и превышения вычисляются с учетом кривизны Земли и рефракции атмосферы для средних широт.

Зрительная труба Та3 подобна зрительной трубе Та5. Наведение зрительной трубы на отражатель производится по марке, расположенной на блоке отражателей, либо, при слабом сигнале, по максимальному его уровню.

Поверки тахеометра Та3 выполняются так же, как и поверки тахеометра Та5.

### § 63. Электронные нивелиры

*Электронные нивелиры* используют для определения отметок точек при инженерно-геодезических работах в промышленном и гражданском строительстве. Их пока не используют, или используют весьма мало при прокладке нивелирных ходов, поскольку эти нивелиры весьма дорогие и громоздкие, требуют автономного питания. Чаще их применяют для высокоточной передачи высот через водные препятствия, для нивелирования площадей, автоматизации геодезического контроля при движении строительных машин и механизмов.

В комплекте с электронным нивелиром используются специальные нивелирные рейки с фотоприемниками, либо штрих-кодовые рейки.

Имеются конструкции электронных нивелиров с разверткой светового луча в световую плоскость, что позволяет в течение небольшого времени получить информацию о большом числе точек (например, «Геоплан-300», Швеция).

На рис. 6.12 приведены конструкции некоторых электронных нивелиров, выполненных на базе оптических нивелиров известных конструкций.

В большей части лазерные нивелиры выполнены на базе уже известных конструкций нивелиров. Дополнением к ним является лазерная насадка Л (рис. 6.12 а и б). В одних случаях лазерное излучение системой зеркал или прямоугольных призм направляется непосредственно в зрительную трубу ЗТ нивелира, в других – лазерная насадка имеет автономную телескопическую систему ТС для формирования светового луча.

На базе немецкого нивелира Ni-007 в Канаде (Нью-Браксвикский университет) разработан лазерный нивелир, представленный на рис. 6.12 в. Этот нивелир относится к точным и высокоточным приборам. На выходе оптической системы расходимость лазерного пучка составляет 20", диаметр светового пучка на выходе – 30 мм. На каждые 100 м увеличение диаметра светового пучка составляет примерно 2,5 мм. В качестве компенсатора наклона используется прямоугольная призма К, подвешенная в корпусе на

сравнительно длинных нитях П. Фокусирование изображения достигается перемещением в вертикальном направлении призмы компенсатора. Указанный прибор относится к приборам панорамного типа.

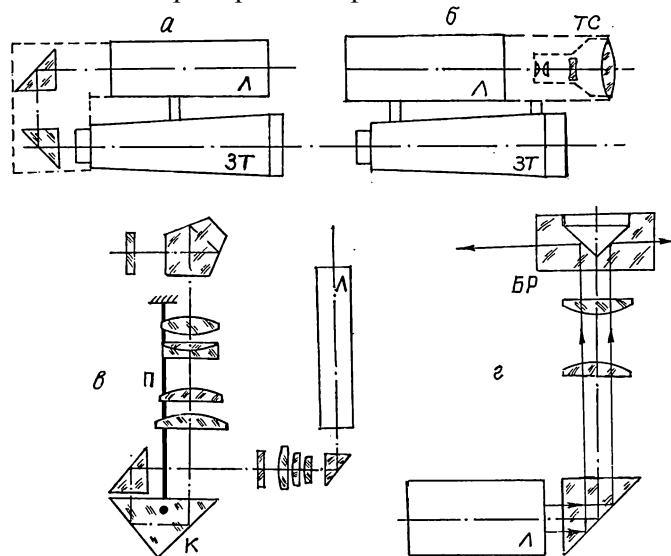


Рис. 6.12. Конструкции электронных нивелиров.

На рис. 6.12 г показан прибор, с помощью которого формируют световую плоскость. Пучок света от лазерного источника попадает на прямоугольную призму, оптическую систему и блок развертки изображения БР. Последний представляет собой цилиндрическое стеклянное тело, в центре которого выполнено конусообразное углубление. Световой поток отражается в пределах полного круга от полированных стенок углубления, в результате чего образуется непрерывная световая плоскость.

Часть приборов подобного типа имеют вращающуюся головку (пентапризму). В результате этого в пространстве предметов образуется сканирующий (вращающийся) горизонтальный луч. К таким приборам относятся «Геоплан-300№ (фирма «AGA Geotronics» - Швеция, Лазерплейн фирмы «Лазерплейн Корпорейшн» - США и др.

## § 64. Лазерные приборы

Лазерные источники излучения, кроме использования их в геодезическом и маркшейдерском приборостроении в теодолитах, дальномерах, нивелирах, применяются в конструкциях других приборов специального назначения для геодезического и маркшейдерского производства. Возможности этих приборов обеспечивают проведение и контроль технологических процессов строительства инженерных сооружений, для решения различных инженерно-геодезических и научно-технических задач. Предпочтение здесь имеют многоцелевые приборы, которые предназначены для контрольно-

измерительных операций в строительстве. Такие приборы должны давать возможность получения и развертки в пространстве горизонтальных и вертикальных световых пучков, а также обеспечивать возможность задания строгого направления пучка в течение длительного времени, определяемого технологическими этапами строительства. Указанные приборы используют в строительстве при установке различных конструкций, при возведении опалубки, вертикальной планировке и выемке грунта при строительстве котлованов, при укладке бетона и т.п.

При проведении горных выработок широко используются *лазерные визиры*. Конструктивно лазерный визир похож на теодолит, имеет угломерные круги. Оптическая система визира формирует световой пучок, который может быть ориентирован в пространстве в заданном направлении. Таким образом осуществляется, например, задание направлений горным выработкам, задание направлений горнороходческому щиту при строительстве метрополитенов и коллекторов большого сечения.

В условиях слабой освещенности световое пятно от лазерного визира видно на больших расстояниях невооруженным глазом. В условиях засветок, при дневном освещении, для фиксации центра светового пятна используются экраны-матрицы фотоэлементов.

Приборы, в которых реализуется построение вертикальной световой плоскости, используются при построении и контроле построения вертикальных конструкций, для сканирования в большом высотном интервале наблюдаемых точек и др.

Приборы для вертикального проектирования типа «зенит», «надир», «зенит-надир» применяются для контроля конструкций башенного типа (телевизионные башни, высотные сооружения и т.п.). С помощью этих приборов весьма точно можно определять крены сооружений, их колебания от действия ветровых и других нагрузок, для плановой передачи координат с одного горизонта на другой при высотном строительстве.

В приборе ПГЛ-1 фотоприемное устройство имеет возможность перемещаться вдоль рейки в горизонтальном положении, в результате чего по максимуму сигнала регистрируется искомое направление. Погрешность измерений указанным прибором составляет 3 мм на 150 м.

Вертикальную плоскость задают прибором ПВЗЛ-1. Сканирующий лазерный пучок пентапризмой приводится в вертикальное положение, однако конструкцией некоторых приборов предусмотрено и использование горизонтального пучка, для чего насадка с пентапризмой выполнена съемной. На искомой конструкции устанавливают фотомишень. При перемещении конструкций световой пучок смещается по фотомишени, в результате чего возникает разность сигналов, характеризующая величину перемещения в двух направлениях. Точность измерений указанным прибором на расстоянии 20 м достигает 1 мм для регистрации отклонений от вертикали и 2 мм для задания вертикали.

В настоящее время при укладке трубопроводов используют лазерные указки, которые помещают на трубопроводе вдоль его продольной оси.

Погрешность измерений - 10 мм на 100 м. Задание необходимого уклона производится с помощью специальных приспособлений: установочное – цилиндрический уровень; отсчетное – шкала уклонов.

## Глава 7 ПОСТРОЕНИЕ СЪЕМОЧНОГО ОБОСНОВАНИЯ

### § 65. Назначение и виды теодолитных ходов

Пункты Государственной геодезической сети расположены сравнительно далеко друг от друга. Так, например, пункты 4 класса находятся на удалении 2 – 5 км. Для выполнения топографических и других геодезических и маркшейдерских работ геодезическую сеть сгущают, т.е. увеличивают число опорных пунктов на единицу площади. Как уже указывалось выше (гл. 4), сети сгущения 1 и 2 разрядов строят в виде цепочек треугольников триангуляции или трилатерации, либо в виде одиночных полигонометрических ходов или их систем. При использовании электронных тахеометров часто выполняют *линейно-угловые построения*. В частности, одним из таких построений является *вставка в угол* (рис. 7.1). В таком построении измеряют все горизонтальные углы в треугольниках, либо все горизонтальные углы и часть или все стороны, кроме исходных. Вставка в угол часто используется и при построении сетей 3 и 4 классов.

*Съемочная геодезическая сеть* создается с целью сгущения геодезической плановой и высотной основы до плотности, обеспечивающей выполнение *топографических съемок*. Пункты съемочной сети определяются по-

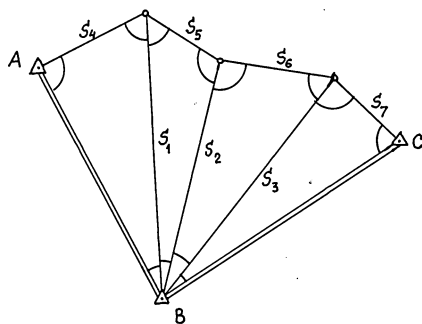


Рис. 7.1. Вставка в угол

строением триангуляционных сетей, проложением *теодолитных ходов*, а также различными видами засечек. При развитии съемочной сети одновременно определяются, как правило, положения точек в плане и по высоте. Высоты точек получают *геометрическим* или *тригонометрическим нивелированием*.

Точки съемочного обоснования намечаются и закрепляются на местности с таким расчетом, чтобы обеспечивалась их сохранность на весь

период работ, обеспечивался хороший обзор при проведении съемки местности и удобство установки прибора и проведения линейных измерений. Для закрепления на местности теодолитного хода можно использовать пни деревьев, деревянные колья, столбы или железные трубы, штыри и т.п. При работе в городских условиях по твердому основанию (асфальту, бетону) часто используют металлические дюбели, забиваемые в покрытие. В любом случае точка теодолитного хода на несущем основании должна определяться

точно и однозначно. На деревянном основании точки можно зафиксировать гвоздями, на металлическом – наносят насечки керном или зубилом.

Предельная погрешность ( $m_s$ ) положения пунктов плановой съемочной сети относительно пунктов ГГС или ГСС не должна превышать 0,2 мм в масштабе плана.

В зависимости от сложности снимаемого участка местности и условий измерений съемочные сети, проложенные в виде разомкнутого или замкнутого теодолитных ходов (рис. 7.2), могут служить основанием для построения других (дополнительных) ходов.

*Разомкнутый теодолитный ход* (рис. 7.2 а) представляет собой вытянутую ломаную линию, опирающуюся на обоих ее концах на исходные пункты и исходные направления. По своей форме он подобен *полигонометрическому ходу*, и к нему часто применяют такое же название.

Разомкнутые теодолитные ходы используют при топографической съемке вытянутых участков местности, при съемках рек, съемках под строительство линейных инженерных сооружений и т.п..

*Замкнутый теодолитный ход* (рис. 7.2 б и в) представляет собой многоугольник  $G - 4 - 5 - 6 - 7 - G$  или  $10 - 11 - 12 - 13$ . В первом случае многоугольник включает в себя исходный пункт  $G$ . Часто не представляется возможным непосредственно включить в ход исходный пункт. В таких случаях к замкнутому ходу прокладывают подходовый ход  $K - 9 - 10$ .

Замкнутые теодолитные ходы используют при съемках площадных объектов примерно округлой формы.

*Диагональный теодолитный ход* (рис. 7.2 б(г))  $7 - 8 - 5$  прокладывают обычно в замкнутых ходах в тех случаях, когда с точек основного хода невозможно обеспечить съемку всего участка. Такое положение весьма часто встречается при съемках плотно застроенных участков местности. По принципу построения диагональный ход подобен разомкнутому ходу, опирающемуся на точки и линии основного хода. Требования к точности построения диагонального хода ниже, чем основного, примерно в 1,5 раза.

На рис. 7.2 в(д) показан *висячий теодолитный ход* ( $13 - 14 - 15$ ), опирающийся только одним своим концом на основной ход. Такие построения часто используют на застроенных территориях при съемках глухих дворов, тупиков и т.п. Висячий ход полностью является бесконтрольным для окончательных результатов (координат и высот). В связи с этим при измерениях необходимо быть весьма внимательным. Инструкцией по топографической съемке установлено, что на застроенных территориях висячие ходы могут иметь не более трех линий, на незастроенных – не более двух линий.

Если в техническом задании на съемку местности не предусматривается определение координат точек в общегосударственной или местной системе координат (специальные работы), то съемка выполняется в условной системе координат и высот с построением съемочного обоснования в виде разомкнутого (рис. 7.2 е) или замкнутого (рис. 7.2 ж) *свободных теодолитных ходов*, либо построением свободной сети или цепочек треугольников триангуляции с измерением двух линий на ее концах, а также сети или цепочки

треугольников трилатерации (рис. 7.2 з). Предпочтение следует отдавать построению свободной сети треугольников, либо свободному замкнутому теодолитному ходу, поскольку в таких построениях имеется возможность внутреннего контроля. Например, по сумме измеренных углов (внутренних или внешних) многоугольника.

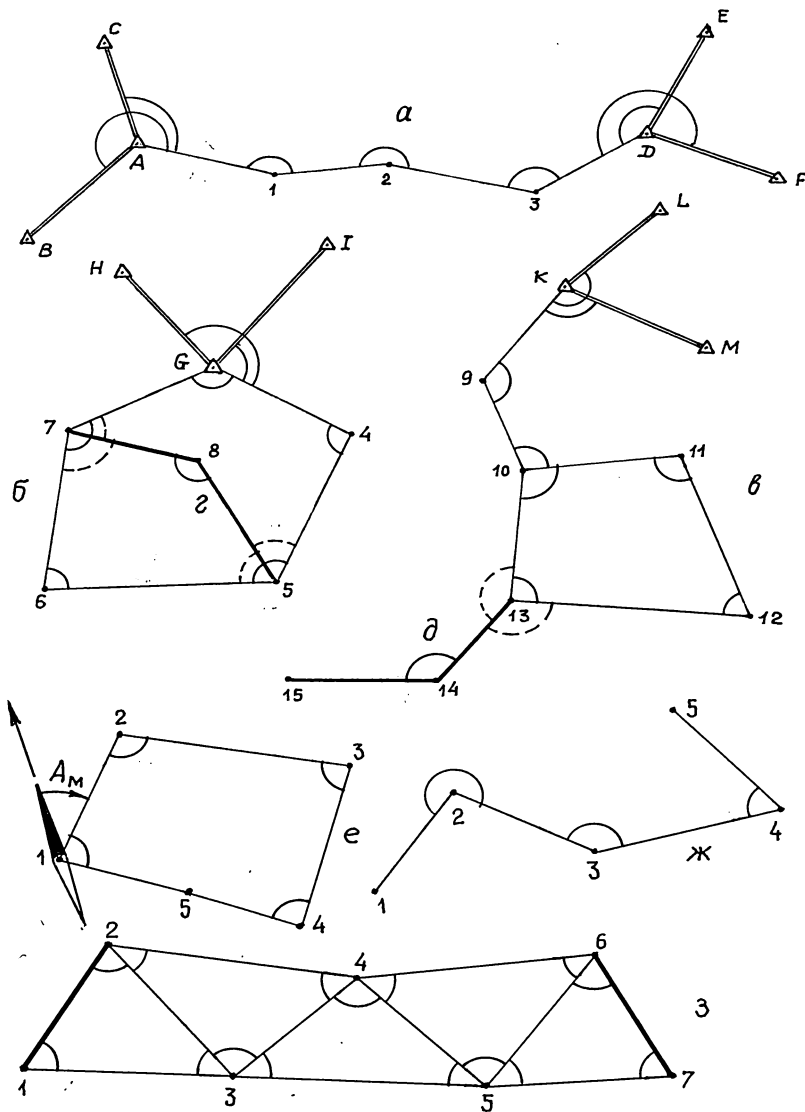


Рис. 7.2. Виды теодолитных ходов

Свободный ход часто ориентируют по *магнитному азимуту* (рис. 7.2 е), для этого измеряют горизонтальный угол между направлением *магнитного меридиана* и направлением линии теодолитного хода в данной точке. При этом магнитное ориентирование рекомендуется выполнять на всех вершинах

теодолитного хода. В принадлежности к *теодолиту* входит *буссоль* (компас) особой конструкции. Буссоль устанавливают при измерениях магнитного азимута на колонку теодолита.

Ориентирование по магнитному азимуту разрешается выполнять и на участках съемок масштаба 1:5000 и 1:2000 площадью 5 км<sup>2</sup>.

В теодолитных ходах измеряют горизонтальные углы в их вершинах между направлениями на соседние точки хода, а также между исходными направлениями и направлениями линий теодолитного хода при выполнении азимутальных привязок. Кроме того, измеряют наклонные расстояния линий теодолитного хода и углы наклона этих линий с целью приведения наклонных расстояний к горизонту, а также определения превышений и высот точек хода. Горизонтальные углы и углы наклона измеряют теодолитом, а расстояния – мерной лентой, рулеткой или светодальномером. При использовании электронных тахеометров указанные работы выполняются одновременно с автоматическим вычислением полных координат точек хода.

Для определения высот точек теодолитных ходов при использовании оптических геодезических приборов применяют метод *геометрического нивелирования* (гл. 9).

Таблица 7.1

Масштаб плана	$m_s = 0,2$ мм в масштабе плана			$m_s = 0,3$ мм в масштабе плана	
	1/3000	1/2000	1/1000	1/2000	1/1000
	Допустимые длины ходов между исходными пунктами, км				
1 : 5000	6,0	4,0	2,0	6,0	3,0
1 : 2000	3,0	2,0	1,0	3,6	1,5
1 : 1000	1,8	1,2	0,6	1,5	1,5
1 : 500	0,9	0,6	0,3	-	-

Теодолитные ходы прокладываются с предельными относительными погрешностями 1:3000, 1:2000, 1:1000 в зависимости от условий съемки (см. табл. 7.1). При построении съемочного обоснования в виде теодолитных ходов следует обеспечивать установленные специальными инструкциями рекомендации :

- длины сторон в теодолитных ходах не должны быть более 350 м и менее 20 м на застроенных территориях и от 40 м до 350 м – на незастроенных территориях;

- на застроенной территории максимальная длина теодолитного хода должна быть примерно в 1,5 раза меньше, чем на незастроенной территории;

- висячие ходы должны являться исключением, могут иметь одну-две точки поворота и иметь длину не более 0,1 максимальной длины хода; длины висячих ходов на застроенной территории устанавливаются для ряда масштабов 1:5000 – 1:2000 – 1:1000 – 1:500 соответственно в пределах 350, 200, 150 и 100 м, а на незастроенных территориях – 500, 300, 200 и 150 м;



- длина диагонального хода не должна превышать 0,5 максимальной длины хода; относительная погрешность диагонального хода не должна быть больше 1:1000;

- углы в теодолитных ходах измеряют теодолитом не менее 30-секундной точности одним полным приемом с перестановкой лимба между полуприемами примерно на  $90^\circ$ ; при измерении углов теодолитами типа Т5 лимб между полуприемами переставляют примерно на  $1^\circ - 2^\circ$ ; разница значений углов, полученных в полуприемах не должна превышать  $45''$ ;

- центрирование в вершине измеряемого угла выполняется с помощью отвеса или оптического центрира с погрешностью не более 3 мм;

- линии в ходах измеряют стальными лентами или рулетками в прямом и обратном направлениях с установленной относительной погрешностью, либо в прямом направлении при использовании оптических дальномеров и светодальномеров.

## § 66. Прямая и обратная геодезические задачи на плоскости

Пусть нам известны координаты точки  $I (X_1, Y_1)$ , горизонтальное проложение линии  $1-2$   $d_{12}$  и ее дирекционный угол  $\alpha_{12}$  (рис. 7.3). Требуется найти координаты точки 2. Таковы условия *прямой геодезической задачи*.

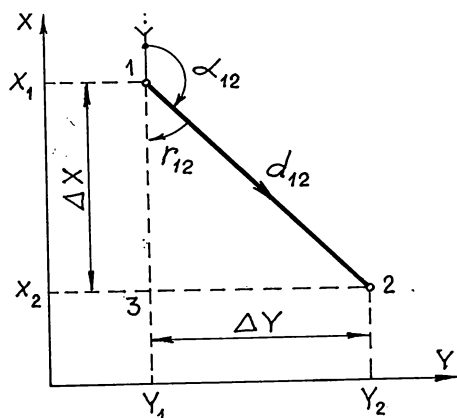


Рис. 7.3. Прямая и обратная геодезические задачи на плоскости

Прямая геодезическая задача используется для определения координат точек местности, в частности, при определении координат точек теодолитных ходов.

Поскольку указанная задача решается на плоскости (в проекции Гаусса-Крюгера), то треугольник  $123$  является прямоугольным. Линия  $1-2$  ориентирована (на рисунке) в *круговой* ( $\alpha$ ) и *четвертной* ( $r$ ) системах. Параметры  $\Delta X$  и  $\Delta Y$  называют *приращениями координат*.

Исходя из геометрии и принятой системы координат можно записать, что

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 - \Delta X \\ Y_2 &= Y_1 + \Delta Y \end{aligned} \quad (7.1)$$

Очевидно, что приращения координат должны иметь знак «плюс» или «минус», поскольку координаты точки 2 могут быть больше или меньше координат точки 1. Не обращая внимания на знаки приращений координат, запишем из прямоугольного треугольника

$$\begin{aligned} \Delta X &= d_{12} \cos r_{12} \\ \Delta Y &= d_{12} \sin r_{12} \end{aligned} \quad (141)$$

Принимая во внимание схему рис. 2.19, запишем, что

$$\begin{aligned}\Delta X &= d_{12} \cos \alpha_{12} \\ \Delta Y &= d_{12} \sin \alpha_{12} \end{aligned} \quad (142)$$

т.е. знаки приращений координат определяются знаками функций  $\sin$  и  $\cos$  соответствующих дирекционных углов. Тогда для общего случая формулы (7.1) примут вид

$$\begin{aligned}X_2 &= X_1 + \Delta X \\ Y_2 &= Y_1 + \Delta Y\end{aligned} \quad (7.4)$$

**Пример 7.1.** Прямая геодезическая задача.

Исходные данные:  $X_1 = 4256,324$  м;  $Y_1 = 7830,042$  м;  $\alpha_{12} = 248^\circ 39' 42''$ ;  $d_{12} = 211,656$  м.

Найти координаты точки 2.

**Решение.**

$$\Delta X_2 = 211,656 \times \cos 248^\circ 39' 42'' = -77,016 \text{ м};$$

$$\Delta Y_2 = 211,656 \times \sin 248^\circ 39' 42'' = -197,147 \text{ м};$$

$$X_2 = 4256,324 - 77,016 = 4179,308 \text{ м}$$

$$Y_2 = 7830,042 - 197,147 = 7632,895 \text{ м}.$$

Формулировка *обратной геодезической задачи*: по известным координатам двух точек найти горизонтальное проложение линии, соединяющей эти точки и ее дирекционный угол.

Применительно к рис. 7.3: по известным координатам точек 1 и 2 найти горизонтальное проложение  $d_{12}$  и дирекционный угол  $\alpha_{12}$ .

Обратная геодезическая задача используется в большом числе случаев при определении дирекционных углов исходных направлений, а также при решении различных геометрических задач на местности, связанных с построением на местности проектных точек инженерных сооружений (*геодезические разбивочные работы*).

Установим взаимосвязь между знаками приращений координат и значениями дирекционных углов (табл. 7.2).

Таблица 7.2

$\Delta X$	+	-	-	+
$\Delta Y$	+	+	-	-
Четверть	I(СВ)	II(ЮВ)	III(ЮЗ)	IV(СЗ)
Изменения дирекционного угла	$0^\circ - 90^\circ$	$90^\circ - 180^\circ$	$180^\circ - 270^\circ$	$270^\circ - 360^\circ(0^\circ)$
Зависимость $\alpha = f(r)$	$\alpha = r$	$\alpha = 180^\circ - r$	$\alpha = 180^\circ + r$	$\alpha = 360^\circ - r$

Для решения обратной геодезической задачи вычисляют приращения координат

$$\begin{aligned}\Delta X_2 &= X_2 - X_1 \\ \Delta Y_2 &= Y_2 - Y_1\end{aligned} \quad (7.5)$$

если задана задача определения дирекционного угла направления 1-2. Если же необходимо определить дирекционный угол направления 2-1, то приращения координат определяют по формулам

$$\begin{aligned}\Delta X_1 &= X_1 - X_2 \\ \Delta Y_1 &= Y_1 - Y_2\end{aligned}, \quad (7.6)$$

Далее вычисляют значение румба определяемого направления без учета знаков приращений координат

$$r_{1-2(2-1)} = \arctg \left| \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right| \quad (7.7)$$

и по знакам приращений координат, пользуясь таблицей 7.2, выбирают соответствующую формулу для вычисления дирекционного угла.

Дирекционный угол линии можно определить, таким образом, для любого ее направления, а дирекционный угол обратного направления, при необходимости, определяют по формуле *обратного ориентирующего угла*:  $\alpha_{обп} = \alpha_{пп} \pm 180^\circ$ .

Горизонтальное проложение из прямоугольного треугольника 123 находят по формулам:

$$d = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = \frac{\Delta X_2}{\cos \alpha_{12}} = \frac{\Delta X_1}{\cos \alpha_{21}} = \frac{\Delta Y_2}{\sin \alpha_{12}} = \frac{\Delta Y_1}{\sin \alpha_{21}}. \quad (7.8)$$

Значения горизонтальных проложений, вычисленных по приведенным формулам, должны практически совпадать в пределах погрешностей округлений.

**Пример 7.2.** Обратная геодезическая задача.

Исходные данные:  $X_1 = 7273,856$  м;  $Y_1 = 5241,656$  м;  $X_2 = 9833,813$  м;  $Y_2 = 2165,041$  м  
Найти дирекционный угол направления 1-2 и горизонтальное проложение линии 1-2.

**Решение.**

$$\Delta X_2 = 9833,813 - 7273,856 = +2559,957 \text{ м.}$$

$$\Delta Y_2 = 2165,041 - 5241,656 = -3076,615 \text{ м.}$$

(Четвертая четверть – СЗ) – см. табл. 7.2.

$$r_{1-2} = \arctg \left| \frac{-3076,615}{+2559,957} \right| = \arctg 1,201823 = 50^\circ 14' 14''.$$

$$\alpha_{12} = 360^\circ 00' 00'' - 50^\circ 14' 14'' = 309^\circ 45' 46''.$$

$$d_{12} = \sqrt{2559,957^2 + 3076,615^2} = 4002,369 \text{ м.}$$

$$d_{12} = \frac{+2559,957}{\cos 309^\circ 45' 46''} = 4002,369 \text{ м.} \dots d_{12} = \frac{-3076,615}{\sin 309^\circ 45' 46''} = 4002,365 \text{ м.}$$

Незначительные расхождения в значениях горизонтального проложения обусловлены погрешностями вычислений при округлении приращений координат и дирекционного угла.

$$\text{Обратный дирекционный угол } \alpha_{21} = \alpha_{12} \pm 180^\circ = 309^\circ 45' 46'' - 180^\circ = 129^\circ 45' 46''.$$

Этот угол может быть получен и прямым расчетом через соответствующие приращения координат:

$$\Delta X_1 = 7273,856 - 9833,813 = -2559,957 \text{ м.}$$

$$\Delta Y_1 = 5241,656 - 2165,041 = +3076,615 \text{ м.}$$

(Вторая четверть – ЮВ) – см. табл. 7.2.

$$r_{1-2} = \arctg \left| \frac{+3076,615}{-2559,957} \right| = \arctg 1,201823 = 50^\circ 14' 14''.$$

$$\alpha_{12} = 180^\circ 00' 00'' - 50^\circ 14' 14'' = 129^\circ 45' 46''.$$

## § 67. Взаимосвязь дирекционных углов с измеренными на местности горизонтальными углами

Для последовательной передачи координат на точки теодолитных ходов необходимо последовательно решать прямые геодезические задачи для каждой из точек, а для этого необходимо знать значения дирекционных углов каждой из линий и их горизонтальные проложения. (Принцип определения горизонтальных проложений изложен в § 71).

Рассмотрим схему передачи дирекционного угла с линии теодолитного хода на соседнюю с ней линию с использованием измеренного горизонтального угла  $\beta$  в точке поворота (рис. 7.4).

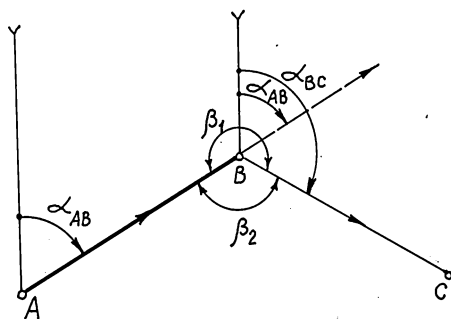


Рис. 7.4. Взаимосвязь дирекционных углов с горизонтальными углами, измеренными на местности

Пусть нам известен дирекционный угол линии  $AB$  ( $\alpha_{AB}$ ). В точке  $B$  поворота измерен горизонтальный угол  $\beta_1$ , либо горизонтальный угол  $\beta_2$ : ( $\beta_1 + \beta_2 = 360^\circ$ ). При указанном на схеме направлении хода угол  $\beta_1$  называют *левым по ходу* углом, а угол  $\beta_2$  — *правым по ходу* углом.

Продолжим в точке  $B$  линию  $AB$ , построим в этой точке направление осевого меридиана, параллельного оси  $X$  системы координат, и, в соответствии с определением дирекционного угла, отметим на схеме углы  $\alpha_{AB}$  и  $\alpha_{BC}$ . Из полученного геометрического построения можно записать, что

$$\alpha_{BC} = \alpha_{AB} \pm 180^\circ + \beta_1 \quad (7.9)$$

$$\alpha_{BC} = \alpha_{AB} \pm 180^\circ - \beta_2$$

Общая формула передачи дирекционного угла с линии на линию имеет вид:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \pm 180^\circ \pm \beta, \quad (7.10)$$

В этой формуле перед значением  $180^\circ$  может оставлять только знак «плюс». Перед значением горизонтального угла  $\beta$ : знак «плюс» — для левых по ходу углов, знак «минус» — для правых по ходу углов.

Ту же задачу удобно решать через дирекционные углы исходящих из точки  $B$  линий. Поскольку  $\alpha_{AB} \pm 180^\circ = \alpha_{BA}$ , то из (7.9) и (7.10) получим, что

$$\alpha_{BC} = \alpha_{BA} \pm \beta \quad (7.11)$$

**Пример 7.3.** Передача дирекционного угла через измеренный горизонтальный угол.

1. Исходные данные:  $\alpha_{AB} = 115^\circ 36,7'$ ;  $\beta$  (левый по ходу) =  $253^\circ 14,5'$ .

**Решение 1.**

$\alpha_{BC} = 115^\circ 36,7' + 180^\circ + 253^\circ 14,5' = 548^\circ 51,2' - 360^\circ = 188^\circ 51,2'$ , поскольку значение дирекционного угла получилось больше  $360^\circ$ .

2. Исходные данные:  $\alpha_{AB} = 5^\circ 02,7'$ ;  $\beta$  (правый по ходу) =  $274^\circ 16,8'$ .

### Решение 2.

$\alpha_{BC} = 5^\circ 02,7' + 180^\circ - 274^\circ 16,8' = -89^\circ 14,1' + 360^\circ = 270^\circ 45,9'$ , поскольку значение дирекционного угла получилось отрицательным.

3. Исходные данные:  $\alpha_{AB} = 201^\circ 42' 08''$ ;  $\beta$  (правый по ходу) =  $36^\circ 14' 32''$ .

**Решение 3.** (через дирекционный угол исходящего направления).

$\alpha_{BA} = 201^\circ 42' 08'' - 180^\circ = 21^\circ 42' 08''$ .

$\alpha_{BC} = 21^\circ 42' 08'' - 36^\circ 14' 32'' = -14^\circ 32' 24'' + 360^\circ = 345^\circ 27' 36''$ .

## § 68. Привязка теодолитных ходов

Целью привязки теодолитных ходов к пунктам Государственной геодезии-ческой сети 1, 2, 3 и 4 классов, а также к пунктам съемочной сети 1 и 2 разрядов является определение с заданной точностью координат вершин указанных ходов.

В зависимости от расположения теодолитного хода на местности, условий съемки, сложности ситуации и других факторов схемы и способы привязки *элементов теодолитного хода* могут быть различными. Во многих случаях приходится выполнять дополнительные геодезические построения. Тем более, что любая привязка должна иметь надежный контроль, который, чаще всего, обеспечивается избыточными измерениями и дополнительными геодезическими построениями.

Под *элементом теодолитного хода* понимают одну из его точек, координаты которой необходимо найти, и дирекционный угол линии теодолитного хода, исходящей из определяемой точки.

Здесь мы рассмотрим некоторые из основных способов привязки теодолитных ходов, которые чаще всего встречаются на практике, приведем схемы, предусматривающие комбинированное использование способов привязки. Однако следует иметь ввиду, что на практике могут встретиться случаи, когда ни один из рассмотренных способов не может быть реализован в силу действия различных факторов. Геодезист и маркшейдер должны уметь проектировать частные схемы привязок, которые обеспечат построение съемочного обоснования с необходимой точностью.

### 68.1. Способ примыкания

На рис. 7.2 приведены сравнительно простейшие способы привязки теодолитных ходов. Для разомкнутого хода – это привязка начальной и конечной линий минимально к двум исходным направлениям с включением пункта высокого класса в теодолитный ход в местах примыкания. Замкнутый теодолитный ход может быть привязан на два исходных направления с включением пункта высокого класса непосредственно в ход (рис. 7.2 б), либо с помощью дополнительного полигонометрического хода (рис. 7.2 в) от исходных пунктов (привязка ходом). Методика выполнения привязки с помощью указанных схем следующая.

Привязка разомкнутого теодолитного хода на двух его концах выполняется с использованием *примычных* (горизонтальных) углов  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  (рис.

7.5). В результате дважды определяют дирекционные углы направлений  $A-I$  и  $n-D$ .

$$\alpha_{A1(AB)} = \alpha_{BA} + \gamma_1$$

$$\alpha_{A1(AC)} = \alpha_{CA} + \gamma_2$$

$$\alpha_{nD(DE)} = \alpha_{DE} - \gamma_3 + 180^\circ$$

$$\alpha_{nD(DF)} = \alpha_{DF} - \gamma_4 + 180^\circ$$

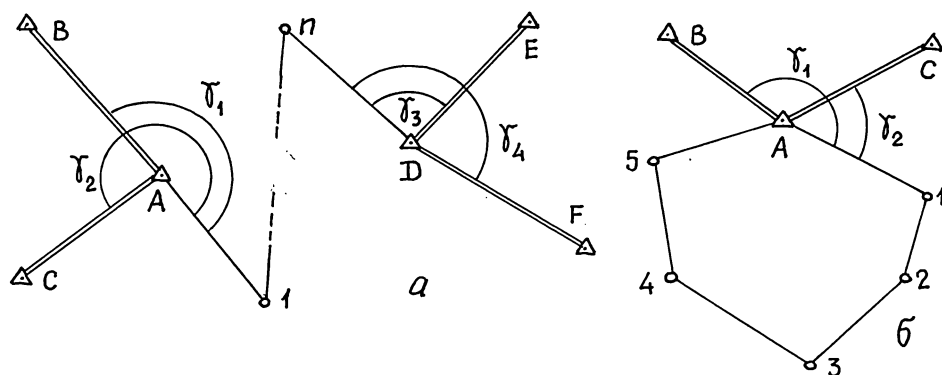


Рис. 7.5. Привязка разомкнутого и замкнутого теодолитных ходов  
Разомкнутый ход (а), замкнутый ход (б)

где  $\alpha_{BA}$ ,  $\alpha_{CA}$ ,  $\alpha_{DE}$ ,  $\alpha_{DF}$  – дирекционные углы исходных направлений – находят из решения *обратных геодезических задач* по координатам исходных пунктов; на схеме углы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – левые по ходу, углы  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  – правые по ходу.

Если разница полученных дирекционных углов допустима (для технических теодолитных ходов – не более  $1'$ ), т.е.

$$\Delta \alpha_{A1} = |\alpha_{A1(AB)} - \alpha_{A1(AC)}| \leq 1'$$

$$\Delta \alpha_{nD} = |\alpha_{nD(DE)} - \alpha_{nD(DF)}| \leq 1'$$

то вычисляют средние арифметические значения углов

$$\alpha_{A1} = 0,5(\alpha_{A1(AB)} + \alpha_{A1(AC)})$$

$$\alpha_{nD} = 0,5(\alpha_{nD(DE)} + \alpha_{nD(DF)})$$

и в дальнейшем принимают их за исходные.

Аналогично выполняют привязку линии  $A-I$  в замкнутом теодолитном ходе (рис. 7.5 б).

Примычные углы измеряют теодолитом повышенной точности, чем рекомендуемый для измерений в теодолитных ходах. Иногда приходится пользоваться для измерения примычных углов и для измерения горизонтальных углов в вершинах хода одним и тем же теодолитом. В этом случае примычные углы измеряют несколькими полными приемами каждый (3 – 5 полных приемов с перестановкой лимба горизонтального круга и с повторным центрированием и горизонтированием теодолита перед каждым приемом). Целесообразно, чтобы примычные углы имели *вес* в 1,5 – 2 раза больший, чем *вес* углов дальнейших геодезических построений.

## 68.2. Прямая угловая засечка

Положение точки  $M$  теодолитного хода определяют из решения треугольников  $ABM$  и  $BCM$  по результатам измерения горизонтальных углов  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  и  $\beta_4$  при исходных направлениях  $AB$  и  $BC$  (рис. 7.6 а). Горизонтальный угол  $\beta_5$ , измеренный в вершине  $M$  между направлениями  $BM$  и  $MN$ , используют для передачи дирекционного угла с направления  $BM$  на линию теодолитного хода  $MN$ .

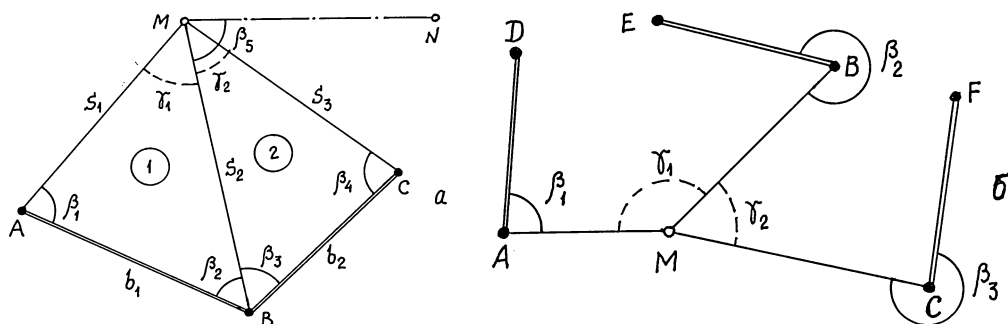


Рис. 7.6. Прямая угловая засечка.  
а) схема 1; б) схема 2

Координаты точки  $M$  удобно вычислять по формулам Юнга:

$$X_M = \frac{X_A \operatorname{ctg} \beta_2 + X_B \operatorname{ctg} \beta_1 + Y_B - Y_A}{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2} \quad (7.16)$$

$$Y_M = \frac{Y_A \operatorname{ctg} \beta_2 + Y_B \operatorname{ctg} \beta_1 + X_A - X_B}{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2} \quad (7.17)$$

Для контроля аналогичные вычисления выполняют из решения второго треугольника. Точность определения прямоугольных координат не должна быть меньше установленной инструкцией.

Для передачи дирекционного угла на линию  $MN$  вычисляют из решения обратной геодезической задачи дирекционный угол направления  $BM$  ( $\alpha_{BM}$ ), а затем получают дирекционный угол  $\alpha_{MN}$  по формуле

$$\alpha_{MN} = \alpha_{BM} + 180^\circ - \beta_5 \quad (7.18)$$

На схеме привязки горизонтальный угол  $\beta_5$  является правым по ходу  $BMN$ , поэтому в формуле (7.18) перед ним стоит знак минус.

Часто прямую угловую засечку выполняют сразу для точек  $M$  и  $N$ . Тогда координаты точки  $N$  определяют так же, как и координаты точки  $M$ , а значение горизонтального угла  $\beta_5$  используют как контрольное. Аналогичный угол целесообразно измерить и в точке  $N$ .

Оценка точности определения координат пункта  $M$  относительно исходных пунктов  $A, B$  и  $C$  выполняется по следующим формулам:

$$m_{M(1)} = m_\beta \frac{\sqrt{S_{AM}^2 + S_{BM}^2}}{\rho'' \sin(\beta_1 + \beta_2)}, \quad (7.19)$$

$$m_{M(2)} = m_{\beta} \frac{\sqrt{S_{BM}^2 + S_{CM}^2}}{\rho'' \sin(\beta_3 + \beta_4)}, \quad (7.20)$$

$$m_M = 0,5 \sqrt{m_{M(1)}^2 + m_{M(2)}^2}, \quad (7.21)$$

где  $m_{M(1)}$  и  $m_{M(2)}$  – соответственно средние квадратические погрешности определения положения точки  $M$  из первого и второго треугольников;  $m_{\beta}$  – средняя квадратическая погрешность измерения горизонтального угла (сек);  $\rho'' = 206265''$  – число секунд в радиане;  $S$  – расстояния (горизонтальные проложения) между исходными пунктами и определяемой точкой, вычисляемые по теореме синусов в соответствующем треугольнике.

При проектировании рассмотренной схемы привязки следует стремиться к тому, чтобы горизонтальные углы  $\gamma$  при определяемой точке были не меньше  $30^\circ$  и не больше  $150^\circ$ . Большая точность достигается при углах  $\gamma$  в пределах  $109^\circ - 110^\circ$  при примерно равных расстояниях до нее от исходных пунктов..

**Пример 7.4.** Привязка способом прямой угловой засечки.

Исходные данные (схема рис. 7.6 а):

$$\begin{aligned} X_A &= 3946,547 \text{ м} & X_B &= 3763,211 \text{ м} & X_C &= 4015,338 \text{ м} \\ Y_A &= 4105,854 \text{ м} & Y_B &= 4568,642 \text{ м} & Y_C &= 4905,039 \text{ м} \\ \beta_1 &= 63^\circ 18' 10''; & \beta_2 &= 59^\circ 44' 58''; & \beta_3 &= 61^\circ 47' 20''; & \beta_4 &= 70^\circ 03' 50''; & \beta_5 &= 86^\circ 55' 45''. \end{aligned}$$

**Решение.**

Из треугольника  $ABM$  (1):

$$X_{M(1)} = \frac{3946,547 \operatorname{ctg} 59^\circ 44' 58'' + 3763,211 \operatorname{ctg} 63^\circ 18' 10'' - 4105,854 + 4568,642}{\operatorname{ctg} 59^\circ 44' 58'' + \operatorname{ctg} 63^\circ 18' 10''} = 4287,7648 \text{ м};$$

$$Y_{M(1)} = \frac{4105,854 \operatorname{ctg} 59^\circ 44' 58'' + 4568,642 \operatorname{ctg} 63^\circ 18' 10'' + 3946,547 - 3763,211}{\operatorname{ctg} 59^\circ 44' 58'' + \operatorname{ctg} 63^\circ 18' 10''} = 4488,9427 \text{ м}$$

Аналогичные вычисления выполняем в треугольнике  $BCM$  (2):

$$X_{M(2)} = 4287,7594 \text{ м}; \quad Y_{M(2)} = 4488,9353 \text{ м}.$$

В результате получены невязки в координатах:

$$f_X = X_{M(1)} - X_{M(2)} = 0,0054 \text{ м}; \quad f_Y = Y_{M(1)} - Y_{M(2)} = 0,0074 \text{ м}; \quad f_{ABC} = 0,00916 \text{ м}.$$

Значение  $f_{ABC}$  является критерием качества решения задачи привязки.

При допустимом значении абсолютной невязки вычисляют среднее значение координат точки  $M$ :  $X_M = 4287,762 \text{ м}$ ;  $Y_M = 4488,939 \text{ м}$ .

Выполним оценку точности засечки по формулам (7.19) – (7.21), приняв  $m_{\beta} = 2,0''$ .

Из решения обратной геодезической задачи с точностью до 1 м вычислим значения

$$S_1 \approx 513 \text{ м}, \quad S_2 \approx 531 \text{ м}, \quad S_3 \approx 497 \text{ м}.$$

Значения  $\sin$  для оценки точности округлим до  $0,5^0$ .

$$M_1 = \frac{2''}{206265'' \sin 123^0} \sqrt{513^2 + 531^2} = 0,0085 \text{ м} = 8,5 \text{ мм}.$$

$$M_2 = \frac{2''}{206265'' \sin 121,5^0} \sqrt{531^2 + 497^2} = 0,0083 \text{ м} = 8,3 \text{ мм}.$$

$$\text{Средняя погрешность засечки } M = \frac{\sqrt{8,5^2 + 8,3^2}}{2} = 5,9 \text{ мм}.$$

Здесь следует сделать некоторые замечания.

1. Средняя погрешность по значению меньше частных погрешностей, полученных по оценкам в соответствующих треугольниках. Это полностью согласуется с положениями теории погрешностей (гл. 3). Координаты точки  $M$  получены независимо из ре-



шения двух треугольников, т.е. определены дважды. В связи с этим средняя погрешность относится к значению средних арифметических координат точки  $M$ .

2. Практическая погрешность (невязка) составила порядка 9 мм, т.е. на 3 мм больше. Оценка точности выполнялась по теоретическим формулам, для идеального случая, когда влияние других погрешностей исключается, не учитывается. При выполнении практических работ в результатах измерений содержатся и другие погрешности, что и повлияло на окончательное практическое значение точности определения координат точки  $M$ . При этом следует иметь ввиду, что все погрешности имеют вероятностный характер, и не исключено, что оценочные их значения могут в каких-то случаях оказаться и больше, чем их практические величины.

Вычислим дирекционный угол направления  $MN$ .

Из решения обратной геодезической задачи по координатам точек  $B$  и  $M$  вычислим значение дирекционного угла направления  $BM$ :

$$\Delta X = +524,551 \text{ м}; \Delta Y = -79,703 \text{ м}; (IV \text{ четверть}); r_{BM} = 8^{\circ} 21' 37''; \alpha_{BM} = 351^{\circ} 21' 37''.$$

$$\alpha_{MN} = 351^{\circ} 21' 37'' + 180^{\circ} - 86^{\circ} 55' 45'' = 444^{\circ} 25' 52'' = 84^{\circ} 25' 52''.$$

Часто видимость между пунктами  $A - B$  и  $B - C$  может отсутствовать. В этом случае возможно использование другой схемы прямой угловой засечки (рис. 7.6 б), решение которой выполняется по формулам Гаусса (тангенсов или котангенсов).

Формулы тангенсов:

$$X_M = \frac{X_A \operatorname{tg} \alpha_{AP} - X_B \operatorname{tg} \alpha_{BP} - Y_A + Y_B}{\operatorname{tg} \alpha_{AM} - \operatorname{tg} \alpha_{BM}}, \quad (7.22)$$

$$Y_M = Y_A + (X_M - X_A) \operatorname{tg} \alpha_{AM} = Y_B + (X_M - X_B) \operatorname{tg} \alpha_{BM} \quad (7.23)$$

Формулы котангенсов:

$$Y_M = \frac{Y_A \operatorname{ctg} \alpha_{AM} - Y_B \operatorname{ctg} \alpha_{BM} - X_A + X_B}{\operatorname{ctg} \alpha_{AM} - \operatorname{ctg} \alpha_{BM}}, \quad (7.24)$$

$$X_M = X_A + (Y_M - Y_A) \operatorname{ctg} \alpha_{AM} = X_B + (Y_M - Y_B) \operatorname{ctg} \alpha_{BM} \quad (7.25)$$

Для контроля выполняют аналогичную привязку с точек  $B$  и  $C$ .

Значения дирекционных углов в приведенных формулах получают в результате решения азимутальной привязки от соответствующих исходных направлений:

$$\alpha_{AM} = \alpha_{AD} \pm \beta_1, \quad (7.26)$$

$$\alpha_{BM} = \alpha_{BE} \pm \beta_2, \quad (7.27)$$

$$\alpha_{CM} = \alpha_{CF} \pm \beta_3 \quad (7.28)$$

Знак «плюс» - для левых по ходу углов (как это показано на рис. 7.4), знак «минус» - для правых по ходу углов. На схеме рис. 7.6 б горизонтальные углы – левые по ходу.

При использовании для вычислений микрокалькуляторов формулы тангенсов не следует применять, если дирекционные углы близки к  $90^{\circ} \pm 5^{\circ}$  или  $270^{\circ} \pm 5^{\circ}$ , а формулы котангенсов – если дирекционные углы близки к  $0^{\circ} \pm 5^{\circ}$  или  $180^{\circ} \pm 5^{\circ}$ . Это обязательно следует проверить и, при возможности, перейти к другим построениям. В любом случае использование приведенной схемы привязки необходимо начинать с вычисления (или с оценки) величин дирекционных углов.

### 68.3. Линейная засечка

Этот способ удобно использовать в тех случаях, когда имеется возможность измерения расстояний  $S$  светодальномером, либо непосредственно компарированной рулеткой в одно уложение (рис. 7.7). Такие схемы часто

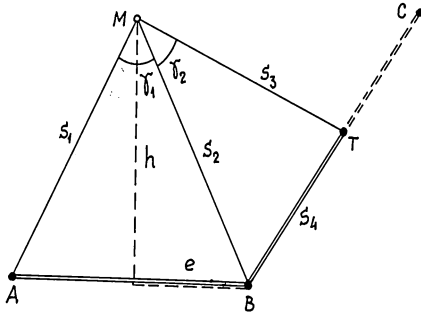


Рис. 7.7. Линейная засечка

используют при небольших расстояниях между пунктами  $A$  и  $B$ , расположенными, например, на углах здания, и сравнительно большом расстоянии между пунктами  $B$  и  $C$  (в этом случае используют дополнительную точку  $T$ , закрепляемую в створе линии  $BC$ ).

Кроме того, при большом расстоянии между точками  $A$  и  $B$  можно и между ними (в створе) выбрать в удобном месте дополнительную точку при соблюдении примерного равенства

расстояний  $S$ . Значения координат точки  $M$  вычисляют по формулам:

$$X_M = X_A + \frac{(X_B - X_A)n + (Y_B - Y_A)T}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}, \quad (7.29)$$

$$Y_M = Y_A + \frac{(Y_B - Y_A)n - (X_B - X_A)T}{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}, \quad (7.30)$$

где

$$n = 0,5[S_1^2 - S_2^2 + (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2],$$

$$T = \sqrt{S_1^2[(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2] - n^2}.$$

Формулы (7.29) и (7.30) используют в том случае, когда точка  $M$  находится слева от направления из точки  $A$  на точку  $B$ . В связи с этим перед вычислениями необходимо составить схему расположения точки  $M$  относительно исходных точек  $A$  и  $B$  и учесть это при записи разностей координат  $X$  и  $Y$ .

Задача решается дважды относительно точек  $A$  и  $B$  и точек  $B$  и  $C$  ( $T$ ).

Часто решение линейной засечки выполняют по несколько измененным формулам:

$$X_M = X_A + \frac{t(X_B - X_A) + h(Y_B - Y_A)}{d}, \quad (7.31)$$

$$Y_M = Y_A + \frac{t(Y_B - Y_A) + h(X_B - X_A)}{d}, \quad (7.32)$$

где  $d = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$ ,  $t = \frac{S_1^2 + d^2 - S_2^2}{2d}$ ,  $h = \pm \sqrt{S_1^2 - t^2}$ .

Значение  $h$  берут со знаком «плюс», если точка  $M$  находится слева от направления из точки  $A$  на точку  $B$ . Если точка  $M$  находится справа от указанного направления, то значение  $h$  берут со знаком «минус».

Приближенная оценка точности произведенной линейной засечки может быть выполнена по формулам:

$$m_M \equiv \frac{\sqrt{m_{S1}^2 + m_{S2}^2}}{\sin \gamma}, \quad (7.33)$$

$$m_M \equiv \frac{m_S}{S \sin \gamma} \sqrt{S_1^2 + S_2^2}, \quad (7.34)$$

где  $m_S / S$  – относительная погрешность измерения линий;  $\gamma$  – угол засечки при определяемой точке (его вычисляют по теореме косинусов в соответствующем треугольнике).

Углы при определяемой точке не должны быть меньше  $30^\circ$  и более  $150^\circ$ . Большая точность достигается при углах  $\gamma$  в пределах  $90^\circ$ .

**Пример 7.5.** Привязка способом линейной засечки.

Исходные данные (схема рис. 7.7):

$$\begin{aligned} X_A &= 4365,848 \text{ м} & X_B &= 4411,185 \text{ м} & X_C &= 5641,756 \text{ м} \\ Y_A &= 6513,603 \text{ м} & Y_B &= 6786,445 \text{ м} & Y_C &= 8136,097 \text{ м} \\ S_1 &= 211,423 \text{ м}; & S_2 &= 268,505 \text{ м}; & S_3 &= 379,666 \text{ м}; & S_4 &= 220,344 \text{ м}. \end{aligned}$$

Стороны измерены с относительной погрешностью 1:10000.

**Решение.**

Из решения обратной геодезической задачи находим:

$$\alpha_{AB} = 80^\circ 33' 56''; \quad \alpha_{BC} = 47^\circ 38' 33''; \quad S_{AB} = 276,583 \text{ м}.$$

Определяем координаты точки  $T$  (прямая геодезическая задача):

$$X_T = X_B + S_4 \cos \alpha_{BC} = 4559,643 \text{ м}$$

$$Y_T = Y_B + S_4 \sin \alpha_{BC} = 6949,269 \text{ м}$$

Воспользуемся формулами (7.29) и (7.30).

Для треугольника  $ABM$ :  $n = 24551,453$ ;  $D = 53072,306$ .

$$X_{M(1)} = 4569,689 \text{ м}; \quad Y_{M(1)} = 6569,716 \text{ м}$$

Для треугольника  $BMT$ :  $n = -11749,929$ ;  $D = 57984,954$ .

$$X_{M(2)} = 4569,717 \text{ м}; \quad Y_{M(2)} = 6569,737 \text{ м}.$$

Невязки в координатах:

$$f_X = X_{M(1)} - X_{M(2)} = 0,028 \text{ м}; \quad f_Y = Y_{M(1)} - Y_{M(2)} = 0,021 \text{ м}; \quad f_{ABC} = 0,035 \text{ м}$$

Если это условие удовлетворяет необходимой точности привязки, то вычисляют средние значения координат точки  $M$ :

$$X_M = 4569,703 \text{ м}; \quad Y_M = 6569,727 \text{ м}$$

Выполним оценку точности определения координат точки  $M$  по формуле (7.34). Для этого по теореме косинусов найдем углы  $\gamma$  в треугольниках  $AMB$  и  $BMT$  при точке  $M$  (вычисления достаточно выполнить с точностью до  $0,5^\circ$ ):  $\gamma_1 = 69,2^\circ$ ;  $\gamma_2 = 34,7^\circ$ .

$$m_{S1} = \frac{S_1}{10000} = 0,021 \text{ м}; \quad m_{S2} = \frac{S_2}{10000} = 0,027 \text{ м}; \quad m_{S3} = \frac{S_3}{10000} = 0,038 \text{ м};$$

Из треугольников  $ABM$  и  $BMT$  соответственно получим:

$$m_{M1} = 0,037 \text{ м}; \quad m_{M2} = 0,082 \text{ м}; \quad \text{средняя погрешность } m_M = 0,5 \sqrt{m_{M1}^2 + m_{M2}^2} = 0,045 \text{ м}.$$

#### 68.4. Обратная угловая засечка

Привязка способом обратной угловой засечки может быть выполнена по трем исходным геодезическим пунктам, если определяемая точка не лежит на окружности, описанной по ним. Оптимально, когда определяемая точка находится внутри треугольника (рис. 7.8 а).

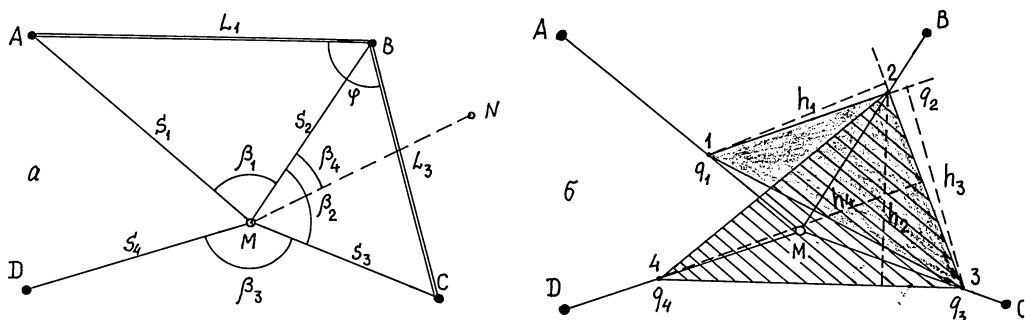


Рис. 7.8. Обратная угловая засечка.  
Схема обратной угловой засечки (а). Построение инверсионных треугольников (б)

При удалении точки  $M$  от опасной окружности на 10% ее радиуса уже обеспечивает решение задачи определения координат искомой точки. Для графической оценки положения точки  $M$  составляют схему привязки и контролируют выполнение условия  $\beta_2 + \beta_3 + \varphi - 180^\circ \geq 20^\circ - 30^\circ$ .

Следует иметь ввиду, что в данном случае не обеспечивается надежный контроль привязки, поэтому целесообразно использовать для решения указанной задачи четыре исходных пункта, т.е. в определяемой точке необходимо еще измерить угол  $\beta_3$  на исходный пункт  $D$ .

Координаты точки  $M$  находят по формулам С.Г.Молочкова:

$$X_M = X_B + \frac{K_1 + K_2 \operatorname{tg} \alpha_{BM}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{BM}} = X_B + \frac{K_3 + K_4 \operatorname{tg} \alpha_{BM}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{BM}}, \quad (7.35)$$

$$Y_M = Y_B + (X_M - X_B) \operatorname{tg} \alpha_{BM}, \quad (7.36)$$

где  $K_1 = (X_A - X_B) + (Y_A - Y_B) \operatorname{ctg} \beta_1$ ;

$$K_2 = (Y_A - Y_B) - (X_A - X_B) \operatorname{ctg} \beta_1;$$

$$K_3 = (X_C - X_B) - (Y_C - Y_B) \operatorname{ctg} \beta_2; \quad \operatorname{tg} \alpha_{BM} = \frac{K_3 - K_1}{K_2 - K_4}.$$

$$K_4 = (Y_C - Y_B) + (X_C - X_B) \operatorname{ctg} \beta_2;$$

При наличии четвертого пункта ( $D$ ) координаты точки  $M$  могут быть получены дважды: при использовании пунктов  $D$ ,  $A$  и  $B$  и при использовании пунктов  $A$ ,  $B$  и  $C$ . При этом может оказаться, что точность определения координат будет различной, в связи с чем целесообразно установить, относительно каких пунктов следует определять координаты точки  $M$ , а какой из пунктов будет контрольным. Указанная задача решается методом *инверсионных треугольников*.

Построение инверсионных треугольников выполняется на графической схеме привязки, построенной в произвольном масштабе длин, но с таким расчетом, чтобы отрезки  $S$  были не менее 6 – 7 см. На этих отрезках откладывают в принятом масштабе значения параметров  $q_i$  (градиентов):

$$q_i = \frac{\rho''}{S_i}. \quad (7.37)$$

Получают соответствующие инверсионные треугольники: 123 – для пунктов  $D$ ,  $A$  и  $B$  и 234 – для пунктов  $A$ ,  $B$  и  $C$  (рис. 7.8 б). Из точек 1, 2, 3 и 4

опускают высоты  $h_i$  на соответствующие стороны и графически, в масштабе  $q$ , получают их значения.

Графическая оценка точности выполняется по формулам:

$$M_1 = m_\beta \sqrt{\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_3^2}}; \quad M_2 = m_\beta \sqrt{\frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_4^2}}, \quad (7.38)$$

где  $M$  – средняя квадратическая погрешность определения координат точки  $M$ ;  $m_\beta$  – средняя квадратическая погрешность измерения углов.

По минимальной величине  $M$  выбирают исходные пункты для вычисления координат по формулам (7.35) и (7.36).

Иногда координаты определяют два раза, по двум группам из трех исходных пунктов, а оценку погрешности выполняют по средней ее величине, как это делалось в предыдущих способах.

Контроль вычислений по четвертому исходному пункту выполняют сравнением измеренного горизонтального угла (или углов, если пунктов более четырех) с вычисленным его значением. Например, если контрольное направление выбрано на пункт  $D$ , то сравнивают

$$(\beta_3)_{\text{выч}} = \alpha_{MD} - \alpha_{MC} \quad (7.39)$$

с тем же горизонтальным углом, измеренным в поле. Разница в полученных углах является критерием качества привязки. Для теодолитных ходов указанная разница не должна превышать  $1'$ .

Передача дирекционного угла на определяемую линию  $MN$  выполняется с учетом значения горизонтального угла  $\beta_4$  (правого или левого по ходу).

Аналитическая оценка точности определения координат точки  $M$  (линейная погрешность  $m_M$ ) может быть получена по формуле

$$m_M = \frac{S_2 m_\beta''}{\rho'' \sin(\omega + \beta_1 + \beta_2)} \sqrt{\left(\frac{S_1}{L_3}\right)^2 + \left(\frac{S_3}{L_1}\right)^2}, \quad (7.40)$$

где  $\omega = \alpha_{BA} - \alpha_{BC}$  при использовании пунктов  $A$ ,  $B$  и  $C$ ;  $S$  и  $L$  определяют из решения обратной геодезической задачи.

**Пример 7.6.** Привязка по способу обратной угловой засечки.

Исходные данные (схема рис. 7.8):

$X_A = 5535,793$  м;  $X_B = 5633,352$  м;  $X_C = 2490,280$  м;  $X_D = 2385,336$  м

$Y_A = 3733,771$  м;  $Y_B = 7984,056$  м;  $Y_C = 8879,172$  м;  $Y_D = 3694,242$  м

$\beta_1 = 84^\circ 41' 48''$ ;  $\beta_2 = 81^\circ 13' 25''$ ;  $\beta_3 = 138^\circ 50' 16''$ ;  $\beta_4 = 32^\circ 36' 18''$

**Решение.**

По схеме, построенной в произвольном масштабе, но с соблюдением ее геометрии по горизонтальным углам, получим длины отрезков  $S$  в мм и в метрах:  $S_1 = 72,5$  мм (3625 м);  $S_2 = 54,0$  мм (2700 м);  $S_3 = 51,3$  мм (2565 м);  $S_4 = 59,2$  мм (2960 м).

По формуле (7.37) вычислим значения градиентов ( $q_1 = 56,9$ ;  $q_2 = 76,4$ ;  $q_3 = 80,4$ ;  $q_4 = 69,7$ ) и построим их величины на схеме по соответствующим сторонам в условно выбранном масштабе. Получатся точки 1, 2, 3 и 4. В результате образованы два инверсионных треугольника 123 и 234.

Построим в инверсионных треугольниках высоты  $h_i$  и графически в масштабе  $q$  измерим их значения:  $h_1 = 91,0$ ;  $h_2 = 90,0$ ;  $h_3 = 97,0$ ;  $h_4 = 132,0$ .

Принимая  $m_\beta = 2,0''$  (здесь необходимо учитывать фактическую точность измерения углов), по формулам (7.38) вычислим значения средних квадратических погрешностей:  $M_1 = 0,030$  м;  $M_2 = 0,027$  м.

Поскольку  $M_2$  меньше  $M_1$ , то целесообразно для вычисления координат точки  $M$  использовать второй инверсионный треугольник (234), т.е. использовать для вычислений координат исходные точки  $B$ ,  $C$  и  $D$ .

Далее решаем задачу по формулам Молочкова (7.35) и (7.36) для установленных исходных пунктов:

$$K_1 = (X_B - X_C) + (Y_B - Y_C) \operatorname{ctg} \beta_2 = +3004,8784 ;$$

$$K_2 = (Y_B - Y_C) - (X_B - X_C) \operatorname{ctg} \beta_2 = -1380,3631 ;$$

$$K_3 = (X_D - X_C) - (Y_D - Y_C) \operatorname{ctg} \beta_3 = -6035,5272 ;$$

$$K_4 = (Y_D - Y_C) + (X_D - X_C) \operatorname{ctg} \beta_3 = -5064,8938 ;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{BM} = \frac{K_3 - K_1}{K_2 - K_4} = -2,453611348 ;$$

$$X_M = X_B + \frac{K_1 + K_2 \operatorname{tg} \alpha_{CM}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{CM}} = 3400,759 \text{ м},$$

$$X_M = X_B + \frac{K_3 + K_4 \operatorname{tg} \alpha_{CM}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{CM}} = 3400,759 \text{ м},$$

$$Y_M = Y_B + (X_M - X_C) \operatorname{tg} \alpha_{CM} = 6645,210 \text{ м}.$$

Контроль привязки выполняем по направлению на четвертый исходный пункт  $A$ .

Из решения обратной геодезической задачи найдем дирекционные углы направлений  $MA$  и  $MB$ :  $\alpha_{MA} = 306^{\circ}15'12,8''$ ;  $\alpha_{MB} = 30^{\circ}57'01,3''$ . Проверяем разность  $(\alpha_{MB} - \alpha_{MA}) = (\beta_1)$ :  $(\alpha_{MB} - \alpha_{MA}) = 30^{\circ}57'01,3'' + 360^{\circ} - 306^{\circ}15'12,8'' = 84^{\circ}41'48,5''$ .

Как видим, различие составляет всего  $0,5''$ , что для данных условий вполне допустимо.

Аналитическая оценка точности определения координат точки  $M$  по формуле (7.40) дает значение  $M = 0,0279 \text{ м} = 28 \text{ мм}$ . Все параметры, входящие в формулу (7.40), получены из решения обратной геодезической задачи по соответствующим направлениям ( $\varphi = 75^{\circ}15'47''$ ;  $S_2 = 2603,263 \text{ м}$ ;  $S_3 = 2412,376 \text{ м}$ ;  $S_4 = 3120,785 \text{ м}$ ;  $L_3 = 3268,047 \text{ м}$ ;  $L_4 = L_{CD} = 5185,992 \text{ м}$ ). При этом значение  $M$  вычислено с учетом определения координат через исходные пункты  $B$ ,  $C$  и  $D$  по формуле

$$m_M = \frac{S_3 m_{\beta}''}{\rho'' \sin(\varphi_C + \beta_2 + \beta_3)} \sqrt{\left(\frac{S_2}{L_3}\right)^2 + \left(\frac{S_4}{L_3}\right)^2}.$$

Аналогичная задача привязки точки  $M$  (задача *обратной однократной засечки*) может быть решена по формулам И.Ю.Пранис-Праневича. Она решается для трех исходных пунктов и двух измеренных горизонтальных углов в определяемой точке. Например, в соответствии со схемой рис. 7.8, для исходных пунктов  $A$ ,  $B$  и  $C$  и измеренных углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  координаты точки  $M$  вычисляют по формулам:

$$X_M = X_B + \Delta X = X_B + \frac{N}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_{BM}}, \quad (7.41)$$

$$Y_M = Y_B + \Delta X \times \operatorname{ctg} \alpha_{BM}, \quad (7.42)$$

где

$$\operatorname{ctg} \alpha_{BM} = \frac{(Y_B - Y_C) \operatorname{ctg} \beta_2 + (Y_B - Y_A) \operatorname{ctg} \beta_1 + X_C - X_A}{(X_B - X_C) \operatorname{ctg} \beta_2 + (X_B - X_A) \operatorname{ctg} \beta_1 + Y_A - Y_C},$$

$$N = (Y_B - Y_C)(\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \alpha_{BM}) + (X_C - X_B)(1 + \operatorname{ctg} \alpha_{BM} \operatorname{ctg} \beta_2).$$

**Пример 7.7.** Обратная однократная засечка.

Исходные данные примера 7.6.

**Решение** (для исходных пунктов А, В и С).

$\text{ctg}\alpha_{BM} = (-2789,170172)/(-4651,097936) = +0,599679949$  (третья четверть – ЮЗ).

$N = 398,5895246 + (-3434,064933) = -3035,475409$ .

$X_M = 3400,754$  м ;  $Y_M = 6645,212$  м.

Различия в значениях координат точки  $M$  по сравнению со значениями, полученными в примере 7.6, объясняются другими погрешностями измерений в схеме  $ABC$  по сравнению со схемой  $BCD$ .

Такая же задача способом обратной однократной засечки может быть решена по измеренным направлениям (рис. 7.9) по формулам *Деламбера*.

Для указанной засечки необходимо иметь четыре исходных пункта, наблюдаемых с точки  $M$ . Горизонтальные измеренные углы  $\beta$  приводят к какому-либо начальному направлению на исходный пункт, например, на пункт  $A$ . Значения координат точки  $M$  вычисляют дважды по двум последовательным схемам:  $ABC$  и  $BCD$ . При этом в схеме  $ABC$  за начальное направление принимают  $MA$ , а в схеме  $BCD$  –  $MB$ .

Из схемы  $ABC$ :

$$X_M = \frac{X_A \text{tg}\alpha_{AM} - X_B \text{tg}\alpha_{BM} + Y_B - Y_A}{\text{tg}\alpha_{AM} - \text{tg}\alpha_{BM}}, \quad (7.43)$$

$$Y_M = Y_A + (X_M - X_A) \text{tg}\alpha_{AM} = Y_B + (X_M - X_B) \text{tg}\alpha_{BM}, \quad (7.44)$$

где

$$\text{tg}\alpha_{AM} = \frac{(Y_B - Y_A) \text{ctg}\beta_1 + (Y_A - Y_C) \text{ctg}\beta_2 + X_C - X_B}{(X_B - X_A) \text{ctg}\beta_1 + (X_A - X_C) \text{ctg}\beta_2 + Y_B - Y_C};$$

$$\alpha_{BM} = \alpha_{AM} + \beta_1; \alpha_{CM} = \alpha_{AM} + \beta_2; \alpha_{DM} = \alpha_{AM} + \beta_3.$$

Аналогичные формулы, в соответствии со схемой привязки, составляют и для группы точек  $BCD$ .

**Пример 7.8.** Обратная однократная засечка по измеренным направлениям.

Исходные данные (см. пример 7.6).

**Решение** (для схемы  $ABC$ ).

В соответствии с рис. 7.8 и 7.9, в схеме  $ABC$

$\beta_1 = 84^\circ 41' 48''$ ;  $\beta_2 = 165^\circ 55' 13''$ ;  $\beta_3 = 304^\circ 45' 29''$ ;

Тогда  $\text{tg}\alpha_{AM} = -1,363648006$  (вторая четверть – ЮВ),  $\alpha_{AM} = 126^\circ 15' 13''$ ;  $\alpha_{BM} = 210^\circ 57' 01''$ ;  $\alpha_{CM} = 292^\circ 10' 26''$ ;  $\alpha_{DM} = 71^\circ 00' 42''$ .

В результате получены значения координат  $X_M = 3400,754$  м,  $Y_M = 6645,212$  м. Т.е. такие же, как и при вычислениях по формулам И.Ю.Пранис-Праневича.

## 68.5. Комбинированные засечки

Кроме рассмотренных выше схем привязки используются схемы *комбинированной засечки* (рис. 7.10).

В схеме рис. 7.10  $a$  положение точки  $M$  определяют способом обратной угловой засечки по углам  $\beta_1$  и  $\beta_2$  и для контроля – способом прямой угловой

засечки по углам  $\beta_3$  и  $\beta_4$ . При этом, например, угол  $\beta_4$  можно не измерять, а вычислить из треугольника  $ABM$  по углам  $\beta_1$  и  $\beta_3$ .

В схеме рис. 7.10 б дважды вычисляют дирекционный угол линии  $BM$  от направлений  $AB$  и  $BC$ , находят его среднее значение. Используя, затем, углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  находят дирекционные углы линий  $MD$  и  $ME$ . Далее по формулам Гаусса вычисляют координаты точки  $M$  из двух вариантов: относительно пунктов  $B$  и  $E$  и затем пунктов  $B$  и  $D$ .

Часто привязку целесообразно выполнять для двух точек одновременно, включенных в определяемую линию теодолитного или полигонометрического хода. Такие привязки используются, например, в схемах, приведенных на рис. 7.10 в, г, д.

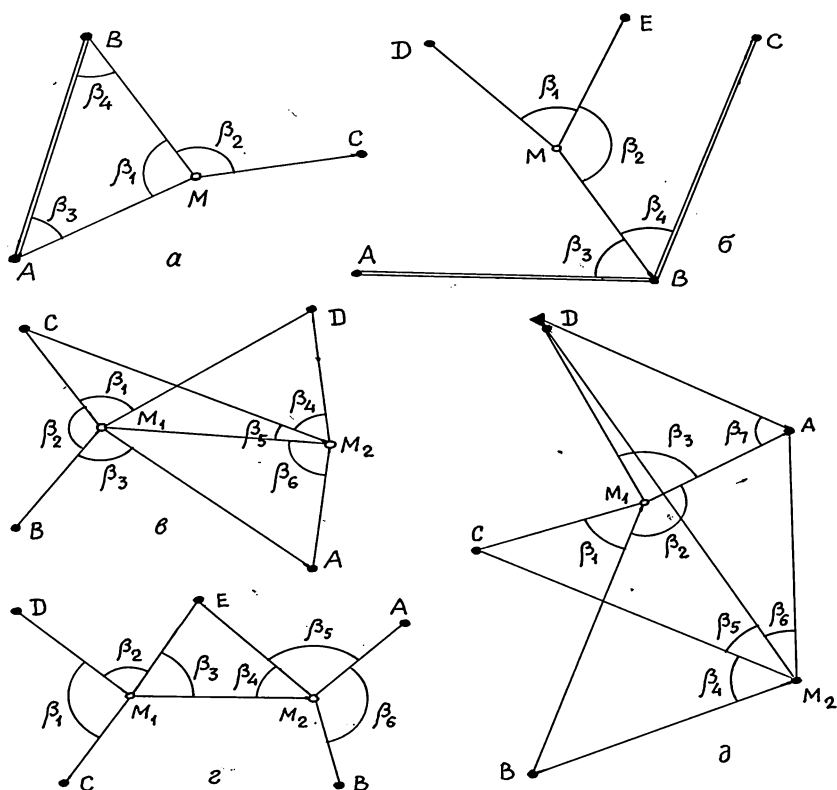


Рис. 7.10. Комбинированные засечки

В схеме рис. 7.10 в координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  определяют обратной засечкой по трем исходным пунктам, а координаты вспомогательной точки  $D$  – прямой засечкой с точек  $M_1$  и  $M_2$  и одного исходного пункта. Обычно координаты точки  $D$  определяют с пунктов  $M_1$  и  $A$  по формулам Юнга, а относительно точек  $M_1$  и  $M_2$  – по формулам тангенсов или котангенсов (контрольное вычисление).

Схемы рис. 7.10 г и д используют при густой сети исходных пунктов.



В схеме рис. 7.10  $\varepsilon$  координаты точки  $M_1$  определяют по четырем исходным пунктам, а координаты точки  $M_2$  по трем исходным пунктам и точке  $M_1$ . В схеме рис. 7.10  $\delta$ , при отсутствии видимости между определяемыми пунктами, выбирают вспомогательную точку  $D$ . При этом координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  находят по трем исходным пунктам, а координаты точки  $D$  – прямой засечкой с точек  $M_1$  и  $M_2$  и одного исходного пункта.

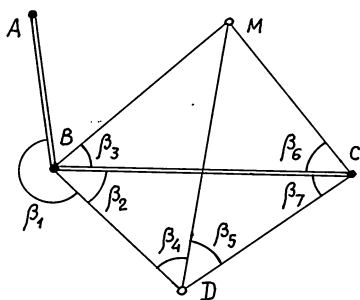


Рис. 7.11. Геодезический четырехугольник

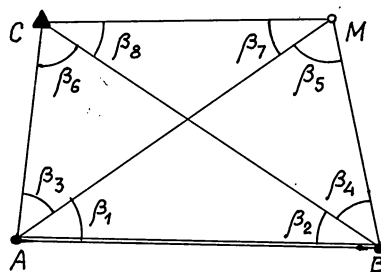


Рис. 7.12. Задача П.А.Ганзена

Схема рис. 92 представляет собой т.н. *геодезический четырехугольник*. При этом в указанной схеме подбирают такое положение точек  $M$  и  $N$ , чтобы все углы, кроме  $\beta_1$ , были не менее  $20^\circ$ . В замкнутом треугольнике  $BCD$  при использовании линии  $MD$  в теодолитном ходе, угловая невязка не должна превышать  $1,5'$ . Сначала, после уравнивания углов  $\beta_2, \beta_4, \beta_5$  и  $\beta_7$ , вычисляют координаты точки  $D$ , а затем, из двух вариантов по формулам прямой угловой засечки, координаты точки  $M$ .

#### 68.6. Задача П.А.Ганзена

Такую задачу (задачу о двух точках) решают при наличии всего двух исходных пунктов (рис. 7.12).

В этой схеме измеряют углы  $\beta_5, \beta_6, \beta_7$ , и  $\beta_8$  при определяемых точках  $M$  и  $C$ . Из треугольников  $ACM$  и  $BCM$  вычисляют углы  $\beta_3$  и  $\beta_4$ . Значения углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  находят по формулам:

$$\operatorname{ctg} \beta_1 = \frac{\sin \beta_6 \sin \beta_7 \sin(\beta_7 + \beta_8 + \beta_5)}{\sin \beta_8 \sin \beta_5 \sin(\beta_8 + \beta_5 + \beta_6) \sin(\beta_7 + \beta_8)} + \operatorname{ctg}(\beta_7 + \beta_8), \quad (7.45)$$

$$\operatorname{ctg} \beta_2 = \frac{\sin \beta_8 \sin \beta_5 \sin(\beta_6 + \beta_8 + \beta_5)}{\sin \beta_6 \sin \beta_7 \sin(\beta_8 + \beta_5 + \beta_7) \sin(\beta_7 + \beta_8)} + \operatorname{ctg}(\beta_7 + \beta_8). \quad (7.46)$$

Контролем вычислений является равенство:  $\beta_1 + \beta_2 = \beta_7 + \beta_8$ .

Далее решают прямые угловые засечки из треугольников  $AMB$  и  $ABC$ . Для контроля вычисляют дирекционные углы линии  $CM$  и направлений с определяемых точек на исходные пункты. По разностям дирекционных углов контролируют значения углов  $\beta$ .

## § 69. Особые системы теодолитных ходов

В случаях, когда на местности затруднено измерение линий (пересеченная местность, в населенных пунктах, в лесных массивах, имеющих густую сеть просек и др.), теодолитные ходы заменяют системами *четырёхугольников без диагоналей* (рис. 7.13). Данная система предложена И.В.Зубрицким.

В указанной системе в первом и последнем четырёхугольниках измеряют все углы и две стороны, а в заполняющих четырёхугольниках измеряют только одну сторону и все четыре угла. Углы в четырёхугольниках должны быть не менее  $30^\circ$  и не более  $150^\circ$  (оптимальные углы –  $90^\circ$ ).

На схеме измеренные углы обозначены буквами  $A, B, C, D$ , измеренные стороны – буквами  $a$  и  $b$ , вычисляемые стороны – буквами  $c$  и  $d$ .  $M$  и  $N$  – исходные геодезические пункты.

Стороны  $c$  и  $d$  в каждом из четырёхугольников вычисляют по формулам:

$$c = \frac{a \sin C + b \sin(A + B)}{\sin B} ; \quad d = \frac{b \sin A + a \sin(A + C)}{\sin B} \quad (7.47)$$

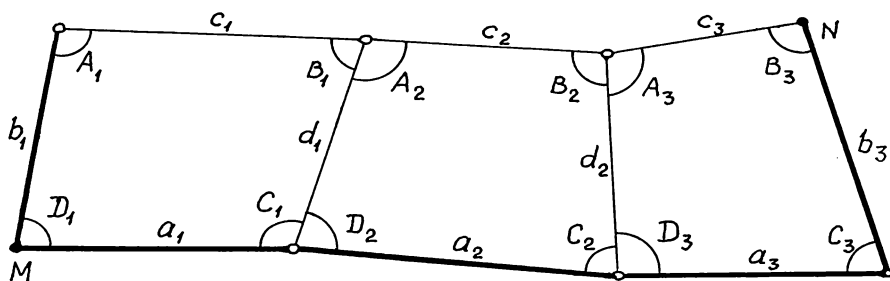


Рис. 7.13. Схема теодолитного хода в виде четырёхугольников без диагоналей (И.В.Зубрицкого).

Очевидно, что в последующих после первого четырёхугольника значения  $d$  являются значениями  $b$ .

Углы в четырёхугольниках уравнивают обычно отдельно, считая измерения равноточными, т.е. невязки распределяют поровну во все углы фигуры.

Координаты точек системы вычисляют по верхнему и нижнему ходам после вычисления сторон  $c$  и  $d$  и соответствующих дирекционных углов. Реже координаты определяют полярным способом. Например, после обработки нижнего хода координаты точек верхнего хода вычисляют полярным способом от точек нижнего.

Абсолютную погрешность определения стороны  $d$ , находящейся в самом слабом месте цепочки четырёхугольников, находят по формуле

$$m_{dn} = \sqrt{m_b^2 + \left( \frac{m_\beta}{\rho} \right)^2 \sum_1^n c_i^2}, \quad (7.48)$$

где  $n$  – число четырехугольников в ряде;  $c_i$  – средняя длина стороны четырехугольника;  $m_b$  и  $m_\beta$  – соответственно средние квадратические погрешности стороны  $b$  и измерения горизонтальных углов.

Допустимое число четырехугольников в ряде может быть оценено по формуле

$$n = \left( \frac{\rho}{m_\beta} \right)^2 (\delta_d^2 - \delta_b^2), \quad (7.49)$$

где  $\delta$  – относительные погрешности определения сторон  $d$  и  $b$ . Например, при  $\delta_b = 1:5000$ ,  $\delta_d = 1:2000$  и  $m_\beta = 10''$   $n = 89$ .

Относительную среднюю квадратическую погрешность определения сторон  $d$  при предварительных оценках считают для четырехугольников, близких к квадратам, по формуле

$$\delta_d = \sqrt{\delta_b^2 + \left( \frac{m_\beta}{\rho} \right)^2 n}. \quad (7.50)$$

Например, при  $\delta_b = 1:5000$ ,  $m_\beta = 10''$  и  $n = 10$   $\delta_d = 1:4000$ .

В другой схеме (рис. 7.14) вообще можно исключить измерение длин сторон теодолитного хода. В каждой точке теодолитного хода 1, 2, 3, 4, 5 измеряют горизонтальные углы от направлений на видимые геодезические

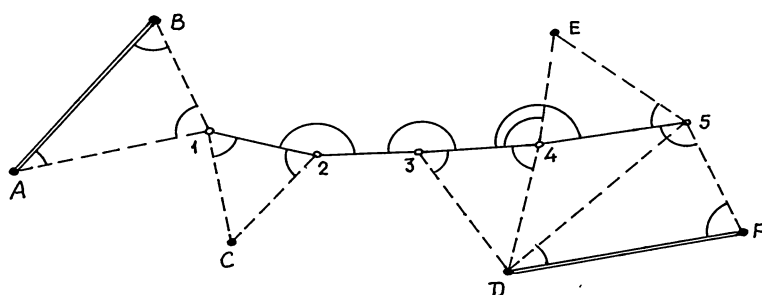


Рис. 7.14. Схема теодолитного хода без измерения сторон.

пункты  $A, B, C, D, E, F$ . Практически с каждой точки хода минимально необходимо брать направление на один исходный пункт. На рисунке для некоторых точек указаны дополнительные направления на другие пункты. Такую работу целесообразно выполнять с целью контроля результатов измерений. В этом случае координаты точек последовательно определяются способом угловых засечек. На данном рисунке приведена одна из возможных схем *теодолитных ходов без измерения длин сторон*. Простейшей схемой было бы построение направлений со всех точек теодолитного хода на один исходный пункт, если, конечно, он с них виден.

## § 70. Снесение координат с вершины знака на землю

Часто такую работу приходится выполнять в тех случаях, когда не имеется возможности установить теодолит непосредственно на геодезическом

знаке, т.е. выполнить центрирование непосредственно над вершиной измеряемого угла, которой является известная точка геодезического знака.

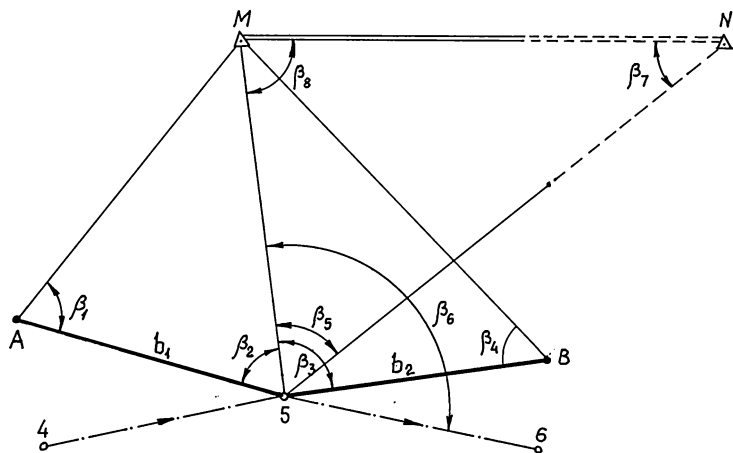


Рис. 7.15. Снесение координат с вершины геодезического знака на землю.

Для решения данной задачи от исходного пункта  $M$  (рис. 7.15) необходимо иметь в прямой видимости еще один пункт ( $N$ ) Государственной геодезической сети. Около пункта  $M$  выполняют разбивку двух базисов (основного и контрольного)  $b_1$  и  $b_2$ , которые измеряют с относительной погрешностью 1:3000 – 1:5000 компарированной рулеткой или светодальномером. Базисы располагают таким образом, чтобы между направлениями  $5M$  и  $5N$  был угол порядка  $90^\circ$ , а треугольники  $AM5$  и  $BM5$  были примерно равносторонними. Во всяком случае измеряемые горизонтальные углы  $\beta_1 - \beta_4$  необходимо выдерживать в пределах  $50^\circ - 70^\circ$ . Величины базисов должны быть порядка 60 – 100 м. При использовании для измерений рулетки было бы оптимальным, чтобы величина базиса не превышала длины рулетки.

На схеме снесения координат ломаная линия 4-5-6 является фрагментом теодолитного хода. При этом задачей снесения координат является не только определение координат точки 5, но и дирекционного угла, например, линии 5-6, т.е. решения полной задачи для элемента теодолитного хода.

Указанная задача решается после измерения базисов  $b_1$  и  $b_2$  и горизонтальных углов  $\beta_1 - \beta_6$ . При этом разбивка базиса  $b_2$  и все измерения, относящиеся к этому базису являются контрольным действием и обязательным для исполнения с целью обеспечения как необходимой точности определения координат точки 5 и дирекционного угла линии 5-6, так и для исключения возможной грубой погрешности, выявить которую при использовании только одного базиса не представляется возможным.

Углы  $\beta_i$  измеряют теодолитом Т5 двумя полными приемами, либо теодолитами типа Т15 тремя полными приемами с перестановкой лимба горизонтального круга между приемами на  $60^\circ - 90^\circ$ . Целесообразно между полными приемами выполнять повторное центрирование теодолита с целью приве-

дения в измерениях погрешности центрирования к вероятностному характеру. В данном случае указанная погрешность будет входить в значение каждого из измеренных углов в вероятностной форме, т.е. не являться чисто систематической. После измерений и тщательной проверки полевых журналов вычисляют средние значения измеренных углов.

Последовательность дальнейшей обработки результатов измерений производится по приведенному ниже алгоритму.

1. Из решения обратной геодезической задачи находят значение дирекционного угла  $\alpha_{MN}$  и горизонтального проложения  $d_{MN}$  исходного направления.

2. Вычисляют значения углов  $\gamma$  в точке  $M$  в соответствующих треугольниках  $AM5$  и  $BM5$  как разность между измеренными углами и  $180^\circ$ .

3. По теореме синусов дважды находят значение стороны  $M5$  и ее среднее значение  $d_{M5}$ :

$$d_{M5(1)} = b_1 \frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma_{(1)}} ; \quad d_{M5(2)} = b_2 \frac{\sin \beta_4}{\sin \gamma_{(2)}} ; \quad d_{M5} = 0,5(d_{M5(1)} + d_{M5(2)}) \quad (7.51)$$

4. По теореме синусов вычисляют значение угла  $\beta_8$

$$\beta_8 = \arcsin \left( \frac{d_{M5}}{d_{MN}} \sin \beta_5 \right) \quad (7.52)$$

и затем – значение угла

$$\beta_7 = 180^\circ - (\beta_8 + \beta_5) \quad (7.53)$$

5. Из решения прямой геодезической задачи определяют координаты точки 5:

$$X_5 = X_M + d_{M5} \cos \alpha_{M5} ; \quad Y_5 = Y_M + d_{M5} \sin \alpha_{M5} , \quad (7.54)$$

где  $\alpha_{M5} = \alpha_{MN} + \beta_8$  для приведенной схемы.

6. Для контроля вычислений из решения обратной геодезической задачи определяют дирекционный угол направления  $N5$  ( $\alpha_{N5}$ ) и значение угла

$$\beta_7 = \alpha_{M5} - \alpha_{MN} . \quad (7.55)$$

Полученное значение  $\beta_7$  должно соответствовать его значению, вычисленному по формуле (7.53).

7. Передают дирекционный угол на определяемое направление 5-6:

$$\alpha_{56} = \alpha_{M5} \pm 180^\circ + \beta_6 . \quad (7.56)$$

Далее приведем пример обработки результатов измерений при передаче координат с вершины геодезического знака на точку теодолитного хода по указанному выше алгоритму.

**Пример 7.9.** Снесение координат с вершины геодезического знака на землю.

Исходные данные (для схемы рис. 7.15):

$X_A = 6235,756$  м;  $Y_A = 4487,064$  м;  $X_B = 2183,641$  м;  $Y_B = 7216,442$  м;  
 $\beta_1 = 56^\circ 32' 23''$ ;  $\beta_2 = 58^\circ 55' 36''$ ;  $\beta_3 = 58^\circ 24' 02''$ ;  $\beta_4 = 62^\circ 52' 35''$ ;  $\beta_5 = 88^\circ 19' 14''$ ;  
 $\beta_6 = 130^\circ 42' 56''$ . Значения базисов:  $b_1 = 88,846$  м;  $b_2 = 80,552$  м.

**Решение.**

1. Из решения обратной геодезической задачи : дирекционный угол направления  $MN$   
 $\alpha_{BT} = 146^\circ 02' 13,3''$  ; горизонтальное проложение  $d_{MN} = 4885,605$  м.

2. Вычисляем значения углов  $\gamma$  в треугольниках (1) и (2):

$$\gamma_{(1)} = 180^\circ - (56^\circ 32' 23'' + 58^\circ 55' 36'') = 64^\circ 32' 01'';$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - (58^\circ 24' 02'' + 60^\circ 45' 06'') = 60^\circ 50' 52''.$$

3. По формулам (7.51) дважды (из двух треугольников) находим горизонтальное положение линии  $M5$ :

$$d_{M5(1)} = 88,846 \frac{\sin 56^\circ 32' 23''}{\sin 64^\circ 32' 01''} = 82,098 \text{ м}$$

$$d_{M5(2)} = 80,552 \frac{\sin 62^\circ 52' 35''}{\sin 60^\circ 50' 52''} = 82,092 \text{ м}$$

Разница в значениях  $d_{M5}$  составляет 0,006 м, что допустимо для расстояния 82 м.

$$d_{M5} = 0,5(82,098 + 82,092) = 82,095 \text{ м}.$$

4. Вычисляем значения углов  $\beta_7$  и  $\beta_8$ :

$$\beta_7 = \arcsin \left( \frac{82,095}{4885,605} \sin 88^\circ 19' 14'' \right) = 0^\circ 57' 44,6'';$$

$$\beta_8 = 180^\circ - (0^\circ 57' 44,6'' + 88^\circ 19' 14'') = 90^\circ 43' 01,4''.$$

5. Вычисляем значения координат точки 5 теодолитного хода.

Дирекционный угол направления  $M5$

$$\alpha_{M5} = 146^\circ 02' 13,3'' + 90^\circ 43' 01,4'' = 236^\circ 45' 14,7''.$$

$$X_5 = 6235,756 + 82,095 \cos 236^\circ 45' 14,7'' = 6190,749 \text{ м}.$$

$$Y_5 = 4487,064 + 82,095 \sin 236^\circ 45' 14,7'' = 4418,406 \text{ м}.$$

6. Контрольное вычисление.

Из решения обратной геодезической задачи значение дирекционного угла направления  $N5$   $\alpha_{N5} = 325^\circ 04' 28,7''$ .

Значение  $\beta_7 = 146^\circ 02' 13,3'' + 180^\circ - 325^\circ 04' 28,7'' = 0^\circ 57' 44,6''$ , что совпадает с вычисленным ранее значением.

7. Выполняем передачу дирекционного угла на определяемую линию 5-6 теодолитного хода:

$$\alpha_{56} = 236^\circ 45' 14,7'' - 180^\circ + 130^\circ 42' 56'' = 187^\circ 28' 10,7'' \approx 187^\circ 28' 11''.$$

## § 71. Определение элементов приведения и редукции

При проведении работ по сгущению плановой геодезической сети, когда выполняются угловые измерения, не всегда удастся установить теодолит строго над центром геодезического знака. Кроме того, вертикальная ось визирного цилиндра геодезического знака (сигнала или пирамиды) может не проходить через центр знака. В этих случаях при измерениях углов и направлений возникают погрешности, значительно превышающие необходимую точность измерений. Для исключения погрешностей за центрировку теодолита и редукцию знаков выполняют комплекс измерений на каждом из геодезических пунктов.

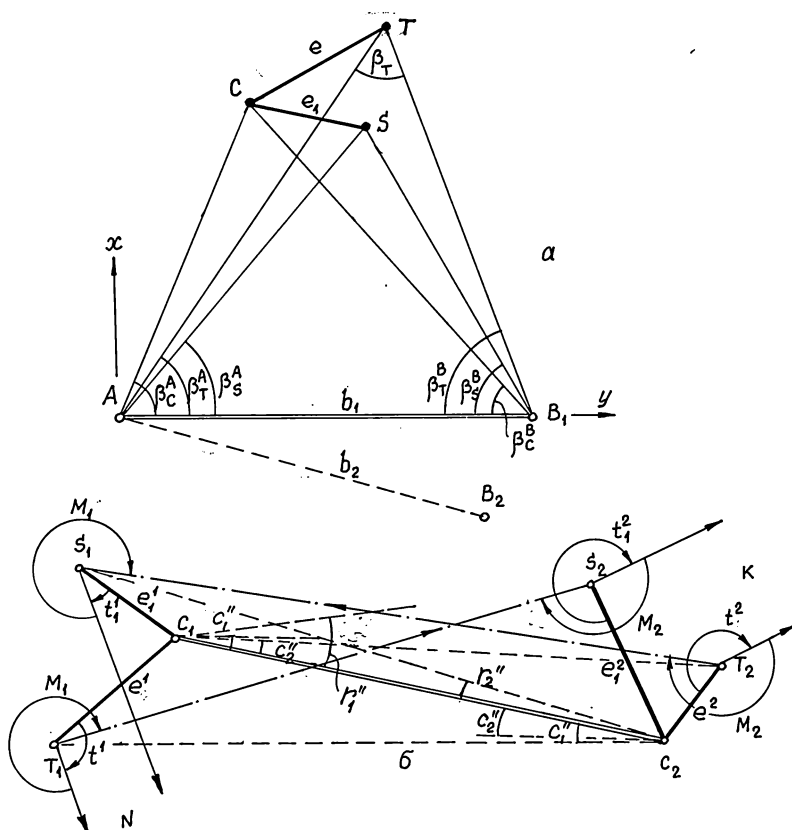


Рис. 7.16. Определение элементов приведения и редукции.

Рассмотрим схему измерений (рис. 7.16), необходимых для определения элементов приведения и редукции:  $e$  – расстояние от теодолита  $T$  до центра знака  $C$ ;  $e_1$  – расстояние от центра знака  $C$  до вертикальной оси  $S$  визирного цилиндра.

На местности у геодезического пункта разбивают два базиса: основной  $AB_1 = b_1$  и контрольный  $AB_2 = b_2$ . Базисы измеряют стальной компарированной рулеткой. В точках  $A$  и  $B_1$  первого базиса, а также в точках  $A$  и  $B_2$  второго базиса измеряют горизонтальные углы  $\beta$ . В точке стояния рабочего теодолита ( $T$ ) измеряют угол  $\beta_T$  с целью контроля и уравнивания углов  $\beta_T^A, \beta_T^B, \beta_T^C$ .

Вводят условную систему координат, ось  $y$  которой совпадает с направлением базиса, при этом дирекционный угол  $\alpha_{AB_{1(2)}} = 90^\circ$ ;  $X_A = 0$ ;  $Y_A = b_{1(2)}$ .

Далее способом *прямой угловой засечки*, либо прямым расчетом из решения прямых геодезических задач, определяют координаты точек  $C$ ,  $T$  и  $S$ . По разностям полученных координат вычисляют величины  $e$  и  $e_1$  из решений основного и контрольного базисов. Если расхождения между полученными значениями допустимы, то вычисляют средние их значения.

Указанный метод определения элементов приведения называется *аналитическим*. Он может использоваться при любых значениях  $e$  и  $e_1$ . Если значения  $e$  и  $e_1$  меньше 30 см, то чаще применяют *графический метод*.

При графическом методе используют т.н. *центрировочный лист* (лист бумаги), на который с помощью вспомогательного теодолита с трех точек стояния проектируют точки  $C$ ,  $T$  и  $S$ . Затем отмечают среднее их положение по трем полученным направлениям и графически, с точностью до 1 мм, измеряют искомые элементы приведения.

На этом же центрировочном листе прочерчивают начальное направление на одно из измерявшихся направлений. Значения углов, необходимых для вычисления поправок за центрировку и редукцию, получают также графически с центрировочного листа с помощью транспортира (с точностью до 15'). При аналитическом методе определения элементов приведения идентичные ориентирные углы получают из результатов измерения направлений.

На рис. 7.16 б показана схема, поясняющая принцип введения поправок за центрировку и редукцию на двух геодезических пунктах. Истинным направлением, которое и должно быть определено с указанных пунктов, является линия  $C_1C_2$ . В точках 1 и 2 определены элементы приведения  $e$  и  $e_1$ , а также углы  $M$  и  $t$ . В точке 1 в качестве нулевого (начального) направления принято направление на пункт  $N$ , а в точке 2 – на пункт  $K$ . В процессе измерений визирование с точки 1 на точку 2 производилось из точки  $T_1$  на точку  $S_2$ , а в точке 2 – из точки  $T_2$  на точку  $S_1$ .

Значения поправок за центрировку  $c$  и редукцию  $r$  (в секундах) в каждом из пунктов вычисляют по формулам

$$c_1'' = \frac{e^1 \sin(M_1 + t^1)}{S_{12}} \rho'' ; \quad r_1'' = \frac{e_1^1 \sin(M_1 + t_1^1)}{S_{12}} \rho'' \quad (7.57)$$

$$c_2'' = \frac{e^2 \sin(M_2 + t^2)}{S_{12}} \rho'' ; \quad r_2'' = \frac{e_1^2 \sin(M_2 + t_1^2)}{S_{12}} \rho'' \quad (7.58)$$

Поправки  $c$  и  $r$  со своими знаками учитывают в измеренных направлениях следующим образом. Поправку  $c_1$  вводят в измеренное направление  $T_1S_2$  (1-2), а поправку  $c_2$  – в измеренное направление  $T_2S_1$  (2-1). Для поправок  $r$  – наоборот: поправку  $r_1$  вводят в направление 2-1, а поправку  $r_2$  – в направление 1-2.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим следующий пример.

**Пример 7.10.** Определение поправок за центрировку и редукцию.

Исходные данные (в соответствии со схемами рис. 7.16).

Пункт 1	Пункт 2
Направление 1-2 ( $T_1S_2$ ) = 147°53'12,85"	Направление 2-1 ( $T_2S_1$ ) = 63°26'13,18"
$e^1 = 0,156$ м; $e_1^1 = 0,056$ м;	$e^2 = 0,170$ м; $e_1^2 = 0,033$ м
$M_1 = 271^\circ 30'$ ; $t^1 = 110^\circ 10'$ ; $t_1^1 = 25^\circ 25'$	$M_2 = 210^\circ 45'$ ; $t^2 = 192^\circ 00'$ ; $t_1^2 = 269^\circ 50'$
$S_{12} = 4725,35$ м	

**Решение.**

$$c_1'' = 0,156 \frac{\sin(271^\circ 30' + 110^\circ 10')}{4725,35} 20626 \text{ } 5'' = +2,51'';$$



$$r_1'' = 0,056 \frac{\sin(271^\circ 30' + 25^\circ 25')}{4725,35} 20626'' = -2,18'';$$

$$c_2'' = 0,170 \frac{\sin(210^\circ 45' + 192^\circ 00')}{4725,35} 20626'' = +5,04'';$$

$$r_2'' = 0,033 \frac{\sin(210^\circ 45' + 269^\circ 50')}{4725,35} 20626'' = +1,25''.$$

Редуцированное направление 1-2:

$$T_1 S_2 + c_1 + r_2 = 147^\circ 53' 12,85'' + 2,51'' + 1,25'' = 147^\circ 53' 16,61''.$$

Редуцированное направление 2-1:

$$T_2 S_1 + c_2 + r_1 = 63^\circ 26' 13,18'' + 5,04'' - 2,18'' = 63^\circ 26' 16,04''.$$

Таким образом, на каждом из пунктов для всех измеренных направлений, после определения элементов приведения, по значениям углов  $M$  и  $t$  вычисляют соответствующие поправки  $c$  и  $r$ . Очевидно, что эти поправки заметно зависят от расстояния между пунктами. Обратите внимание на то, что при использовании в примере 7.10 расстояния почти в 5 км поправки  $c$  и  $r$  даже при небольших значениях  $e$  оказались заметно больше точности измерений, например, теодолитом Т2. Фактически часто величины  $e$  могут составлять более 25 – 30 см. Если же расстояния между пунктами меньше 5 км, что часто имеет место при сгущении геодезических и маркшейдерских сетей, учет поправок за центрировку и редукцию является весьма ответственной операцией.

## § 72. Привязка теодолитных ходов к стенным геодезическим знакам

На плотно застроенной территории весьма сложно подобрать для привязки пункты, которые наблюдались бы с определяемой точки. В некоторых случаях это удается выполнить, если исходные пункты находятся на стене одного здания и видны с точек съемочного обоснования (рис. 7.17 а). В других случаях исходные пункты не находятся в прямой видимости друг с другом, а также в прямой видимости с определяемой точки съемочного обоснования (рис. 7.17 б).

В схеме а задача решается следующим образом.

Напротив исходных пунктов  $A$  и  $B$  выполняют разбивку базиса  $CD$  примерно параллельно исходному направлению. Измеряют на местности горизонтальные углы  $\beta$  и расстояния  $S$  (горизонтальные проложения). Для определения горизонтальных проложений измеряют превышения между соответствующими точками способом геометрического нивелирования. Далее решают треугольники  $ABC$  и  $BDC$ , т.е. находят недостающие элементы треугольников, передают дирекционный угол на направление  $AC$  и дважды, по ходам  $A-C$  и  $B-D-C$ , из решения прямых геодезических задач вычисляют координаты точки  $C$ . Затем дирекционный угол передают на сторону  $C-2$  и потом 2-3, определяют координаты точки 2 через координаты точки  $C$ .

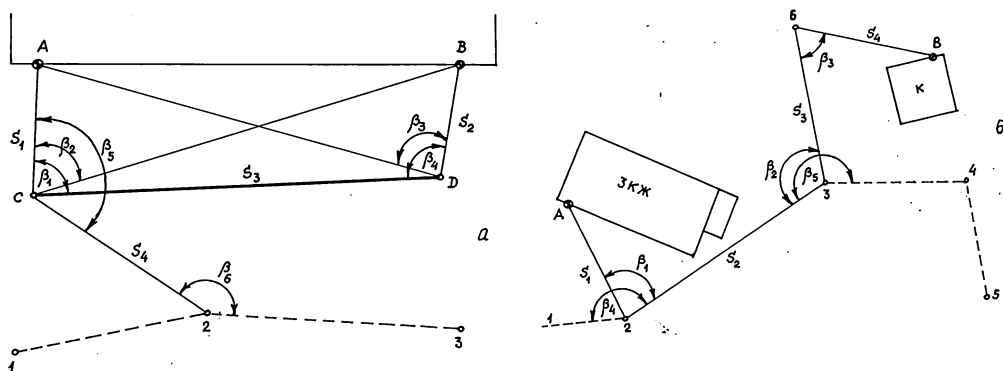


Рис. 7.17. Привязка теодолитного хода к стенным геодезическим знакам

В схеме *б* фрагмент 2-3 теодолитного хода 1-2-3-4-5 входит в систему привязки между двумя исходными пунктами *A* и *B*, между которыми образован отдельный теодолитный ход *A*-2-3-6-*B*. В этом ходе определяют координаты всех точек, в том числе и элемента 2-3 основного теодолитного хода. Пример обработки такого хода приведен в § 115, п. 115.3.

Если в схеме *б* теодолитный ход замкнутый, то приведенной привязки уже достаточно для полного решения задачи. Если же ход разомкнутый, то необходима привязка на другом его конце таким или другим известным способом.

### § 73. Спутниковые методы определения координат

Орбитальная плоскость *V* любого спутника ориентирована относительно плоскости *W* экватора (рис. 7.18). Линия пересечения плоскостей *V* и *W* называется *линией узлов* (узел *U* – *восходящий*, соответствует движению спутника из южной половины небесной сферы в северную, узел *D* – *нисходящий*, движение в нем происходит из северной половины небесной сферы в южную). Положение плоскости орбиты спутника полностью определяется двумя орбитальными моментами – *долготой  $\Phi$  восходящего узла* и *наклоением  $i$  орбиты*. Угол  $\Phi$  отсчитывают в плоскости *W* от оси *X* до линии узлов. Он изменяется от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ . Если угол  $i = 90^\circ$ , то орбита называется *полярной*, если  $i = 0^\circ$ , то орбита называется *экваториальной*, при других значениях  $i$  – *наклонной*.

В соответствии с законом Кеплера спутник движется по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится Земля. Прямая линия, соединяющая точки фокусов эллипса называется *линией апсид*. Точки пересечения линии апсид с эллипсом называют *апсидами*. Ближайшую к Земле точку называют *перигеентром* (*перигеем  $\Pi$* ), а удаленную – *апоцентром* (*апогеем  $A$* ). Ориентация орбиты в орбитальной плоскости характеризуется углом перигея  $w_n$  между направлением на перигей и линией узлов.

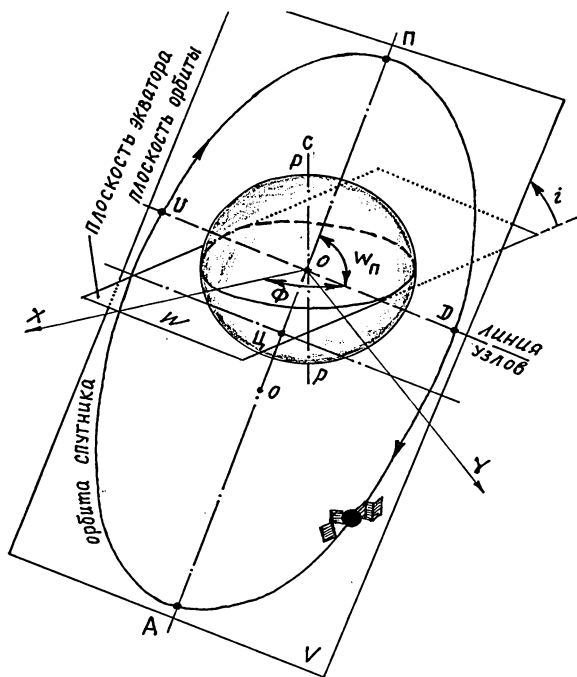
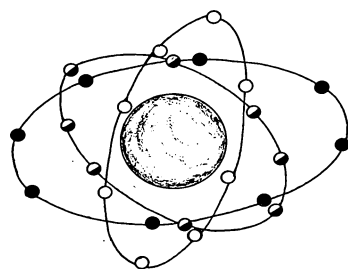
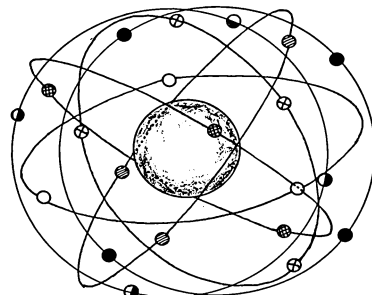


Рис. 7.18. Характеристики орбиты спутника



Навигационная система  
ГЛОНАСС



Навигационная система NAVSTAR  
GRS

Рис. 7.19. Расположение спутников  
на орбитах

Если движение спутника происходит по закону Кеплера, то при этом строго устанавливаются пять неизменных параметров: долгота, наклонение, угол перигея, фокальный параметр эллипса и эксцентриситет эллипса. Шестым параметром является *истинная аномалия*, определяемая моментом времени (эпохой) нахождения спутника на орбите.

Относительная погрешность бортовых часов спутника составляет  $10^{-13}$ , т.е. примерно  $3 \cdot 10^{-6}$  с/год. Наземные часы станции контроля и управления точнее бортовых часов, поэтому в моменты сеансов связи в бортовое время вводят поправки. Наземные часы, используемые непосредственно геодезистами при измерениях, в  $10^6$  раз грубее, т.е. имеют погрешность 3 с/год.

В настоящее время действуют две спутниковых системы, американская и российская, которые раньше предусматривалось использовать в военных целях. Точность определения координат одиночного приемника спутниковых сигналов составляет 10 – 100 м, но точность определения приращений координат высокая, до  $(5 \text{ мм} + D \cdot 10^{-6})$ . Т.е., если известны прямоугольные координаты одной из точек, то приращения координат определяемой точки относительно нее могут быть получены с высокой точностью. Для этого достаточно установить приемники спутниковых сигналов на определяемой точке и, например, на триангуляционном пункте Государственной геодезической сети.

Американская система *NAVSTAR GPS* (Navigation System with Time And Ranging Global Positioning System – *навигационная система определения*

расстояний и времени, глобальная система позиционирования) и российская система ГЛОНАСС (глобальная навигационная спутниковая система) в комплектации должны состоять из 24 спутников. 21 спутник – действующие, 3 – запасные (рис. 7.19). ГЛОНАСС имеет по 9 (с декабря 2004 г.) спутников в трех орбитальных плоскостях, NAVSTAR GPS – по 3-4 спутника в шести орбитальных плоскостях. Расстояние от центра масс Земли до спутника равно 26600 км (геодезическая высота 20180 км), в результате чего период обращения спутника на орбите составляет 12 часов (звездного времени). Таким образом, каждый спутник в данном месте положения наблюдателя появляется ежедневно на 4 минуты раньше его вчерашнего положения. Количество действующих спутников и распределение их по орбитам обеспечивает одновременный прием сигналов от четырех спутников, при этом решается пространственная геометрическая задача засечки определяемой точки.

Для приема сигналов и управления спутниками на территории России установлено 8 станций : Москва, Санкт-Петербург, Воркута, Енисейск, Улан-Удэ, Петропавловск-Камчатский, Уссурийск. Станции управления и контроля системы NAVSTAR GRS расположены вдоль экватора.

В системе ГЛОНАСС каждый спутник излучает сигналы на своей частоте (на двух установленных частотах), но при этом код всех спутников одинаковый. В американской навигационной системе наоборот, каждый из спутников имеет свой «личный» код, а сигналы они излучают, как и российские спутники, на двух частотах.

Наземная часть спутниковых систем навигации состоит из центра управления, контрольных, командных, квантово-оптических и др. станций, обеспечивающих нормальную работу бортовых систем спутников.

Для измерения времени используют основную астрономическую единицу – сутки (86400 с). Земные сутки определяются временем полного обращения Земли вокруг своей оси. Кроме этого, для измерения времени используют и звездные сутки, которые определяются по интервалу времени между двумя последовательными прохождениями Земли через точки весеннего равноденствия. Поскольку вращение Земли вокруг своей оси является нестабильным, что при современных требованиях точности является весьма значимым фактором, влияющим на точность измерений, в настоящее время, с 1967 г., осуществлен переход на более стабильную единицу измерения времени – атомную секунду. Атомная секунда определяется временем, за которое совершается определенное число колебаний в энергетическом переходе между уровнями атома цезия-133.

Созданы эталоны атомных часов, с помощью которых спутниковые часы постоянно контролируют. В наземных условиях при измерениях используют весьма стабильные часы, но, поскольку они менее стабильны, чем часы, установленные на спутниках, то при приеме сигналов со спутников наземные рабочие часы синхронизируют с часами спутниковой системы, иначе при измерениях возникнут недопустимо большие погрешности. Достаточно сказать, что при вычислениях орбитальных параметров число  $\pi$  определяют с точностью до 13 – 14 знака после запятой.

В результате выполнения измерений возникают погрешности, обусловленные многочисленными факторами. Среди них наиболее существенными являются следующие. *Вращение Земли* за время движения сигнала вызывает смещение приемника. Практически перемещение приемника составляет 40-50 м. *Релятивистские эффекты* обусловлены тем, что часы на спутнике и на Земле расположены в разных местах, определяемых разными гравитационными потенциалами и перемещаются в пространстве с разными скоростями. *Влияние ионосферы и тропосферы* на параметры электромагнитных сигналов (искажение фазы колебаний, изменение показателя преломления и др.). *Влияние отраженных сигналов* сказывается в том, что приемник регистрирует совокупность электромагнитных колебаний, отраженных и от близко расположенных к нему объектов ситуации. В линейной мере такие влияния могут оцениваться погрешностью до 5 см. Для исключения и ослабления действия внешних возмущающих факторов на точность определения координат в результаты измерений вводят соответствующие поправки.

## **§ 74. Организация полевых работ при построении съемочного обоснования**

При построении съемочного обоснования в виде теодолитного хода необходимо выполнить целый комплекс подготовительных работ, а затем и измерительных работ, с целью получения необходимой информации для вычисления координат точек съемочного обоснования. Рассмотрим состав основных геодезических работ на местности в примерной последовательности их исполнения. Внутри групп «подготовительные» и «измерительные» работы возможна перестановка последовательности работ.

К подготовительным работам относятся: рекогносцировка местности и закрепление точек съемочного обоснования; подготовка абрисов горизонтальной съемки; поверки теодолита и нивелира; компарирование мерных приборов.

К измерительной части относится: привязка теодолитного хода; измерение длин линий хода; измерение горизонтальных углов и углов наклона; горизонтальная съемка; тахеометрическая съемка; геометрическое нивелирование по точкам теодолитного хода (см. гл. 9).

### **74.1. Рекогносцировка и закрепление точек съемочного обоснования**

Целью рекогносцировки является выбор мест заложения точек теодолитного хода, с которых в дальнейшем будет выполняться, например, *топографическая съемка* местности. Выбор положения точек съемочного обоснования во многом определяется целями и задачами его построения, а также сложностью участка местности, на котором оно строится. Во-первых, число точек съемочного обоснования должно быть минимальным при обеспечении решения поставленной задачи. Во-вторых, с каждой из точек съемочного обоснования должен обеспечиваться хороший обзор местности. В-третьих,

схема привязки теодолитного хода должна быть оптимальной, и она должна обеспечивать привязку с необходимой точностью. В-червертых, с каждой из точек теодолитного хода должны быть видимы две ее соседних точки. Оптимально, чтобы обеспечивалась непосредственная видимость соседних точек обоснования.

Точки теодолитного хода закрепляют на местности различными способами. В одних случаях ими могут быть деревянные колья круглого или квадратного сечения, в торец которых забивают гвоздь, либо ввинчивают шуруп. В других случаях ими могут быть металлические трубы диаметром 10 мм, либо металлические штыри того же или несколько меньшего диаметра. Часто в качестве точки съемочного обоснования используют накерненные на обечайках смотровых колодцев, либо других металлических конструкциях, метки. В твердое покрытие (асфальт, бетон и т.п.) забивают стальные дюбели со сферической головкой.

Во многом способ закрепления точек съемочного обоснования определяется необходимым временем сохранности указанного геодезического знака (временный или долговременный знак). В связи с этим точки следует выбирать в местах, обеспечивающих их сохранность на необходимый период времени.

#### 74.2. Подготовка абрисов горизонтальной съемки

*Абрис* – это зарисовка ситуации местности (иногда с примерными формами рельефа) в принятом удобном масштабе относительно точек и линий съемочного обоснования, с которых планируется выполнять в дальнейшем топографическую (горизонтальную) съемку.

Несмотря на то, что составление абрисов относится к измерительной части работы, целесообразно зарисовку абрисов выполнять в процессе рекогносцировки (если, конечно, съемочное обоснование строится именно для выполнения топографической съемки). Это позволит оптимизировать схему теодолитного хода, а также выявить ее возможности для выполнения горизонтальной или другой съемки.

Вид абрисов горизонтальной съемки представлен далее на рис. 8.2 и 8.3.

#### 74.3. Поверки теодолита и нивелира

Перед началом полевых работ необходимо выполнить обследование и поверки измерительных средств в объемах, указанных в § 46 и § 52. Кроме того, выполняют обследование и других принадлежностей, входящих в комплект измерительных средств: штативов, реек и др.

Штативы должны быть устойчивыми, со сравнительно легким ходом раздвижных частей ножек. Рейки должны иметь четкий рисунок шкал. Складные рейки должны надежно фиксироваться в рабочем положении стопорным устройством.

#### 74.4. Компарирование мерных приборов

*Компарирование* – сравнение длины мерного прибора с длиной эталона.

Мерные приборы, например, рулетки, выпускают определенной номинальной длины  $l_0$ . Фактическая длина полотна рулетки может несколько отличаться от номинала на величину  $\Delta$ . Компарирование заключается в определении значения  $\Delta$  при какой-либо температуре компарирования  $t_0$ . Для этой температуры с достаточной точностью известна длина эталона. Компарирование может проводиться и другими методами, в лабораторных условиях, например, с помощью *интерферометра*.

Полевой компаратор представляет собой базис длиной 120 м, величину которого определяют точными методами. Базис полевого компаратора несколько раз (4-5 раз) измеряют рабочим мерным прибором с одновременным измерением температуры  $t_0$  окружающего воздуха. Разность между средним значением базиса, измеренного рабочим мерным прибором, и точным значением базиса является поправкой  $\Delta$  за компарирование.

При измерениях линий на местности измеряют рабочую температуру окружающего воздуха и учитывают ее при определении измеренного расстояния по формуле:

$$l = l_0 + \Delta + \alpha l_0 (t - t_0), \quad (7.59)$$

где  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения стали, равный  $12 \cdot 10^{-6}$ .

**Пример 7.11.** Введение поправок за компарирование и температуру.

Исходные данные. Прокомпарирована рулетка Р50 ( $l_0 = 50 \text{ м} = 50000 \text{ мм}$ ) при  $t_0 = 18^\circ\text{C}$ . Получено значение  $\Delta = +2,7 \text{ мм}$ .

Измерена длина линии – 83,656 м при температуре  $t = 10^\circ\text{C}$ .

Требуется найти истинную длину измеренной линии.

**Решение.**

В формуле (7.59) значение  $l_0$  принимаем равным 83,656 м = 83656 мм. Тогда

$$l = 83656,0 + 83656,0 \frac{+2,7}{50000} + 12 \times 10^{-6} 83656,0 (10^0 - 18^0) = 83656,0 + 4,5 - 8,0 = 83652,5 \text{ мм}.$$

В приведенном уравнении (сумме) второй член характеризует значение поправки за компарирование для длины рулетки в 83,656 м.

Помимо учета поправок за температуру иногда учитывают поправку за разность натяжения рулетки при компарировании и при измерениях:

$$\Delta_P = \frac{1}{ES} l_0 (P - P_0), \quad (7.60)$$

где  $E$  – модуль упругости стали ( $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ );  $S$  – площадь поперечного сечения полотна мерного прибора;  $P_0$  и  $P$  – сила натяжения мерного прибора при компарировании и измерениях.

**Пример 7.12.** Вычисление поправок за натяжение полотна мерного прибора.

Исходные данные:  $P_0 = 150 \text{ Н}$ ;  $P = 100 \text{ Н}$ ;  $S = 0,04 \text{ см}^2$ . Рулетка Р50 (50 м).

**Решение.**

$$\Delta_P = \frac{1}{2 \times 10^6 \times 0,04} 50000 \times (10 - 15) = +3,1 \text{ мм}.$$

Часто считают  $P = P_0$  и указанную выше поправку не учитывают.

#### 74.5. Измерение длин линий

В конечном счете результатом измерения длины линии теодолитного хода должно явиться ее горизонтальное проложение.

При измерениях ленту или рулетку укладывают в створе линии, который контролируют визуально по вехам, установленным в крайних точках линии, либо с помощью теодолита. Как правило, длины линий превышают длину мерного прибора, поэтому в ее створе откладывают несколько полных длин мерного прибора (несколько номиналов), либо каких-либо фиксированных отрезков, примерно равных номиналу прибора. Остаток линии, меньший номинала, измеряют отдельно. Мерный прибор укладывают на землю с натяжением в 10 кг, что обеспечивается использованием специальных динамометров, либо определяется по опыту мерщика.

Линию измеряют в прямом и обратном направлениях. Разность в результатах измерений в относительной форме не должна превышать установленного инструкциями допуска:

$$\delta_s = \frac{|S_{пр} - S_{обр}|}{S_{ср}} = \frac{\Delta S}{S_{ср}} = \frac{1}{N} \leq \left( \frac{1}{N} \right)_{доп}, \quad (7.61)$$

где  $S_{пр}$  и  $S_{обр}$  – результаты измерений в прямом и обратном направлениях;  $S_{ср}$  – среднее значение измеренного расстояния;  $N$  – знаменатель относительной погрешности. Если условие (7.61) выполняется, то среднее значение принимают за результат измерения.

В зависимости от назначения съемочного обоснования установлены различные значения допустимых относительных погрешностей на измерение длин линий:

- 1:20000 – при точных разбивочных работах;
- 1:2000 ... 1:5000 – построение съемочного обоснования для топографических съемок; разбивочные работы средней точности; изыскания для строительства инженерных сооружений;
- 1:1500 – топографические съемки; разбивочные работы малой точности в строительстве;
- 1:1000 – съемочное обоснование для обеспечения геодезических работ при геологических исследованиях.

В технических теодолитных ходах, в зависимости от условий измерений, установлены следующие относительные допустимые погрешности на измерение длин линий: 1:3000 – при измерениях по ровной плотной поверхности (по асфальту, по проезжим частям дорог с покрытием и т.п.); 1:2000 – при измерениях по твердому земляному грунту по слабопересеченной местности; 1:1000 – при измерениях по мягкому грунту, по кочковатым поверхностям, по зарослям высокой травы, кустарника и т.п.

Для приведения наклонной линии к горизонту необходимо измерить угол ее наклона. Если линия однородная (рис. 7.20 а), то обычно угол наклона измеряют теодолитом при угловых измерениях в теодолитных ходах. В этом случае горизонтальное проложение  $d$  будет равно



$$d = S \times \cos v. \quad (7.62)$$

Если линия неоднородная (рис. 7.20 б), состоит из нескольких однородных отрезков ( $A-I$ ,  $I-2$ ,  $2-B$ ), то для каждого из них определяют наклонное расстояние и угол наклона и вычисляют затем общее горизонтальное проложение линии  $AB$  по формуле

$$d = \sum S_i \times \cos v_i. \quad (7.63)$$

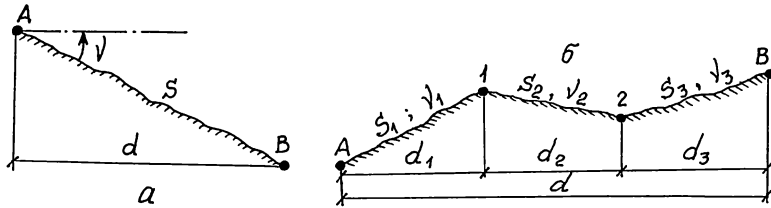


Рис. 7.20. Определение горизонтального проложения линии местности: для однородных линий (а), для неоднородных линий (б)

При измерениях углов наклона отрезков неоднородной линии теодолит последовательно переставляют по створу линии в точки перегибов рельефа. В месте стояния, например, в точке  $A$ , измеряют высоту прибора, откладывают ее на вехе, установленной в точке  $I$ , и измеряют угол наклона по шкале вертикального круга (обычно – при круге лево). Поскольку значение места нуля обычно близко к нулю, то отсчет по вертикальному кругу и принимают равным углу наклона данного отрезка.

При небольших углах наклона их можно измерять с помощью *эклиметра*, представляющего собой вертикальный круг с грузом и визирным приспособлением. Груз при измерениях удерживает нулевой отсчет вертикального круга в положении, соответствующей положению горизонта.

В общую измеренную длину, либо в отрезки неоднородной линии, вводят поправки за компарирование, температуру и натяжение ленты (при необходимости), а затем вычисляют горизонтальное проложение. Если каждая из поправок не превышает значение  $\left(\frac{1}{3N}\right)_{\text{доп}}$ , то ее не учитывают при вычислениях, считая ее влиянием ничтожным.

При использовании светодальномеров и электронных тахеометров для измерения длин линий в теодолитных ходах прибор автоматически выполняет приведение к горизонту измеренных наклонных отрезков, т.е. автоматически определяет горизонтальное проложение независимо от сложности линии. При этом сложную линию на однородные отрезки не разбивают. В большей части редукция наклонных линий к горизонту выполняется и при использовании оптических дальномеров.

#### 74.6. Измерение горизонтальных углов и углов наклона

Принцип измерения горизонтальных углов и углов наклона и способы измерений приведены в § 40 и § 45. Ниже приведены правила измерения указанных углов в зависимости от условий измерений.

Здесь обратим внимание на следующее.

Углы наклона для приведения наклонных расстояний к горизонту измеряют отдельно, выполняя наведение на отмеченную на вехе высоту прибора. Т.е. в этом случае измеряют угол наклона местности в данном направлении, как это показано на рис. 7.21 для точки  $B$ . Во многих случаях в противоположных от станции точках теодолитного хода устанавливают не веху, а тонкую шпильку, выполняя наведение на ее основание, либо на ее верх, как это показано на рис. 7.21 для точки  $C$ . В этом случае фиксируют либо значение  $V = 0$ , либо значение  $V_C$ . Полученные в таких случаях углы наклона используют для определения превышений точек теодолитных ходов, т.е. для построения высотного съемочного обоснования.

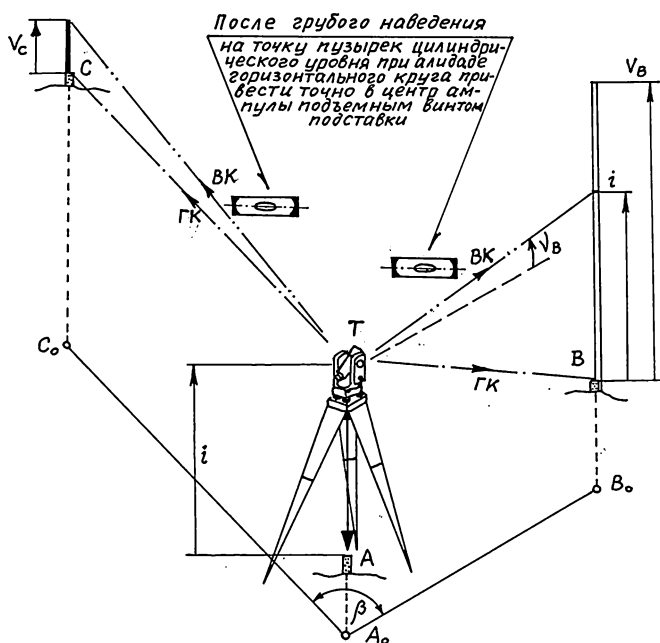


Рис. 7.21. Измерение горизонтальных углов и углов наклона

Рассмотрим порядок работ на станции  $A$  (рис. 7.21) при одновременном измерении горизонтальных углов (способом приемов) и углов наклона.

1. Установить теодолит в рабочее положение (§ 44).
2. Установить положение *круг лево* (КЛ), выполнить грубо наведение на основание вехи в точке  $B$  и закрепить алидаду и зрительную трубу. Одним из подъемных винтов подставки привести пузырек цилиндрического уровня алидады горизонтального круга на середину.

3. Выполнить точное наведение с помощью наводящих винтов колонки и зрительной трубы вертикальной нитью на основание вехи и взять отсчет  $ГК(КЛ)_В$  по шкале горизонтального круга.

4. Открепить зрительную трубу и грубо навести горизонтальную нить на метку, соответствующую значению высоты прибора  $i$ .

5. Закрепить зрительную трубу, выполнить точное наведение горизонтальной нити на метку высоты прибора и взять отсчет  $ВК(КЛ)_В$  по шкале вертикального круга.

6. Ослабить зажимные винты колонки и зрительной трубы, выполнить грубое наведение вертикальной нитью на шпильку, установленную в точке  $C$  и зафиксировать колонку и зрительную трубу зажимными винтами. Одним из подъемных винтов подставки привести пузырек цилиндрического уровня при алидаде горизонтального круга на середину.

7. Выполнить точное наведение вертикальной нити на шпильку с помощью наводящих винтов колонки и зрительной трубы и взять отсчет  $ГК(КЛ)_С$  по шкале горизонтального круга.

8. Наводящим винтом зрительной трубы выполнить точное наведение горизонтальной нити на основание шпильки ( $V = 0$ ), или на ее верх ( $V_C$ ) и взять отсчет  $ВК(КЛ)_С$  по шкале вертикального круга.

9. Ослабить зажимные винты колонки и зрительной трубы и установить положение *круг право* (КП). Для этого зрительную трубу надо перевести через зенит, а колонку повернуть на  $180^\circ$ .

Далее необходимо выполнить пп. 2-8 при положении *круг право* КП. В результате получатся отсчеты:  $ГК(КП)_В$ ,  $ВК(КП)_В$ ,  $ГК(КП)_С$  и  $ВК(КП)_С$ .



Рис. 7.22. Установка вех и шпилек при измерении горизонтальных углов

Порядок обработки результатов измерений представлен в табл. 5.2 (§ 44).

Очевидно, что на точность измерения горизонтальных углов влияет погрешность центрирования теодолита в вершине измеряемого угла, а также погрешность установки в створе вехи или шпильки в наблюдаемой точке. Если веха или шпилька не могут быть установлены в грунт, то до окончания наблюдений их держит рабочий. Если грунт мягкий, то веху или шпильку устанавливают в створе наблюдаемого направления впереди или сзади точки (рис. 7.22).

При переходах с точки на точку веху или шпильку переставляют в наблюдаемых точках по соответствующему створу.

При измерениях электронными тахеометрами веху на точке устанавливает по уровню речник и держит ее в вертикальном положении до окончания измерений. Отражатель может быть также установлен на штатив; при этом

выполняют его горизонтирование по установочному уровню и центрирование над наблюдаемой точкой.

### § 75. Вычисления в разомкнутом теодолитном ходе

Конечной целью построения съемочного обоснования (теодолитного или полигонометрического хода) является получение координат его вершин: плановых  $x$ ,  $y$  и высот  $H$ .

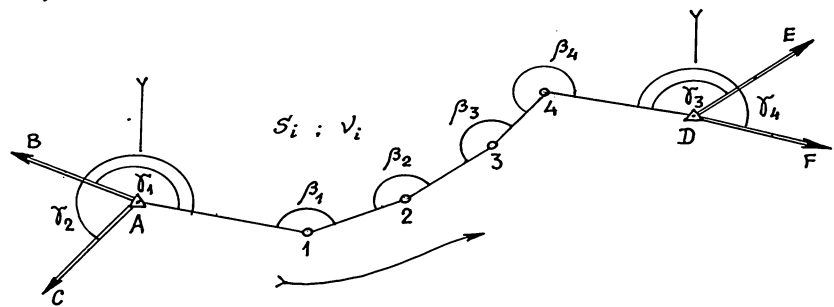


Рис.7.23. Разомкнутый теодолитный ход

Таблица 7.3

Значения координат исходных пунктов						
Точки	A	B	C	D	E	F
X, м	5635,219	6235,814	4045,271	5578,703	7069,965	4189,684
Y, м	6081,327	4667,100	4777,253	6701,622	9593,387	8811,521
H, м	142,754	-	-	168,440	-	-

Таблица 7.4

Значения примычных $\gamma$ и горизонтальных $\beta$ углов			
Обозначение	Значение примычного угла	Обозначение	Значение горизонтального угла
$\gamma_1$	182°35,2'	$\beta_1$	150°31,0'
$\gamma_2$	256°15,3'	$\beta_2$	163°07,5'
$\gamma_3$	124°39,1'	$\beta_3$	167°29,0'
$\gamma_4$	185°16,7'	$\beta_4$	241°21,5'

Таблица 7.5

Значения углов наклона и наклонных расстояний					
Параметр	A-1	1-2	2-3	3-4	4-D
S, м	189,65	113,96	121,58	93,46	164,04
V	+4°36,5'	+2°27,0'	-0°43,7'	-2°11,3'	+4°08,0'

В этом параграфе будет рассмотрен пример обработки разомкнутого теодолитного хода (рис. 7.23) с необходимыми пояснениями и указаниями. Обработка любого теодолитного хода производится несколькими этапами, каждый из которых выполняется с контролем искомых данных, либо каких-либо промежуточных результатов. В связи с этим целесообразно поэтапно теоретическую часть этого раздела совместить с практическим примером.

Все результаты обработки теодолитных ходов заносятся в ведомости установленной формы (*ведомость вычисления координат* – табл. 7.7; *ведомость вычисления высот* – табл. 7.8).

В теодолитном ходе измерены горизонтальные углы  $\beta$  и  $\gamma$  (примычные) в вершинах хода, углы наклона  $V$  линий и наклонные расстояния  $S$ . Значения координат исходных пунктов приведены в табл. 7.3, результаты полевых измерений представлены в табл. 7.4 и 7.5.

На приведенном рисунке показана классическая схема привязки разомкнутого теодолитного хода, когда на его конечных точках выполнена т.н. *азимутальная привязка* на два исходных направления.

Далее каждый из этапов обработки теодолитного хода рассмотрим раздельно.

### 75.1. Предварительные вычисления

Предварительные вычисления заключаются в азимутальной привязке начальной и конечной линий теодолитного хода к исходным направлениям, образованным пунктами Государственной геодезической сети, т.е. в определении дирекционных углов  $\alpha_{A1}$  и  $\alpha_{4D}$ . Для этого из решения *обратной геодезической задачи*, используя значения координат исходных пунктов (табл. 7.3), находят дирекционные углы (прямые и обратные) исходных направлений (табл. 7.6) и вычисляют дважды значения искомых дирекционных углов через примычные углы (табл. 7.6).

Таблица 7.6

$\alpha_{AB} = 293^{\circ}00,6'$	$\alpha_{AC} = 219^{\circ}21,5'$	$\alpha_{DE} = 62^{\circ}43,2'$	$\alpha_{DF} = 123^{\circ}21,5'$	
$\alpha_{BA} = 113^{\circ}00,6'$	$\alpha_{CA} = 39^{\circ}21,5'$	$\alpha_{ED} = 242^{\circ}43,2'$	$\alpha_{FD} = 303^{\circ}21,5'$	
$d_{A1} = 189,04$	$d_{12} = 113,86$	$d_{23} = 121,57$	$d_{34} = 93,39$	$d_{4D} = 163,61$

$$\alpha_{A1}' = \alpha_{AB} + \gamma_1 = 293^{\circ}00,6' + 182^{\circ}35,2' = 115^{\circ}35,8'$$

$$\alpha_{A1}'' = \alpha_{AC} + \gamma_2 = 219^{\circ}21,5' + 256^{\circ}15,3' = 115^{\circ}36,8'$$

Допускается разность в полученных дирекционных углах до  $1,0'$  (в примере разность допустима). Если это условие выполняется, то вычисляют среднее значение дирекционного угла:

$$\alpha_{A1} = 0,5(\alpha_{A1}' + \alpha_{A1}'') = 115^{\circ}36,3'.$$

Аналогичные вычисления производятся и для дирекционного угла  $\alpha_{4D}$ :

$$\alpha_{4D}' = \alpha_{DE} - \gamma_3 \pm 180^{\circ} = 62^{\circ}43,2' - 124^{\circ}39,1' + 180^{\circ} = 118^{\circ}04,1'$$

$$\alpha_{4D}'' = \alpha_{DF} - \gamma_4 \pm 180^{\circ} = 123^{\circ}21,5' - 185^{\circ}16,7' = 118^{\circ}04,8'$$

Разность дирекционных углов допустима.

$$\alpha_{4D} = 0,5(\alpha_{4D}' + \alpha_{4D}'') = 118^{\circ}04,4'.$$

Наклонные расстояния  $S$  приводят к горизонту (определяют горизонтальные проложения) по формуле (7.62)

$$d = S \cos v$$

Результаты вычислений для приводимого примера записаны в табл. 7.6.

## 75.2. Обработка результатов угловых измерений

Составим схему последовательной передачи дирекционных углов с начальной  $\alpha_H$  ( $\alpha_{A1}$ ) на конечную  $\alpha_K$  ( $\alpha_{AD}$ ) линии теодолитного хода, содержащего в общем случае  $n$  вершин ( $n$  горизонтальных углов  $\beta$ ):

[illegible]

В формулах (7.64)  $+\beta$  – для левых по ходу углов,  $-\beta$  – для правых по ходу углов.

После сложения уравнений (7.64) получим:

- для левых по ходу углов:

$$\alpha_K = \alpha_H \pm n180^0 + \sum \beta ; \quad (7.65)$$

- для правых по ходу углов:

$$\alpha_K = \alpha_H \pm n180^0 - \sum \beta. \quad (7.66)$$

Поскольку  $\alpha_H$  и  $\alpha_K$  являются исходными (известными) дирекционными углами, то из формул (7.65) и (7.66) можно получить угловую погрешность (*угловую невязку*  $f_\beta$ ), которая будет характеризовать качество выполнения угловых измерений:

- для левых по ходу углов:

$$f_{\beta} = \sum \beta - (\alpha_K - \alpha_H) \pm n180^0 \pm R \times 360^0; \quad (7.67)$$

- для правых по ходу углов:

$$f_{\beta} = \sum \beta - (\alpha_H - \alpha_K) \pm n180^0 \pm R \times 360^0. \quad (7.68)$$

В формулы (7.67) и (7.68) введено слагаемое  $R \times 360^0$  ( $R = 1, 2, 3, \dots$ ), необходимое для сокращения в невязках полных кругов, которые могут возникнуть в процессе суммирования углов.

Для технических теодолитных ходов установлена допустимая величина угловой невязки

$$f_{\beta \text{ доп}} = \pm 1' \sqrt{n}, \quad (7.69)$$

где  $n$  – число измеренных углов, использованных при вычислении невязки по формулам (7.67) или (7.68).

### Выполнение условия

$$f_{\beta} \leq f_{\beta_{\text{ДОП}}} \quad (7.70)$$

говорит о качественных угловых измерениях. В противном случае необходимо проверить полевые журналы, либо повторить полевые измерения углов.

При выполнении условия (7.70) производят уравнивание углов введением в них поправок  $\nu_{\beta}$  поровну в каждый угол, считая измерения равноточными, со знаком, обратным знаку невязки:

$$v_{\beta i} = -\frac{f_{\beta}}{n}. \quad (7.71)$$

Здесь следует обеспечить равенство

$$\sum v_{\beta i} = -f_{\beta}, \quad (7.72)$$

которое может не получиться из-за округления поправок. Поправки необходимо округлять до 0,1', и, если равенство (7.72) не соблюдается, то в один из углов вводят дополнительную поправку: для углов, образованных короткими сторонами, поправку увеличивают, а для углов, образованных более длинными сторонами – поправку уменьшают.

После распределения поправок выполняют исправление измеренных углов

$$\beta_{\text{ИСПР}} = \beta_{\text{ИЗМ}} + v_{\beta i} \quad (7.73)$$

Уравнивание углов контролируют выполнением следующих равенств:

- для левых по ходу углов:

$$\sum \beta_{\text{ИСПР}} = (\alpha_K - \alpha_H) \pm n180^\circ \pm R \times 360^\circ; \quad (7.74)$$

- для правых по ходу углов:

$$\sum \beta_{\text{ИСПР}} = (\alpha_H - \alpha_K) \pm n180^\circ \pm R \times 360^\circ. \quad (7.75)$$

Дирекционные углы сторон теодолитного хода вычисляют последовательно по формулам (7.64), используя в них исправленные значения горизонтальных углов (7.73). Контрольным вычислением является вычисленное значение  $\alpha_K$ , которое точно должно совпадать с его исходным значением, т.е.

$$\alpha_{\text{КВЫЧ}} = \alpha_{\text{КИСХ}}. \quad (7.76)$$

**Пример 7.13.** Обработка результатов угловых измерений.

Исходные данные по схеме рис. 7.21, табл. 7.3 – 7.5.

В ведомость координат (табл. 7.7) занести значения измеренных углов и горизонтальных проложений. Выписать значение  $\alpha_H = \alpha_{A1} = 115^\circ 36,3'$ . Записать значения координат исходной точки А ( $X_A = 5635,219 = 5635,22$  м;  $Y_A = 6081,327 = 6081,33$  м).

По схеме рис. 7.21 видно, что измерены левые по ходу горизонтальные углы.  $\sum \beta = 722^\circ 29,0'$ ;  $(\alpha_K - \alpha_H) = (\alpha_{4D} - \alpha_{A1}) = 2^\circ 28,1'$ .

$$f_\beta = 722^\circ 29,0' - 2^\circ 28,1' - 4 \times 180^\circ = +0,9'; \quad f_{\beta_{\text{ДОП}}} = \pm 1' \sqrt{4} = \pm 2,0'. \quad \text{Невязка}$$

допустима.

Поправки в углы  $v_{\beta i} = -\frac{+0,9'}{4} = -0,2'(-0,3')$ . Во все углы вводим поправки по -0,2'

и дополнительно в угол  $\beta_3$  -0,1', образованный короткими сторонами (условие (7.72) обеспечивается). Поправки в углы записывают в ведомость над измеренными углами значения Сумма исправленных углов  $\sum \beta_{\text{ИСПР}} = 722^\circ 28,1'$ , что удовлетворяет условию (7.74).

Далее вычисляют дирекционные углы сторон теодолитного хода последовательно по ходу по формулам (7.64) с учетом исправленных горизонтальных углов:

$$\alpha_{12} = \alpha_{A1} \pm 180^\circ + \beta_{1\text{ИСПР}} = 115^\circ 36,3' - 180^\circ + 150^\circ 30,8' = 86^\circ 07,1',$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{12} \pm 180^\circ + \beta_{2\text{ИСПР}} = 86^\circ 07,1' - 180^\circ + 163^\circ 07,3' = 69^\circ 14,4'$$

Вычисления продолжают до получения дирекционного угла конечной стороны хода  $\alpha_K = \alpha_{4D} = \alpha_{34} \pm 180^\circ + \beta_{4\text{ИСПР}} = 56^\circ 43,1' - 180^\circ + 241^\circ 21,3' = 118^\circ 04,4'$ , что показывает, что условие (7.76) выполнено.

Ведомость координат разомкнутого теодолитного хода

№	Горизон-	Дирекцион-	Горизон-	Приращения		Координаты, м	
№ точек	тальные углы $\beta$ (поправки)	ные углы $\alpha$	тальные проложе- ния, м $d$	координат, м (поправки)			
				$\Delta X$	$\Delta Y$		
$A$						<b>5635,22</b>	<b>6081,33</b>
$I$	(-0,2') <b>150°31,0'</b>	115°36,3'	189,04	(+0,04) -81,70	(+0,03) +170,48	5553,56	6251,84
		86°07,1'	113,86	(+0,02) +7,71	(+0,02) +113,60		
2	(-0,2') <b>163°07,5'</b>	69°14,4'	121,57	(+0,02) +43,09	(+0,02) +113,68	5561,29	6365,46
3	(-0,3') <b>167°29,0'</b>	56°43,1'	93,39	(+0,02) +51,25	(+0,01) +78,07	5604,40	6479,16
4	(-0,2') <b>241°21,5'</b>	118°04,4'	163,61	(+0,02) -77,00	(+0,02) +144,36	5655,67	6557,24
$D$						5578,70 <b>(5578,703)</b>	6701,62 <b>(6701,622)</b>
	$\sum \beta_{изм}$ 722°29,0'		$\sum d$ 681,47 м	$f_x$ -0,13 м	$f_y$ -0,10 м		
	$\sum \beta_{теор}$ 2°28,1'			$f_{ABC} =$ 0,17 м	$f_{OTH} =$ $\frac{1}{4000}$		
				$f_{OTH доп}$	$\frac{1}{2000}$		
$f_\beta$	+0,9'						
$f_{\beta доп}$	± 2,0'						

### 75.3. Вычисление приращений координат и оценка точности хода

Приращения координат (*прямая геодезическая задача*) вычисляют по формулам (7.3):

$$\Delta X = d \cos \alpha ; \quad \Delta Y = d \sin \alpha .$$

Запишем схему передачи координат с начальной точки хода на конечную в виде системы уравнений и составим суммы этих уравнений:

$$\begin{array}{ll}
 X_1 = X_H + \Delta X_1 & Y_1 = Y_H + \Delta Y_1 \\
 X_2 = X_1 + \Delta X_2 & Y_2 = Y_1 + \Delta Y_2 \\
 \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
 X_K = X_{n-1} + \Delta X_K & Y_K = Y_{n-1} + \Delta Y_K \\
 \text{-----} & \text{-----} \\
 X_K = X_H + \sum \Delta X & Y_K = Y_H + \sum \Delta Y
 \end{array} \quad (7.77)$$

Поскольку значения  $X_H$ ,  $X_K$ ,  $Y_H$ ,  $Y_K$  являются исходными (известными), то по результатам вычислений можно получить невязки в приращениях координат:

$$f_x = \sum \Delta X - (X_K - X_H); \quad f_y = \sum \Delta Y - (Y_K - Y_H). \quad (7.78)$$

Физический смысл невязок в приращениях координат пояснен на рис. 7.24. При построении теодолитного хода реальное его положение определяется точками *A*, *I*, *2*, ..., *B*, жестко закрепленными на местности и имеющими абсолютно точные, но неизвестные нам координаты. В результате неизбеж-



ных погрешностей в измерениях (углов и расстояний) и возможных погрешностей при вычислениях получается реальный ход  $A-1'-2'-\dots-B'$ , т.е. ход, не замыкающийся в конечной исходной точке  $B$ . Величина незамыкания хода (невязка) по оси  $X-f_x$ , по оси  $Y-f_y$ .

Эти невязки могут быть получены и как разности координат:

$$f_x = X_B' - X_B ; f_y = Y_B' - Y_B . \quad (7.79)$$

Общая линейная (абсолютная) невязка хода составляет

$$f_{ABC} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} . \quad (7.80)$$

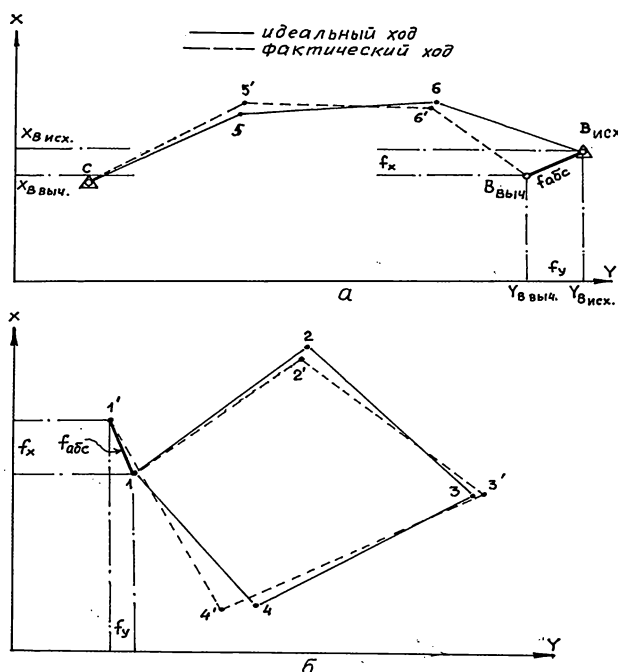


Рис. 7.24. Физический смысл невязок в приращениях координат

Очевидно, что сама абсолютная (линейная) невязка не всегда может являться непосредственным критерием качества измерений, поскольку длины ходов могут быть различными при одном и том же значении абсолютной невязки. В связи с этим для оценки точности теодолитных ходов пользуются *относительной невязкой*, определяемой по формуле

$$f_{отн} = \frac{1}{\left( \sum \frac{d}{f_{ABC}} \right)^{\frac{1}{2}}} , \quad (7.81)$$

где  $\sum d$  - длина теодолитного хода (периметр - для замкнутого хода; сумма горизонтальных проложений).

Критерием качества работ является выполнение условия

$$f_{отн} \leq f_{отн \text{ доп}} . \quad (7.82)$$

Величина допустимой относительной невязки  $f_{отн \text{ доп}}$  определяется со-ответствующими инструкциями, а также техническим заданием, устанавли-вающими необходимую точность построения съемочного обоснования. Так, для технических теодолитных ходов, в зависимости от условий измерений, особенно длин линий, величина относительной допустимой невязки (погреш-ности) может находиться в пределах от 1:1000 до 1:3000.

**Пример 7.14.** Оценка качества теодолитного хода.

Исходные данные см. в табл. 7.7 (ведомость координат).

В ведомости координат выполнены вычисления приращений координат и получены их суммы по всему ходу:  $\sum \Delta X = -56,65 \text{ м}$ ;  $\sum \Delta Y = +620,19 \text{ м}$ . Теоретические разности координат:  $(X_K - X_H) = (X_D - X_A) = -56,516 \text{ м}$ ;  $(Y_K - Y_H) = (Y_D - Y_A) = +620,295 \text{ м}$ . Невязки:

$$f_X = -56,65 - (-56,516) = -0,134 \text{ м}; f_Y = +620,19 - (+620,295) = -0,105 \text{ м};$$

$$f_{ABC} = 0,1702 \text{ м};$$

$f_{отн} = 1/(681,47/0,1702) = 1/4000$ . (Значение знаменателя относительной невязки можно округлять до пятидесяти). Если заданная допустимая относительная невязка равна, например, 1:2000, то необходимое качество построения съёмочного обоснования обеспечено.

#### 75.4. Рекомендации к поиску вероятных погрешностей в измерениях и вычислениях при обработке ведомости координат

Конечная оценка точности теодолитного хода производится на основе всех (линейных и угловых) измерений, выполненных при создании съёмочного обоснования. Кроме того, оценке точности теодолитного хода предшествует и большой объем вычислений, что, даже несмотря на ряд контрольных вычислений, повышает вероятность появления погрешностей, в результате чего условие (7.62) может не выполняться.

Чаще всего отступление от неравенства (7.62) сравнительно небольшое, что как раз и затрудняет поиск погрешностей. Грубые погрешности (просчеты) находятся сравнительно быстро и легко. В некоторых случаях, если небольшие погрешности допущены при измерениях в двух или нескольких линиях (в углах или расстояниях), то отыскание их только в камеральных условиях чаще всего не представляется возможным. Необходимы повторные измерения, которые обычно начинают с самых сложных участков.

Если же погрешности были допущены только в одной линии (в ее длине или ее направлении), то поиск их может быть сравнительно легко осуществлен по величинам и знакам невязок  $f_X$  и  $f_Y$  в приращениях координат. Для этого предварительно определяют дирекционный угол линейной невязки  $f_{ABC}$ , по той же схеме, как это производится при решении *обратной геодезической задачи* при определении дирекционных углов исходных направлений

$$r_f = \arctg\left(\frac{f_Y}{f_X}\right) \Rightarrow \alpha_f. \quad (7.83)$$

Затем следует образовать группы дирекционных углов:

А) -- совпадающих с направлением невязки  $(\alpha_f \pm 180^\circ)$ ;

Б) -- перпендикулярных к направлению невязки  $[(\alpha_f + 90^\circ) \pm 180^\circ]$ .

Если погрешность допущена в длине линии, то наиболее вероятно, что она присутствует в тех линиях, для которых их направление (дирекционный угол) совпадает с направлением невязки (сравнение производится по группе А). Так, например, наиболее вероятна погрешность в длине линии С-5 для разомкнутого теодолитного хода (рис. 7.24 а), либо для линий 4-1 и 2-3 для замкнутого теодолитного хода (рис. 7.24 б).

Если погрешность допущена в направлении линии, то наибольшая вероятность этого для тех линий, дирекционные углы которых отличаются от направления невязки на  $90^\circ$ . (Сравнение производится по группе В). Таким образом, для разомкнутого теодолитного хода, изображенного на рис. 7.24 а, наиболее вероятно погрешность в направлении линии 6-В. Для замкнутого теодолитного хода более вероятно погрешность в направлении линий 1-2 и 3-4.

В том случае, если указанный алгоритм поиска погрешностей не даст результатов, то следует ожидать, что погрешности присутствуют в двух или более линиях. Это требует повторения полевых измерений, перед которыми необходимо еще раз внимательно выверить полевые журналы предшествующих работ, а также повторно проверить все вычисления. Повторные полевые измерения целесообразно начинать с проверки длин линий и их горизонтальных проложений (при этом в первую очередь проверяют наиболее сложные для измерений участки). Проверку горизонтальных углов также начинают с вершин, наблюдения с которых по каким-либо причинам выполнялись с большими помехами: видимость соседних пунктов была недостаточной, производилась перестановка вех и т.п. Особое внимание здесь следует уделять центрированию теодолита и устанковке вехи в наблюдаемых точках.

**Пример 7.15.** Поиск вероятных погрешностей в теодолитных ходах.

Исходные данные см. в табл. 7.7 (ведомость координат).

Рассмотрим результаты обработки данных, приведенные в табл. 7.7. (На самом деле невязки в ходах допустимы, в связи с чем нет необходимости в поиске погрешностей).

*Данный пример приводится исключительно в учебных целях только для пояснения схемы поиска погрешностей измерений в теодолитных ходах.*

$$r_f = \arctg \left| \left( -0,105 / -0,134 \right) \right| \approx 38^\circ \Rightarrow (\text{III четверть}) \Rightarrow \alpha_f \approx 218^\circ.$$

Для погрешностей в длине линий

$$\alpha_f = 38^\circ \text{ и } \alpha_f = 218^\circ$$

Для погрешностей в направлениях линий

$$\alpha_f = 128^\circ \text{ и } \alpha_f = 308^\circ$$

В соответствии со значениями дирекционных углов линий теодолитного хода наиболее близким является  $\alpha_{4D} \approx 118^\circ$  и  $\alpha_{34} \approx 57^\circ$ . Таким образом, можно предположить, что существует погрешность в определении направления линии 4-D (эта погрешность может быть и грубой. Неправильно, например, выписано значение дирекционного угла в ведомость координат, а также возможна погрешность в измерении длины линии 3-4).

При определенном навыке оценки величин дирекционных углов выполняются устно, без вычислений, по значениям невязок и их знакам.

## 75.5. Уравнивание приращений координат и вычисление координат точек хода

В приращения координат, при обеспечении условия (7.82), вводят весовые поправки  $\nu_x$  и  $\nu_y$ , зависящие от величины горизонтального проложения, по которому было вычислено данное приращение. Знаки поправок должны быть обратными знаку невязки:

$$v_{x_i} = -\frac{f_x}{\sum d} d_i ; v_{y_i} = -\frac{f_y}{\sum d} d_i . \quad (7.84)$$

Величины поправок в технических теодолитных ходах округляют до 0,01 м.

Суммы полученных поправок должны полностью компенсировать невязку:

$$\sum v_{x_i} = -f_x ; \sum v_{y_i} = -f_y . \quad (7.85)$$

Из-за округлений значений поправок условие (7.85) может не выполняться, в связи с чем в приращения, полученные по *большим* горизонтальным проложениям следует добавить 0,01 м, а приращения, полученные по *меньшим* горизонтальным проложениям, уменьшить на такую же величину до достижения условия (7.85).

Контроль исправленных приращений координат

$$\Delta X_{икспр} = \Delta X_{ивьм} + v_{x_i} ; \Delta Y_{икспр} = \Delta Y_{ивьм} + v_{y_i} \quad (7.86)$$

заключается в проверке условий

$$\sum \Delta X_{икспр} = (X_K - X_H) ; \sum \Delta Y_{икспр} = (Y_K - Y_H) . \quad (7.87)$$

Координаты точек теодолитного хода вычисляют последовательно по формулам (7.78) подстановкой в них исправленных значений приращений координат. Вычисление координат конечной точки хода

$$X_{квьм} = X_{n-1} + \Delta X_{икспр} ; Y_{квьм} = Y_{n-1} + \Delta Y_{икспр} \quad (7.88)$$

является контрольным. Полученные вычисленные значения координат конечной точки хода должны точно совпадать (в пределах округлений) с их исходными значениями:

$$X_{квьм} = X_{квх} ; Y_{квьм} = Y_{квх} . \quad (7.89)$$

Проследите указанный алгоритм обработки теодолитного хода по ведомости координат (табл. 7.7).

Обратите внимание на то, что исходные значения координат начальной и конечной точек теодолитного хода в ведомости координат округлены до 0,01 м, как и величины горизонтальных проложений и приращений координат.

## 75.6. Обработка ведомости высот

Высоты точек теодолитного хода чаще всего определяют способом геометрического нивелирования (гл. 9). Однако в ряде случаев используют метод *тригонометрического нивелирования*, в котором превышения точек по принятому направлению хода определяют по формуле (рис. 7.25)

$$h_{j+1} = d_{j(j+1)} \operatorname{tg} v_{j(j+1)} + i - V , \quad (7.90)$$

где  $j$  – номер точки;  $V$  – угол наклона;  $i$  – высота прибора (расстояние на станции от центра зрительной трубы до верха закрепленной точки);  $V$  – высота наведения на точку теодолитного хода, следующую по принятому направлению.

Если на вехе, установленной в точке  $(j+1)$ , отложить отрезок  $i$  (высоту прибо-

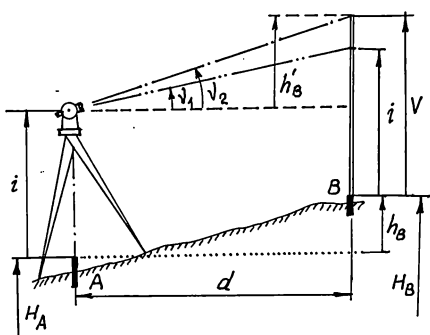


Рис. 7.25. Определение превышений методом тригонометрического нивелирования.

ра) от ее верха, то формула для вычисления превышения упрощается:

$$h_{j+1} = d_{j(j+1)} \operatorname{tg} v_{j(j+1)}. \quad (7.91)$$

Так, для обозначений, приведенных на рисунке, можно записать с учетом условий (7.90) и (7.91):

$$h_B = d \operatorname{tg} v_1 + i - V = h'_B + i - V \quad \text{или} \quad h_B = d \operatorname{tg} v_1$$

Составим уравнения последовательной передачи высот с начальной точки теодолитного хода на конечную точку и получим сумму этих уравнений:

$$\begin{aligned} H_1 &= H_H + h_1 \\ H_2 &= H_1 + h_2 \\ &\dots \dots \dots \\ H_K &= H_{n-1} + h_K \\ &\text{---} \text{---} \text{---} \\ H_K &= H_H + \sum h \end{aligned} \quad (7.92)$$

По аналогии с вычислениями координат найдем невязку хода в превышениях

$$f_h = \sum h - (H_K - H_H). \quad (7.93)$$

Инструкцией для технических теодолитных ходов при создании высотного обоснования для топографической съемки установлено, что допустимая невязка в превышениях должна быть равна

$$f_{h\text{доп}} = \pm \frac{0,04 \sum d}{100 \sqrt{n}}, \text{ м}, \quad (7.94)$$

где  $n$  – число превышений; 0,04 м коэффициент (0,04 м на 100 м расстояния);  $\sum d$  – длина теодолитного хода (или периметр – для замкнутого хода).

Выполненные работы считаются качественными, если

$$f_h \leq f_{h\text{доп}}. \quad (7.95)$$

В противном случае следует проверить полевые журналы, выверить произведенные вычисления, либо повторить полевые работы.

При выполнении условия (7.95) определяют поправки в превышения по весовой формуле

$$v_{hi} = - \frac{f_h}{\sum d} d_i, \quad (7.96)$$

как и при вычислении поправок в приращения координат.

Поправки округляют до 0,01 м, контролируют их сумму ( $\sum v_{hi} = -f_h$ ) и вводят с учетом знаков превышений и поправок в значения превышений:

$$h_{\text{испр}} = h_{\text{изм}} + v_{hi}. \quad (7.97)$$

Контроль исправления превышений заключается в соблюдении равенства

$$\sum h_{\text{испр}} = (H_K - H_H). \quad (7.98)$$

После этого, по формулам (7.92), с учетом исправленных значений превышений, вычисляют высоты точек теодолитного хода с определением контрольного значения высоты конечной точки хода

$$H_{\text{квн}} = H_{\text{кисх}} . \quad (7.99)$$

Пример обработки ведомости высот приведен в табл. 7.8 для схемы рис. 7.23.

**Пример 7.16.** Обработка ведомости высот разомкнутого теодолитного хода.

В схеме теодолитного хода наведение на вежу, установленную в последующей точке, выполнено на высоту прибора, в связи с чем вычисление превышений производилось по формуле (7.91).

Поправки в превышения записаны в ведомости над значениями вычисленных превышений.

Жирным шрифтом выделены исходные данные.

Таблица 7.8

**Ведомость высот разомкнутого теодолитного хода**

№№ точек	Горизонтальные проложения, м	Углы наклона	Превышения		Высоты точек, м	№№ точек
			вычисленные	исправленные		
A					<b>142,75</b>	A
	<b>189,04</b>	<b>+4°36,5'</b>	(-0,02)	+15,22		
1			+15,24		157,97	1
	<b>113,86</b>	<b>+2°27,0'</b>	(-0,02)	+4,85		
2			+4,87		162,82	2
	<b>121,57</b>	<b>-0°43,7'</b>	(-0,02)	-2,60		
3			-2,58		160,22	3
	<b>93,39</b>	<b>-2°11,3'</b>	(-0,01)	-3,58		
4			-3,57		156,64	4
	<b>163,61</b>	<b>+4°08,0'</b>	(-0,02)	+11,80		
D			+11,82		168,44	D
	$\sum d = 681,47$		$\sum h_{\text{вн}} = +25,78$			
	м		м			
			$\sum h_{\text{теор}} = +25,69$			
			м			
			$f_h = +0,09$ м	$f_{\text{ндоп}} = \pm 0,12$ м		

## § 76. Вычисления в замкнутом теодолитном ходе

Замкнутый теодолитный ход во многом является частным случаем разомкнутого теодолитного хода, полагая в последнем  $X_H = X_K$ ,  $Y_H = Y_K$ ,  $H_H = H_K$ . Одной из особенностей замкнутого хода является возможность контроля результатов полевых измерений, а также оценки точности без привлечения процедуры привязки к исходным геодезическим пунктам геодезической основы (геодезической опорной сети). В соответствии с этим несколько изменим порядок обработки указанного вида теодолитных ходов.

Пояснения по обработке замкнутого теодолитного хода рассмотрим совместно с примером, соответствующим схеме замкнутого хода, приведенной на рис. 7.26.

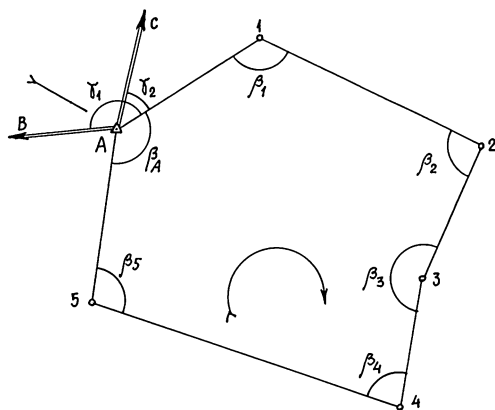


Рис. 7.26. Замкнутый теодолитный ход

*Исходные данные.* Запроектирован замкнутый теодолитный ход повышенной точности (допустимая относительная погрешность 1:7500). Горизонтальные углы измерены теодолитом Т5. Длины линий измерены светодальномером с относительной погрешностью 1:10000. Углы наклона измерены теодолитом Т5 с округлением результатов до 0,1'. Допустимая угловая невязка в полигоне не более  $\pm 10''\sqrt{n}$ . Координаты исходных пунктов Государственной геодезической сети представлены в таблице 7.9. Результаты измерений

представлены в табл. 7.10 и 7.11.

Таблица 7.9

Точки	A	B	C
X, м	4216,563	6692,552	5594,790
Y, м	7018,427	5172,041	11036,256
H, м	111,65	-	-

Таблица 7.10

Обозначение	Значение угла	Обозначение	Значение угла
$\gamma_1$	154°25'00,0"	$\beta_2$	90°40'30"
$\gamma_2$	46°38'15,6"	$\beta_3$	191°46'25"
$\beta_A$	127°14'05"	$\beta_4$	85°10'00"
$\beta_1$	124°13'05"	$\beta_5$	100°54'10"

Таблица 7.11

Параметр	A-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-A
Наклонные расстояния S, м	77,396	109,891	64,282	56,143	142,789	77,906
Углы наклона, $\nu$	-2°00,5'	+1°16,3'	+4°25,6'	-3°38,8'	+0°46,5'	-2°12,4'

Из решения обратных геодезических задач по дирекционным углам исходных направлений и значениям примычных углов вычислен дирекционный угол линии теодолитного хода A-1:  $\alpha_{A1} = 117°42'15,2''$ . Аналогичные вычисления дирекционных углов линий теодолитного хода при его азимутальной привязке были выполнены при обработке разомкнутого теодолитного хода (§ 75). В данном случае необходимо определить только значение дирекционного угла одной линии теодолитного хода.

Пример обработки ведомости координат замкнутого теодолитного хода приведен в табл. 7.12.

## 76.1. Оценка точности угловых измерений и вычисление дирекционных углов

В замкнутом теодолитном ходе (полигоне) могут быть измерены внутренние, либо внешние горизонтальные углы  $\beta$  (рис. 7.26). Если принять направление обхода по часовой стрелке, то все внутренние горизонтальные углы, показанные на схеме, будут правыми по ходу.

Теоретическая сумма горизонтальных углов замкнутого многоугольника равна:

- для внутренних углов:

$$\sum \beta_{\text{ТЕОР}} = 180^{\circ}(n - 2); \quad (7.100)$$

- для внешних углов:

$$\sum \beta_{\text{ТЕОР}} = 180^{\circ}(n + 2), \quad (7.101)$$

где  $n$  – число измеренных внутренних или внешних углов.

Угловая невязка в этом случае может быть определена по формуле

$$f_{\beta} = \sum \beta_{\text{ИЗМ}} - \sum \beta_{\text{ТЕОР}}. \quad (7.102)$$

В дальнейшем обработка результатов угловых измерений подобна обработке результатов угловых измерений разомкнутого теодолитного хода: вычисление допустимой угловой невязки по формуле (7.69); проверка условия (7.70); вычисление поправок в углы и контроль их вычисления по формулам (7.71) и (7.72); исправление углов по формуле (7.73) и контроль их исправления по соблюдению равенства

$$\sum \beta_{\text{ИСПР}} = \sum \beta_{\text{ТЕОР}}. \quad (7.103)$$

Дирекционные углы линий замкнутого теодолитного хода вычисляют последовательно по ходу с контрольным вычислением дирекционного угла его линии, вычисленного при азимутальной привязке. Так, следуя обозначениям на схеме рис. 7.26 и принятому направлению хода,

$$\begin{aligned} \alpha_{23} &= \alpha_{12} \pm 180^{\circ} - \beta_{2\text{ИСПР}} \\ \alpha_{12} &= \alpha_{\text{АИСК}} \pm 180^{\circ} - \beta_{1\text{ИСПР}} \\ \alpha_{34} &= \alpha_{23} \pm 180^{\circ} - \beta_{3\text{ИСПР}} \\ \alpha_{45} &= \alpha_{34} \pm 180^{\circ} - \beta_{4\text{ИСПР}} \\ \alpha_{5A} &= \alpha_{45} \pm 180^{\circ} - \beta_{5\text{ИСПР}} \\ \alpha_{\text{АВВЯЗ}} &= \alpha_{5A} \pm 180^{\circ} - \beta_{\text{АИСПР}} \end{aligned} \quad (7.104)$$

Контрольное значение дирекционного угла, полученное по последнему выражению формул (7.104) для линии  $AI$  должно точно соответствовать его исходному значению.

Таблица 7.12

**Пример. 7.17.**

**Ведомость координат замкнутого теодолитного хода**

№ № то- чек	Горизонтал ные углы $\beta$ (поправки)	Дирекцион- ные углы $\alpha$	Горизон- тальные проложе- ния, м $d$	Приращения координат, м (поправки)		Координаты, м	
				$\Delta X$	$\Delta Y$	$X$	$Y$
$A$						4216,563	7018,427



		117°42'15,2"	77,348	(-0,005) -35,960	(-0,006) +68,481		
1	(+3,1") <b>124°15'12"</b>	173°27'00,1"	109,854	(-0,007) -109,137	(-0,009) +12,531	4180,598	7086,902
2	(+3,2") <b>90°40'14"</b>	262°46'42,9"	64,090	(-0,004) -8,056	(-0,005) -63,582	4071,454	7099,424
3	(+3,3") <b>191°46'32"</b>	251°00'07,6"	56,029	(-0,004) -18,239	(-0,005) -52,977	4063,394	7035,837
4	(+3,2") <b>85°09'36"</b>	345°50'28,4"	142,786	(-0,009) +138,448	(-0,013) -34,927	4045,151	6982,855
5	(+3,1") <b>100°54'12"</b>	64°56'13,3"	77,848	(-0,005) +32,978	(-0,006) +70,518	4183,590	6947,915
A	(+3,1") <b>127°13'55"</b>	117°42'15,2"	$\sum d$ 527,955	$f_x$ +0,034	$f_y$ +0,044	4216,563	7018,427
I	$\sum \beta_{ИЗМ}$ 719°59'41"			$f_{ABC}$ 0,0556	$f_{ОГН} = \frac{1}{9500}$		
	$\sum \beta_{ТЕОР}$ 720°00'00"			$f_{ОГН доп}$ $\frac{1}{7500}$			
$f_\beta$	-19"						
$f_{\beta доп}$	± 24"						

## 76.2. Вычисление приращений координат и оценка точности хода

Поскольку начальная и конечная точки замкнутого теодолитного хода совмещены, то, как следует из формул (7.77), теоретические суммы приращений координат, вычисленных из решения *прямой геодезической задачи*, должны быть равны нулю, т.е.

$$\sum \Delta X_{ТЕОР} = 0; \sum \Delta Y_{ТЕОР} = 0, \quad (7.105)$$

а невязки в приращениях координат определяются только суммами полученных соответствующих приращений

$$f_x = \sum \Delta X_{ВЫЧ}; \quad f_y = \sum \Delta Y_{ВЫЧ}. \quad (7.106)$$

Далее оценка точности хода заключается в вычислении абсолютной невязки хода (7.80), относительной невязки хода (7.81) и в сравнении последней с допустимой относительной невязкой, установленной для данного вида работ соответствующей инструкцией или техническим заданием.

По аналогии с разомкнутым теодолитным ходом физический смысл невязок в приращениях координат тот же (рис. 7.24 б).

## 76.3. Уравнивание приращений координат и вычисление координат точек хода

Поправки в приращения координат (весовые) вычисляются по формулам (7.84) с контролем их вычислений по формулам (7.85). Контрольные суммы исправленных (7.86) приращений координат для замкнутого теодолитного хода должны быть равны нулю, т.е.

$$\sum \Delta X_{ИСПР} = 0; \sum \Delta Y_{ИСПР} = 0. \quad (7.107)$$

Координаты точек вычисляют последовательно по ходу по принятому ранее направлению с контрольным замыканием на начальную точку хода:

$$\begin{aligned} X_{НВЬП} &= X_{n-1} + \Delta X_{НИСП} = X_{НИСХ} \\ Y_{НВЬП} &= Y_{n-1} + \Delta Y_{НИСП} = Y_{НИСХ} \end{aligned} \quad (7.108)$$

#### 76.4. Обработка ведомости высот

Оценка точности определения превышений в замкнутом теодолитном ходе может быть выполнена до высотной его привязки, т.е. до передачи высот на теодолитный ход. В схемах, включающих непосредственно в ход исходную точку с известной высотой, отдельная привязка по высотам не производится, а высоты передаются сразу же по ходу с точки на точку. Если же исходная точка находится в стороне от теодолитного хода, то передачу высоты необходимо выполнить отдельным (подходным) ходом. Здесь мы будем рассматривать первый случай, когда исходная точка является и точкой теодолитного хода (полигона).

В связи с тем, что начальная и конечная точки хода совпадают, то, следуя формуле (7.93), теоретическая сумма превышений по выбранному направлению хода должна быть равна нулю ( $\sum h_{теор} = 0$ ). Из-за погрешностей в измерениях углов наклона и расстояний вычисленные по формулам (7.89) или (7.90) превышения могут содержать погрешности, а их сумма в этом случае будет отличаться от теоретической, т.е. образуется невязка в превышениях

$$f_h = \sum h_{ВЬП} . \quad (7.109)$$

При допустимой величине невязки, сравниваемой с допускаемой (7.94), т.е. при выполнении условия (7.95), производят вычисление поправок в превышения (7.96), исправляют превышения (7.97) и контролируют результаты уравнивания выполнением условия

$$\sum h_{исп} = 0 . \quad (7.110)$$

Таблица 7.13

#### Пример. 7.18.

##### Ведомость высот замкнутого теодолитного хода

№№ точек	Горизонтальные проложения, м	Углы наклона	Превышения		Высоты точек, м	№№ точек
			вычисленные	исправленные		
А					<b>111,65</b>	А
	<b>77,348</b>	<b>-2°00,5'</b>	-0,01	-2,71		
1			-2,70		108,94	1
	<b>109,864</b>	<b>+1°16,3'</b>	-0,01	+2,43		
2			+2,44		111,37	2
	<b>64,090</b>	<b>+4°25,6'</b>	-0,01	+4,95		
3			+4,96		116,32	3
	<b>56,029</b>	<b>-3°38,8'</b>	-0,00	-3,57		
4			-3,57		112,75	4
	<b>142,776</b>	<b>+0°46,5'</b>	-0,02	+1,91		
5			+1,93		114,66	5



пустимой относительной погрешностью 1:3000, то для диагонального хода допустимая относительная погрешность должна быть не более 1:2000, а для замкнутого хода с допустимой относительной погрешностью 1:2000 – соответственно не более 1:1350.

По такому же принципу обрабатываются результаты измерений в диагональных ходах, представляющих собой перемиčky между разомкнутыми ходами, либо вообще между разъединенными на местности любыми теодолитными ходами. Во всех случаях необходимо выдерживать установленные требования к длине диагонального хода и его линий и числу точек поворота.

**Пример. 7.19.** Вычисление координат точек диагонального хода.

Исходные данные. Замкнутый теодолитный ход (§76).

$\beta_{(5)} = 55^{\circ}14'45''$ ;  $\beta_{(2)} = 63^{\circ}43'05''$ ;  $\beta_6 = 144^{\circ}06'00''$ ;  $d_{56} = 109,861$  м;  $d_{56} = 88,120$  м.

**Решение.** Способ полярных координат с точек 5 и 2.

$$\alpha_{56} = \alpha_{54} - \beta_{(5)} = 110^{\circ}35'40,2'' ; \quad \alpha_{26} = \alpha_{23} + \beta_{(2)} = 326^{\circ}29'50,2'' .$$

$$X_{6(5)} = X_5 + d_{56} \cos \alpha_{56} = 4144,945 \text{ м}; \quad Y_{6(5)} = Y_5 + d_{56} \sin \alpha_{56} = 7050,754 \text{ м}.$$

$$X_{6(2)} = X_2 + d_{26} \cos \alpha_{26} = 4144,930 \text{ м}; \quad Y_{6(2)} = Y_2 + d_{26} \sin \alpha_{26} = 7050,779 \text{ м}.$$

Абсолютные значения невязок:

$$|f_x| = 4144,945 - 4144,930 = 0,015 \text{ м}; \quad |f_y| = 7050,779 - 7050,754 = 0,025 \text{ м};$$

$$f_{ABC} = 0,0292 \text{ м}. \quad \sum d_{\text{диаг}} = 197,981 \text{ м}; \quad f_{\text{отн}} = \frac{1}{197,981 / 0,0292} = \frac{1}{6790} .$$

Как видим, относительная погрешность диагонального хода оказалась примерно в два раза больше, чем замкнутого хода, в котором построен данный диагональный ход. Однако здесь следует ориентироваться на допустимую относительную погрешность, которая равна 1:7500. Следуя допускам на точность построения диагональных ходов, в данном случае допустимой была бы величина относительной погрешности диагонального хода и 1:5000.

Заключение: точность построения диагонального хода соответствует поставленным требованиям.

## Глава 8 ТОПОГРАФИЧЕСКИЕ СЪЕМКИ

### § 78. Назначение и виды топографических съемок

*Съемка* – комплекс работ, которые выполняют на местности с целью получения оригинала топографической карты или плана, а также получения топографической информации в другом виде, например, цифровом.

В соответствии с назначением картографического материала съемки могут быть *контурными* (ситуационными, горизонтальными, плановыми), если в результате получают контурный план. Если на карте или плане изображается и рельеф, то предшествующая этому съемка называется *топографической*.

В зависимости от применяемых инструментов и методов производства работ различают экерную, буссольную, глазомерную, теодолитную, тахеометрическую, мензурную, высотную, фототеодолитную и аэрофотосъемку.

Следует сказать, что большинство из перечисленных выше топографических съемок в настоящее время не применяется, либо применяется весьма редко, в связи с появлением на рынке оптико-электронных приборов. По принципу их работы и организации измерений съемку, выполняемую с их помощью, можно отнести к тахеометрической. Подробно о тахеометрической съемке будет рассказано в § 81. Однако, как исторические сведения, приведем краткую характеристику перечисленных видов съемки.

*Эксерная съемка* выполнялась с помощью эксера, прибора, позволяющего строить на местности прямые углы. Основной способ съемки ситуации местности – способ перпендикуляров (§ 80).

При использовании *гониометра*, простейшего угломерного прибора, можно измерять на местности углы с точностью 10'.

*Буссоль* позволяет измерять горизонтальные углы и ориентировать направления по магнитному азимуту. По конструкции она похожа на гониометр, имеет горизонтальный круг, но дополнительно имеет компас. В связи с этим по результатам *буссольной съемки* изображение местности строится с ориентированием по магнитному меридиану.

*Глазомерная съемка* выполняется, чаще всего, в геологических партиях, если в составе экспедиции нет геодезической бригады. Выполняется эта съемка с помощью простейших приборов. Обычно достаточно бывает использование только компаса, который закрепляют на планшете и последний ориентируют по магнитному меридиану местности. Положение объектов съемки определяют значением магнитного азимута и расстоянием, которое измеряют рулетками или шагами (длину шага предварительно определяют по известной длине отрезка местности).

*Фототеодолитная съемка* выполняется с помощью *фототеодолита* (совмещенные конструктивно теодолит и фотоаппарат) с базиса, разбитого на местности. Координаты концов базиса и его дирекционный угол находят геодезическими способами привязкой к опорной (съёмочной) геодезической или маркшейдерской сети. В результате получают два снимка местности (стереопару), по которым на специальных приборах, например, стереокомпараторах, определяют пространственные координаты точек местности (плановые координаты и высоты). Это позволяет получить топографический план или карту. Фототеодолитную съемку производят с нескольких базисов, если одного базиса недостаточно для получения изображения искомого участка местности.

*Аэрофотосъемку* местности выполняют с летательных аппаратов, в основном – с самолетов. На борту самолета устанавливают *аэрофотоаппарат*, оптическая ось которого направлена по отвесной линии, либо с небольшими отклонениями от нее в пределах 3° из-за качания самолета по курсу и в поперечном направлении. Для стабилизации оптической оси аэрофотоаппарат размещают на специальной гиросtabilизирующей платформе. При фотографировании местности получают ряд последовательных перекрывающихся снимков (с перекрытиями от 56% до 70%) – стереопар. Предварительно на местности закрепляют и оформляют систему *опознаков*, координаты которых находят геодезическими способами при полевой подготовке к летно-съёмочным работам. Указанные опознаки обязательно изображаются и

распознаются на снимках стереопар, и по их координатам на специальных фотограмметрических приборах определяют полные координаты точек местности. Результатом обработки стереопар являются топографические карты. Существует одномаршрутная съемка, выполняемая при изысканиях линейных сооружений, и площадная съемка (многомаршрутная), выполняемая параллельными маршрутами. При этом соседние маршруты между собой должны иметь перекрытие в пределах 20% - 40%.

*Мензульная* (или углоначертательная) съемка в настоящее время используется редко. В результате мензульной съемки план или карту местности получают непосредственно в поле с незначительной последующей камеральной обработкой. Для мензульной съемки используют планшет (мензулу), устанавливаемый горизонтально на штативе. На планшет предварительно наносят точки съемочного обоснования (теодолитного или мензульного хода). Планшет на станции центрируют над точкой съемочного обоснования и ориентируют по двум или более направлениям на другие точки съемочного обоснования. Для этого используют *кипрегель*, представляющий собой зрительную трубу с вертикальным кругом, визирная ось которой находится в плоскости, параллельной ребру линейки, скрепленной с основанием кипрегеля. Вертикальный круг кипрегеля снабжен номограммой, по которой при визировании на рейку, установленную в съемочной точке, берут значения горизонтального проложения и превышение съемочной точки относительно станции. Направление на съемочную точку задается по ребру линейки кипрегеля.

О других видах съемки (теодолитной, тахеометрической, высотной) подробно рассказано соответственно в § 80, § 81 и гл. 9).

Геодезической основой съемок служат пункты Государственной геодезической сети (ГГС), геодезической сети сгущения (ГСС) и съемочных геодезических сетей.

*Съемочная геодезическая сеть*, или *съемочное обоснование*, (гл. 7) создается с целью сгущения геодезической плановой и высотной основы до плотности, обеспечивающей выполнение топографических съемок. Пункты съемочной сети определяются построением триангуляционных сетей, проложением теодолитных ходов, а также различными видами засечек. При развитии съемочной сети одновременно определяются, как правило, положения точек в плане и по высоте. Высоты точек получают геометрическим или тригонометрическим нивелированием.

## **§ 79. Понятие о цифровой модели местности**

Цифровая модель местности (ЦММ) представляет собой совокупность данных (плановых координат и высот) о множестве ее точек. Указанная совокупность может представлять собой отдельно цифровую модель рельефа (ЦМР) и цифровую модель контуров (ЦМК), т.е. ситуации местности. В последнем случае элементы ситуации могут быть заданы только плановыми

координатами  $X$  и  $Y$ . Цифровая модель рельефа обязательно задается одновременно плановыми координатами и высотами  $H$ .

Цифровая информация о местности очень удобна для представления и хранения в электронном виде.

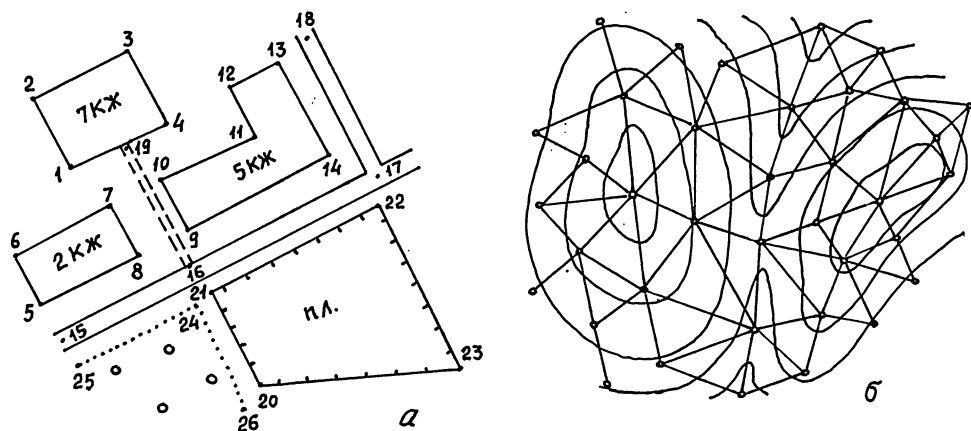


Рис. 8.1. Цифровая модель местности  
а) представление ситуации; б) представление рельефа

ЦММ эффективно пользоваться при аналитических проектных работах. В этом случае такие модели строят с помощью топографических карт. Очевидно, что при построении дискретной картины местности (количество точек ограничено) криволинейные контуры необходимо заменять отрезками ломаных линий. При этом отклонение криволинейного контура от сглаживающей ломаной линии не должно быть больше 0,3 мм. Точки контуров (углы зданий, углы поворота линейных объектов и т.п.) определяют их координатами, измененными непосредственно по карте, либо используют их значения, полученные в процессе топографической съемки.

Аналитическая форма представления ситуации (рис. 8.1 а) имеет вид таблицы с номерами точек (1 – 26), их координатами  $X$ ,  $Y$  и указанием взаимосвязи точек контура, например, 1-2-3-4 – сплошной контур дома, 25-24-26 – контур леса. Такая информация записывается в кодированном виде в таблице.

При задании рельефа в аналитической форме используют два метода. В первом, в зависимости от сложности рельефа, координаты и высоты точек определяют в узловых точках сплошной равномерной сети равносторонних треугольников и квадратов. В каких-то местах эта сеть может быть гуще, в других – реже. Такой метод имеет недостаток, определяемый рассогласованностью выбора координируемой точки с характером рельефа местности. Во втором методе (рис. 8.1 б) выбор координируемых точек определяется особенностями рельефа в тех или других частях местности. Точки выбирают на характерных линиях (линиях водослива и водораздела), на вершинах

возвышенностей и по дну котловин (ям), в седловинах, в местах перегибов рельефа с выделением фрагментов с однородным склоном и т.п. Таким образом, во втором методе используется подход, соответствующий методике топографической съемки рельефа, например, при тахеометрической съемке.

Использование имеющихся программ обработки ЦММ позволяет весьма быстро решить многие задачи, встречающиеся при проектировании: выполнить вертикальную планировку местности по заданным параметрам, определить объемы земляных работ, разработать оптимальные варианты строительства какого-либо сооружения и мн.др.

## § 80. Теодолитная съемка

В результате выполнения *теодолитной съемки* получают плановое положение контуров и местных предметов. Теодолитная съемка обычно производится сравнительно на небольших участках местности, изображаемых в последующем на топографических планах крупных масштабов. Геодезической основой для теодолитной съемки являются теодолитные ходы, сгущаемые от пунктов Государственной геодезической сети 1-4 классов, а также пунктов сетей 1 и 2 разрядов. Формы ходов зависят от характера снимаемой местности. Так, при съемке площадных объектов целесообразно использовать замкнутые ходы в сочетании с диагональными и висячими ходами, при съемках линейных сооружений – разомкнутые в сочетании, в основном, с висячими ходами..

*Теодолитная* (горизонтальная, плановая) съемка выполняется при помощи теодолита и мер длины (лента, рулетка) или дальномеров. Предельная погрешность ( $m_s$ ) положения пунктов плановой съемочной сети относительно пунктов ГГС или ГСС не должна превышать 0,2 мм в масштабе плана.

Теодолитные ходы прокладываются с предельными относительными погрешностями 1:3000, 1:2000, 1:1000 в зависимости от условий съемки (см. табл. 8.1)

Таблица 8.1

Допустимые относительные погрешности в теодолитных ходах

Масштаб плана	$m_s$		
	1:3000	1:2000	1:1000
	Допустимые длины ходов между исходными пунктами, км		
1 : 5000	6,0	4,0	2,0
1 : 2000	3,0	2,0	1,0
1 : 1000	1,8	1,2	0,6
1 : 500	0,9	0,6	0,3

Теодолитная съемка ситуации выполняется способами угловой и линейной засечек, полярных координат, перпендикуляров, обхода, створов и комбинированными способами. Часть указанных способов была рассмотрена



ранее в гл. 7 при пояснениях вопросов привязки точек съемочного обоснования.

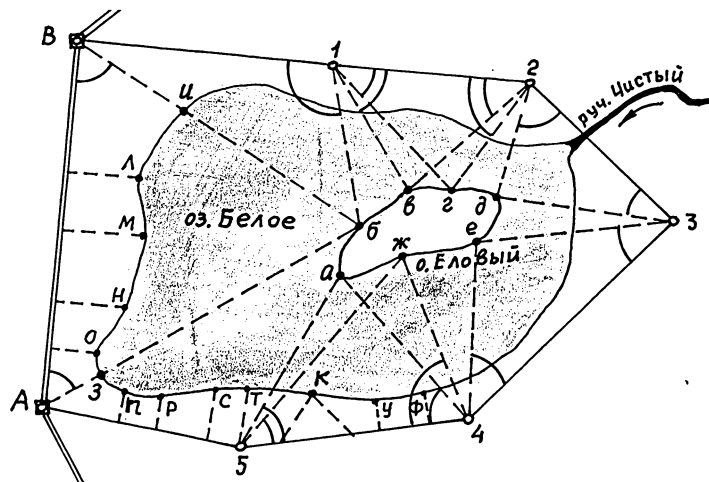


Рис. 8.2. Способы теодолитной съемки

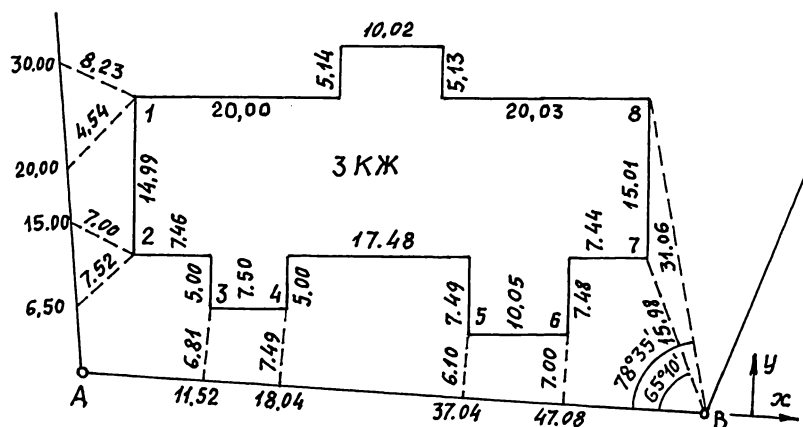


Рис. 8.3. Способы теодолитной съемки

*Способ угловой засечки* используют для съемки точек, недоступных для непосредственных измерений. На план снятые точки наносят графически, либо по координатам, предварительно вычисленным по формулам Юнга. В частности, указанный способ использован для получения положения острова (точки *а – ж*) – рис. 8.2. Вокруг озера проложен для выполнения съемки *способом обхода* замкнутый теодолитный ход, привязанный к основной геодезической основе АВ.

На рис. 8.2 *способом линейной засечки* получено положение точки *к*, находящейся на берегу озера. На рис. 8.3 таким же способом получено положение точек 1 и 2 здания. Обычно точки местности, полученные способом линейной засечки, наносят на план графически по соответствующим расстояниям.

*Способ полярных координат* применяют для съемки точек, находящихся в прямой видимости сравнительно недалеко от точек и линий теодолитного хода. При этом целесообразно, чтобы измеряемые расстояния не превышали длины мерного прибора (ленты или рулетки). При больших углах наклона в измеренное расстояние вводят поправку за наклон для получения горизонтального проложения. На рис. 8.2 таким способом получены точки *и* и *з* одновременно с выполнением угловой засечки. На рис. 8.3 указанный способ использован для съемки точек 7 и 8 сооружения. Точки на план наносят графически по значению горизонтального угла и горизонтального проложения, либо по координатам, предварительно вычисленным из решения прямой геодезической задачи с точек съемочного обоснования.

Если съемочные точки находятся вблизи от линии съемочного обоснования, то удобно использовать для их съемки *способ перпендикуляров (прямоугольных координат)*. На рис. 8.2 таким способом получено положение точек *л – ф* береговой линии озера, а на рис. 8.3 – точки 3, 4, 5 и 6 здания. Часто линию съемочного обоснования принимают за ось *x*, а перпендикулярную к ней линию – за ось *y* условной системы координат. При этом значения координат *x* и *y* съемочных точек могут быть положительными и отрицательными. Результаты измерений оформляют в виде таблицы и соответствующего *абриса*, похожего на приведенные рисунки, с полным указанием на нем результатов измерений и привязок к точкам и линиям съемочного обоснования. Абрис составляют обычно на одну из линий съемочного обоснования, либо на две-три таких смежных линии. Точки, полученные способом перпендикуляров, наносят на план графически.

О *способе обхода* уже было сказано выше (см. рис. 8.2). Этот способ чаще используется для съемки контуров, имеющих значительную площадь. Вокруг контура прокладывают дополнительный замкнутый теодолитный ход и с точек и линий этого хода любыми известными способами получают положение искомых точек.

Ответственные точки местности часто снимают повторно с других станций, либо на той же станции, но другим способом (*комбинированный способ съемки*). Комбинированный способ съемки может быть реализован, например, одновременным получением координат точки способом угловой и линейной засечек при использовании электронных тахеометров.

Если линия съемочного обоснования пересекает контур объекта местности, линейный контур сооружения, то положение точки пересечения фиксируют промерами в створе линии съемочного обоснования. Такой способ называют *способом створов*. Часто створ задают отдельно от линии съемочного обоснования направлением, а положение точек местности от него получают способом перпендикуляров.

При съемках зданий обязательно производят полные их обмеры. Это позволяет пополнить недостающие элементы контура здания, а также является надежным контролем результатов съемки. Контрольные промеры выполняют и между точками твердых контуров, полученных с разных станций, либо с одной станции, но независимо от другой точки.

Такие промеры могут быть выполнены между углами двух соседних зданий, между углами одного и того же здания сложной конфигурации, между точкой-ориентиром и углом здания и т.п.

Горизонтальные углы при теодолитной съемке измеряют теодолитом полным приемом, во многих случаях и расстояния измеряют дважды – в прямом и обратном направлениях, если они значительно превышают длину мерного прибора. Центрирование теодолита в точке съёмочного обоснования должно обеспечить необходимую точность измерения горизонтальных углов.

## § 81. Тахеометрическая съемка

В результате выполнения тахеометрической съемки плановые координаты и высоты точек местности получают одновременно, при использовании одного и того же прибора. *Тахео* – означает «быстро».

В качестве приборов для указанной съемки используют технические теодолиты типа Т30 и Т15, специальные тахеометры типа ТП, ТВ, ТА-2, Dahlta 020 и др., в отдельных случаях, при съемке в равнинной местности, используют нивелиры, имеющие горизонтальный круг (НТ, НСК-4, Ni030, NiB1 и др.). В настоящее время все большее применение находят электронные тахеометры, использование которых позволяет значительно уменьшить объем камеральных работ, связанных с вычислениями и графическим построением карт и планов. Тем более, что те же тахеометры используются и при создании съёмочного обоснования, при выполнении привязок теодолитных ходов, а также выполнения работ сравнительно высокой точности.

При тахеометрической съемке с использованием оптико-механических приборов применяют стандартные нивелирные рейки с сантиметровыми или двухсантиметровыми делениями.

Плановое положение точек местности при тахеометрической съемке получают в полярной системе координат, полюсом которой является точка съёмочного обоснования, полярной осью – направление на любую видимую с данной станции точку съёмочного обоснования, либо другую точку, координаты которой являются известными. Полярный угол на снимаемую точку отсчитывается по часовой стрелке от исходного направления полярной оси. Расстояние до снимаемой точки (в проекции – горизонтальное проложение) соответствует расстоянию от полюса до искомой точки.

Если съемка выполняется прибором, имеющим нитяной дальномер, то наклонное (дальномерное) расстояние до точки определяют по формуле

$$D = kl + c, \quad (8.1)$$

а горизонтальное проложение по формуле

$$d = D \cos^2 v = kl \cos^2 v. \quad (8.2)$$

В приведенных формулах  $c$  – постоянная нитяного дальномера (для большинства приборов  $c = 0$ );  $k$  – коэффициент нитяного дальномера (для большинства приборов  $k = 100$ );  $l$  – число сантиметров по рейке между дальномерными нитями;  $v$  – угол наклона.

При использовании тахеометров автоматов и полуавтоматов, а также электронных тахеометров, горизонтальное проложение получают автоматически.

Превышение съёмочной точки определяют по формуле тригонометрического нивелирования (7.91) при наведении на рейку на отсчет, равный высоте прибора, или по формуле (7.90), если наведение производится на отсчет, не равный высоте прибора.

Предметами съёмки в зависимости от поставленных задач являются:

- населенные пункты со всеми строениями и пристройками;
- производственные и культурно-бытовые сооружения, исторические памятники, парки, сады, посадки в населенных пунктах с подеревной съёмкой;
- подземные коммуникации и места их выхода на земную поверхность;
- отдельные постройки вне населенных пунктов, объекты-ориентиры (отдельные деревья, кусты, большие камни-валуны и др.);
- орошаемые и осушаемые участки с сооружениями на них;
- земли сельскохозяйственного использования (огороды, парники, фруктовые сады, виноградники, питомники и т.п.);
- контуры земельных участков, не имеющих сельскохозяйственного назначения;
- места разработок рудных и нерудных полезных ископаемых;
- границы и граничные столбы;
- наземные линии связи и коммуникации и др.

Работа на станции тахеометрической съёмки выполняется в указанной последовательности (на примере рис. 8.5).

1. Установить теодолит в рабочее положение.

Центрирование теодолита производится с невысокой точностью, порядка 1-2 см.

2. Выбрать удаленную точку и определить по ней значение *места нуля* вертикального круга.

3. Измерить с точностью до 1 см высоту прибора на станции.

Высота прибора определяется от точки съёмочного обоснования до центра зрительной трубы прибора.

4. Установить положение «круг лево».

5. Выбрать направление полярной оси на соседнюю точку съёмочного обоснования, либо на другую точку съёмочного обоснования, координаты которой известны и установить ноль горизонтального круга на эту точку.

Для этого необходимо найти и совместить нули горизонтального круга и алидады, закрепить колонку, ослабить зажимной винт подставки (теодолита Т30) и выполнить наведение на точку съёмочного обоснования, пользуясь наводящим устройством подставки. После этого зажимным и наводящим устройствами подставки не пользоваться, а использовать только зажимное и наводящее устройства колонки теодолита.

При использовании теодолита Т15 установку нуля горизонтального круга на точку съёмочного обоснования выполнять с помощью куркового зажима и зажимного и наводящего устройств колонки.

В процессе измерений периодически необходимо проверять установку нуля в направлении полярной оси во избежание случайного его смещения.

6. Заготовить абрис тахеометрической съемки (рис. 8.6 и 8.7) с примерной зарисовкой ситуации и рельефа.

7. Выполнить наведения и регистрацию отсчетов на съёмочные точки:

- навести вертикальную нить сетки на центральную ось рейки, установленной в съёмочной точке;
- одним из подъёмных винтов подставки привести пузырек установочного цилиндрического уровня на середину; при использовании теодолитов с компенсатором это действие не производится;
- навести горизонтальную нить сетки на отсчет, равный высоте прибора;
- взять отсчет в сантиметрах между дальномерными нитями сетки (дальномерное расстояние); для удобства следует верхнюю нить временно сместить на ближайшее целое деление, отсчитать число сантиметров и снова возвратиться на отсчет высоты прибора;
- взять отсчет по шкале горизонтального круга;
- взять отсчет по шкале вертикального круга.

При хорошем навыке работы речник может переместиться на следующую съёмочную точку после взятия отсчета по дальномеру.

Количество съёмочных точек зависит от характера снимаемой местности, количества контурных точек, сложности рельефа и т.п. В среднем расстояние между съёмочными точками должно быть равно 2 см в масштабе снимаемого плана. Так, при съёмке плана в масштабе 1:500 съёмочные точки должны в среднем располагаться примерно на расстояниях 10 м друг от друга.

Нумерация съёмочных точек должна быть сквозной для всей снимаемой местности (без повторений номеров речных точек).

При съёмке ситуации должны быть сняты все контурные точки, определяющие плановое положение того или иного контура. Информация о контурах на топографическом плане должна иметь фактический характер.

Для построения рельефа должны быть сняты все его характерные точки и линии (вершины возвышенностей, дно котловин, точки седловин и перегибов рельефа, линии водоразделов и водосливов, подошвы и бровки и др.) – рис. 8.4. На абрисах тахеометрической съёмки выполняют не только примерную зарисовку рельефа, но и указывают направления однородных скатов в сторону понижения (стрелками между точками, расположенными на обнородных скатах).

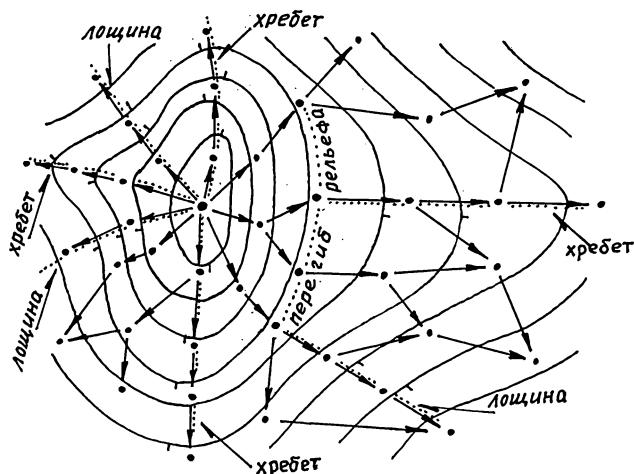


Рис. 8.4. Выбор речных точек для съемки рельефа

При съемке твердых контуров до речной точки должно быть расстояние не более 60 м для плана масштаба 1:1000, не более 100 м для плана масштаба 1:2000 и не более 150 м для плана масштаба 1:5000. Съемку твердых контуров в масштабе 1:500 выполняют способами теодолитной съемки, однако и при тахеометрической съемке для получения рельефа рейку устанавливают на тех же твердых контурах.

Максимальные расстояния до речных точек должны быть не более 150 м при съемке в масштабе 1:2000 и не более 250 м при съемке в масштабе 1:5000.

Если местность равнинная, то целесообразно визирную ось зрительной трубы установить горизонтально (на отсчет места нуля), а по рейке вместо отсчета по вертикальному кругу брать отсчет с округлением до 1 см. Высота речной точки в этом случае будет составлять

$$H_{PT} = H_{CT} + i - a, \quad (8.3)$$

где  $H_{CT}$  – высота станции (точки съемочного обоснования);  $i$  – высота прибора;  $a$  – отсчет по рейке.

Теодолит Т30, например, имеет цилиндрический уровень при зрительной трубе. Если визирную ось зрительной трубы установить горизонтально, а затем юстировочными винтами цилиндрического уровня зрительной трубы привести пузырек на середину, то при полученной установке теодолитом можно пользоваться как нивелиром.

Если при наведении на речную точку не видна высота прибора, то выполняют наведение на рейку на любой видимый отсчет  $V$ , который записывают в примечаниях журнала.

Камеральная обработка журнала тахеометрической съемки заключается в вычислении углов наклона по формуле (5.5) для положения «круг лево», превышений по формулам (7.90) или (7.91) и высот по формуле

$$H_i = H_{CT} + h_i \quad (8.4)$$

Далее приведем пример производства тахеометрической съемки местности с точек 6 и 7 съемочного обоснования (рис. 8.5). Абрисы на станциях 6 и 7 представлены на рис. 8.6 и 8.7, журнал тахеометрической съемки – в табл. 8.2. Вычисления в примере приведены только для некоторых точек. Для других точек Вы можете сами проверить получение того или иного результата.

**Пример 8.1.** Обработка результатов тахеометрической съемки.

Исходные данные: схема тахеометрической съемки (рис. 8.5); абрисы тахеометрической съемки (рис. 8.6 и 8.7), журнал тахеометрической съемки (табл. 8.2).

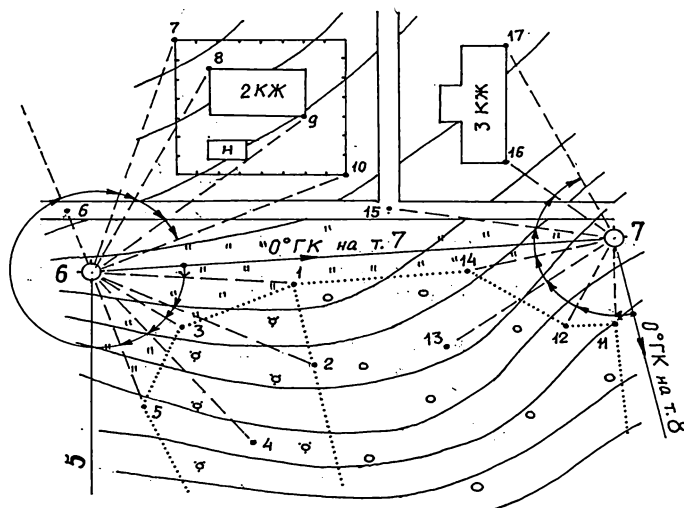


Рис. 8.5. Схема тахеометрической съемки на станциях 6 и 7

**Решение.**

1. Вычисление углов наклона: формула (5.5).

$$v_1 = -0^\circ 36' - (-0^\circ 02') = -0^\circ 34'$$

$$v_2 = -1^\circ 02' - (-0^\circ 02') = -1^\circ 00'$$

$$v_{10} = +0^\circ 22' - (-0^\circ 02') = +0^\circ 24'$$

$$v_{11} = -3^\circ 48' - (-0^\circ 01') = -3^\circ 47'$$

$$v_{12} = -2^\circ 07' - (-0^\circ 01') = -2^\circ 06'$$

$$v_{17} = +3^\circ 49' - (-0^\circ 01') = +3^\circ 50'$$

2. Вычисление горизонтальных проложений: формула (8.2).

$$d_1 = (kl)_1 \cdot \cos^2 v_1 = 45,3 \cdot \cos^2(-0^\circ 34') = 45,3 \text{ м}$$

$$d_2 = (kl)_2 \cdot \cos^2 v_2 = 57,2 \cdot \cos^2(-1^\circ 00') = 57,2 \text{ м}$$

$$d_8 = (kl)_8 \cdot \cos^2 v_8 = 56,2 \cdot \cos^2(+3^\circ 02') = 56,0 \text{ м}$$

$$d_{17} = (kl)_{17} \cdot \cos^2 v_{17} = 55,6 \cdot \cos^2(+3^\circ 50') = 55,4 \text{ м}$$

3. Вычисление превышений: формулы (7.90) и (7.91).

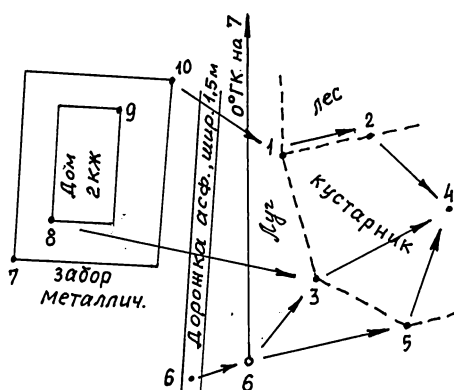


Рис. 8.6. Абрис тахеометрической съемки на станции 6

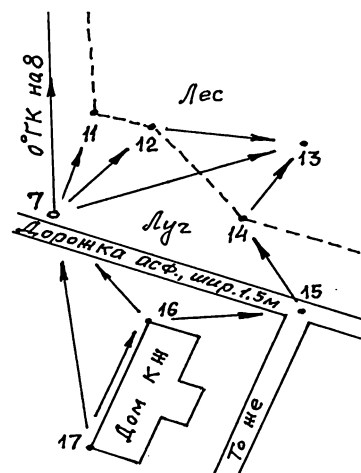


Рис. 8.7. Абрис тахеометрической съемки на станции 7

Таблица 8.2

Журнал тахеометрической съемки

№ № точек	Дально- мер, <i>kl</i> , м	Отсчеты		Угол накло- на, <i>v</i>	Гориз. пролож.  , <i>d</i> , м	Превы- шение, <i>h</i> , м	Высота, <i>H</i> , м	Примечания
		ГК	ВК					
Станция 6		0°ГК на точку 7		<i>i</i> = 1,46 м		MO = -0°02'		<i>H</i> <sub>6</sub> = 79,78 м
1	45,3	10°10'	-0°36'	-0°34'	45,3	-0,45	79,3	Граница леса, куст. и луга
2	57,2	32°05'	-1°02'	-1°00'	57,2	-2,04	77,7	Гр. леса и куст. V = 2,5 м
3	24,9	45°00'	-2°43'	-2°41'	24,8	-1,16	78,6	Гр. куст. и луга
4	58,5	60°03'	-3°28'	-3°26'	58,3	-4,04	75,7	Куст. V = 2,0 м
5	37,9	82°40'	-5°54'	-5°52'	37,5	-3,85	75,9	Гр. куст. и луга
6	14,4	255°24'	+6°38'	+6°40'	14,2	+1,66	81,4	Дорожка
7	61,6	291°16'	+3°22'	+3°24'	61,4	+3,65	83,4	Забор(угол)
8	56,2	301°42'	+3°00'	+3°02'	56,0	+2,96	82,7	Дом(угол)
9	63,0	330°45'	+1°00'	+1°02'	63,0	+1,13	80,9	Дом(угол)
10	63,3	342°36'	+0°22'	+0°24'	63,3	+0,45	80,2	Забор(угол)
Станция 7		0°ГК на точку 8		<i>i</i> = 1,52 м		MO = -0°01'		<i>H</i> <sub>7</sub> = 76,64 м
11	24,3	20°04'	-3°48'	-3°47'	24,2	-1,60	75,0	Гр.леса и луга
12	27,3	46°11'	-2°07'	-2°06'	27,3	-1,00	75,6	То же
13	49,8	75°18'	+0°38'	+0°39'	49,8	+0,59	77,2	Лес, V=1,5 м
14	36,6	94°56'	+2°26'	+2°27'	36,5	+1,56	78,2	Гр.леса и луга
15	53,4	118°39'	+3°11'	+3°12'	53,2	+2,97	79,6	Пересеч. дорожек
16	32,2	144°30'	+4°49'	+4°50'	32,0	+2,71	79,4	Угол дома
17	55,6	174°23'	+3°49'	+3°50'	55,4	+3,7	80,4	То же



$$h_1 = d_1 \cdot \operatorname{tg} v_1 = 45,3 \cdot \operatorname{tg} (-0^\circ 34') = -0,45 \text{ м}$$

По таким же формулам вычисляются превышения для точек 3, 5 – 10, 11, 12, 14 – 17.

$$h_2 = d_2 \cdot \operatorname{tg} v_2 + i - V = 57,2 \cdot \operatorname{tg} (-1^\circ 00') + 1,46 - 2,50 = -2,04 \text{ м}$$

По таким же формулам вычисляются превышения для точек 4 и 13.

4. Вычисление высот точек: формула (8.4).

$$H_1 = H_6 + h_1 = 79,78 + (-0,45) = 79,33 \text{ м} = 79,3 \text{ м}$$

$$H_2 = H_6 + h_2 = 79,78 + (-2,04) = 77,74 \text{ м} = 77,7 \text{ м}$$

И т.д. до точки 10 включительно.

$$H_{11} = H_7 + h_{11} = 76,64 + (-1,60) = 75,04 \text{ м} = 75,0 \text{ м}$$

$$H_{12} = H_7 + h_{12} = 76,64 + (-1,00) = 75,64 \text{ м} = 75,6 \text{ м}$$

И т.д. до точки 17 включительно.

## **§ 82. Составление плана местности по результатам топографической съемки**

Топографические карты и планы составляют в камеральных условиях графически (вручную), либо в электронном виде, если при выполнении полевых работ была составлена цифровая модель местности, либо использовался электронный тахеометр с соответствующим блоком обработки и хранения измерительной информации. Здесь мы рассмотрим принцип графического построения топографического плана на основе результатов измерений и обработки съемочного обоснования, тахеометрической и горизонтальной съемки.

Для построения топографического плана необходимо иметь следующее:

- ведомости, журналы, абрисы (ведомость координат точек теодолитного хода; ведомость высот точек теодолитного хода; журнал тахеометрической съемки; абрисы теодолитной и тахеометрической съемки);

- инструменты и материалы (линейка Дробышева или координатограф; геодезический транспортир; масштабная линейка – металлическая линейка с гравированным на ней поперечным масштабом; линейка металлическая или пластмассовая длиной 30 - 40 см; циркуль-измеритель; кривоножка и рейсфедер (при использовании туши); карандаши ТМ, Т – 3Т; заточка для карандаша, мелкая наждачная шкурка; ластик мягкий для карандаша; лист ватмана соответствующего размера; тушь цветная (черная, коричневая, зеленая); калька прозрачная размером 10 х 10 см).

### **82.1. Построение и оцифровка сетки координат**

Сетку квадратов, в зависимости от масштаба плана, строят размерами 40 х 40 см или 50 х 50 см со стороной квадрата 10 см. Построение сетки квадратов производится с помощью *линейки Дробышева*, либо с помощью *полевого координатографа*.

Все линии построения необходимо производить карандашом Т, 2Т или 3Т, грифель которого должен быть доведен до острия на мелкой наждачной шкурке. Толщина линий допускается не более 0,1 мм. Проводить линии следует без нажима, сравнительно легким движением по бумаге. Поверх-

ность под листом бумаги должна быть ровной. Ребро линейки и прочерченная линия должны совпадать.

Контроль построения сетки квадратов выполняется проверкой диагоналей каждого квадрата одним раствором циркуля-измерителя, равным 141,4 мм. Разности диагоналей не должны быть более 0,2 мм.

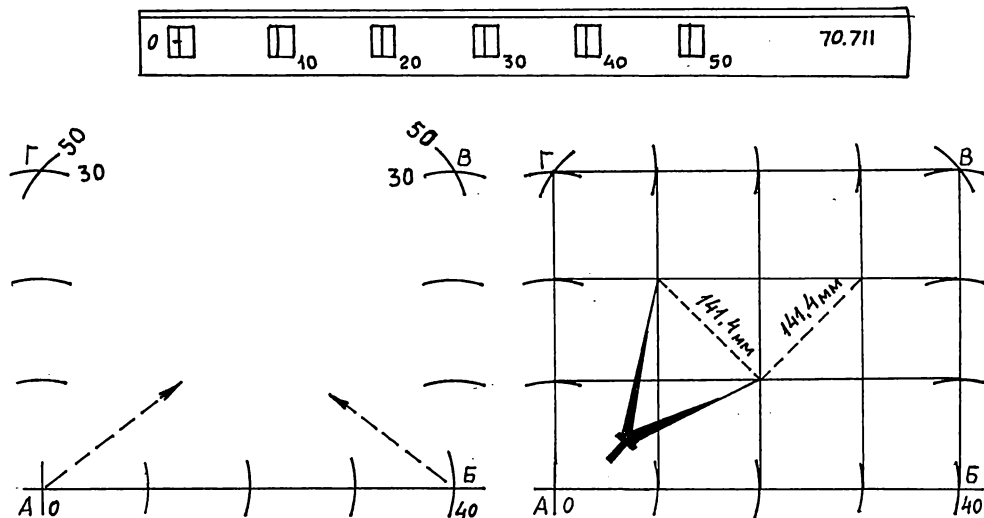


Рис. 8.8. Построение сетки квадратов с помощью линейки Дробышева

Линейка Дробышева (рис. 8.8) представляет собой массивную стальную полосу длиной несколько более 70 см и шириной 5 см. Она имеет два ровных края: один край скошенный, другой – прямой. По центру линейки в окошках выполнены скошенные края радиусами 10, 20, 30, 40 и 50 см. В первом окошке имеется прямой скос. Край линейки выполнен с закруглением, равным 70,711 см. С помощью такой линейки можно построить сетку квадратов со стороной 10 см 3 x 4 (диагональ 50 см) и 5 x 5 (диагональ 70,711 см). Порядок построения, например сетки квадратов 3 x 4 следующий:

- прочертить произвольно линию АБ и установить на нее линейку так, чтобы в окошках эта линия была видна; нулевой штрих совместить с линией и выполнить засечки 10, 20, 30 и 40;

- расположить линейку перпендикулярно к линии АБ в точке 0 и выполнить засечки 10, 20 и 30; то же самое выполнить и на засечке 40;

- расположить линейку в засечке 0, найти в окошке 50 засечку 30, полученную из засечки 40 линии АБ, и сделать диагональную засечку; то же самое выполнить и с засечки 40 по диагонали на засечку 30;

- соединить точки А-Б, Б-В, В-Г, Г-А; получится прямоугольник АБВГ; построить засечки из точки Г на точку В и соединить их с противоположными им засечками; получится соответствующая сетка квадратов.

Координатограф представляет собой прямолинейную направляющую со шкалой, по которой перемещается перпендикулярная к ней штанга, также

имеющая шкалу. На штанге имеется игла для фиксации накола на бумаге. Штанга последовательно устанавливается при построении сетки квадратов со стороной 10 см на соответствующие отсчеты, а каретка с иглой затем перемещается с тем же шагом по перпендикуляру к направляющей.

Для планшетов планов, имеющих установленную номенклатуру, оцифровка выполняется независимо от результатов съемки.

При оцифровке сетки необходимо учитывать следующее:

- масштаб плана;
- подписи координатных линий должны быть кратны, 50, 100, 200 и 500 м в зависимости от масштаба плана;
- при выбранном положении листа координаты  $X$  возрастают снизу вверх (с юга на север), координаты  $Y$  – слева направо (с запада на восток).

Подписи линий координатной сетки выполняют в км.

Если разграфка планов масштаба 1:2000 и 1:5000 выполняется в соответствии с разграфкой топографических карт, то на внешних рамках строят сетку географических координат. Для этого по геодезическим координатам углов планшета определяют их прямоугольные координаты и интерполированием строят сетку прямоугольных координат.

## 82.2. Нанесение на план точек съёмочного обоснования

Для нанесения точек съёмочного обоснования (теодолитного хода) необходимо воспользоваться поперечным масштабом, выгравированным на геодезическом транспорте, либо специальной масштабной линейке. Величины отрезков следует брать в раствор циркуля-измерителя.

Предположим, что нам необходимо нанести на план точки 6 с координатами  $X_6 = 3168,48$  м,  $Y_6 = 5842,32$  м и 7 с координатами  $X_7 = 3141,77$  м и  $Y_7 = 5957,61$  м на план масштаба 1:1000. Воспользуемся для этого поперечным масштабом с основанием  $a = 1$  см (10 м; 1 м; 0,1 м), т.е. 0,1 м является точностью данного поперечного масштаба для работы с планом масштаба 1:1000. Следовательно, для нанесения точек теодолитного хода их координаты можно округлить до 0,1 м:  $X_6 = 3168,5$  м;  $Y_6 = 5842,3$  м;  $X_7 = 3141,8$  м и  $Y_7 = 5957,6$  м

Точка 6 находится выше координатной линии 3100 на 68,5 м и правее координатной линии 5800 на 42,3 м (рис. 8.9). По сторонам квадрата 3158 необходимо отложить два раза отрезки 68,5 м и сделать наколы иглой измерителя. Диаметр наколотой точки должен быть не более 0,1 мм. Затем по ребру линейки, установленному по наколам, отложить от линии 5800 отрезок 42,3 м. В месте положения точки 6 сделать накол, кружком диаметром 3-4 мм мягким карандашом пометить место накола и подписать номер точки.

Точку 7 наносим по координатам отрезком 41,8 м от линии 3100 и затем по двум наколам отрезком 57,6 м от линии 5900.

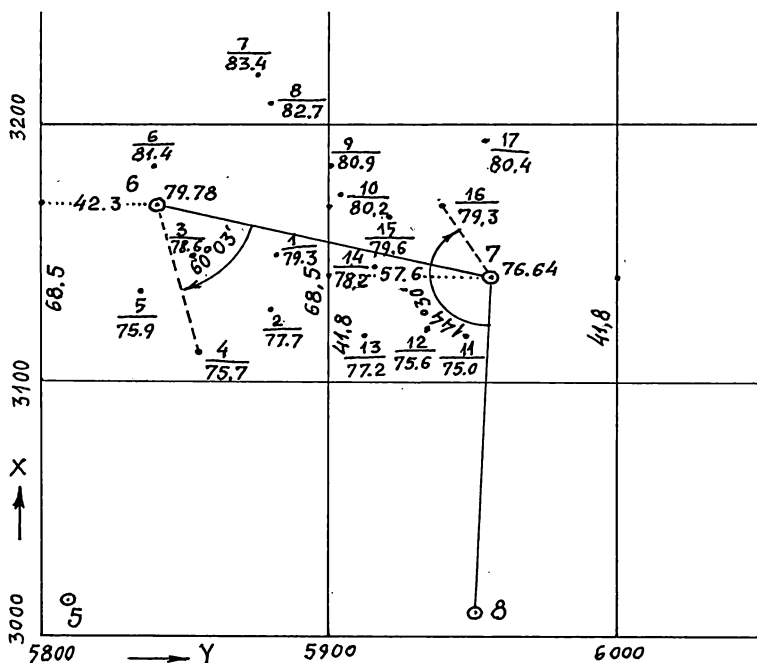


Рис. 8.9. Нанесение на план точек теодолитного хода и точек тахеометрической съемки

После нанесения следующей точки теодолитного хода необходимо проверить качество работ. *Оценочный контроль* нанесения точки выполняют по значению дирекционного угла соответствующей линии съёмочного обоснования. *Точный контроль* осуществляется по величине известного горизонтального проложения соответствующей линии. Измеренное на плане горизонтальное проложение между соседними точками теодолитного хода не должно отличаться от вычисленного его значения более, чем на 0,2 мм в масштабе плана.

### 82.3. Нанесение на план результатов тахеометрической съемки

Пояснения по нанесению точек тахеометрической съемки также даны на рис. 8.9 для станций 6 и 7 (в соответствии с данными табл. 8.2). В работе используется геодезический транспортир (или тахеограф), циркуль-измеритель и миллиметровая линейка.

На станции 6  $0^0$  горизонтального круга (ГК) был ориентирован на точку 7 теодолитного хода (см. журнал и абрис тахеометрической съемки). Горизонтальные углы (полярные углы) от исходного направления 6-7 следует откладывать по часовой стрелке (например, для точки 4  $\text{ГК} = 60^{\circ}03'$ ), горизонтальные проложения с точностью до 0,1 м откладывают с помощью миллиметровой линейки от станции (полюса) 6 по полученным полярным направлениям на съёмочные точки (для точки 4 – 58,3 м). В месте положения

съемочной точки делают накол и рядом подписывают номер точки и ее абсолютную высоту (для точки 4 – 75,7 м). Аналогично наносят остальные точки, снятые с данной станции.

На станции 7 0<sup>0</sup> горизонтального круга ориентирован на точку 8, следовательно горизонтальные углы на съемочные точки, полученные на данной станции, необходимо откладывать по часовой стрелке от линии 7-8 (например, для точки 16  $\text{ГК} = 144^{\circ}30'$ , горизонтальное проложение – 32,0 м, высота – 79,3 м).

#### 82.4. Рисовка рельефа и ситуации

На абрисах тахеометрической съемки (рис. 8.6 и 8.7) стрелками указаны линии однородных скатов (склонов) в сторону понижения рельефа. По указанным однородным скатам можно выполнять интерполирование горизонталей, кратных высоте сечения рельефа.

Принцип интерполирования горизонталей для построения рельефа с высотой сечения 1 м показан на рис. 8.10.

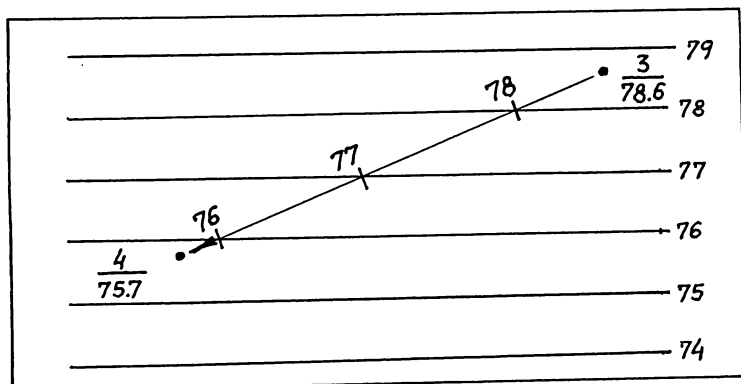


Рис. 8.10. Интерполирование горизонталей

На кальке размером 8 х 10 см следует провести несколько (8 – 10) параллельных и равноотстоящих (через 5 – 7 мм) друг от друга линий (калька с параллельными линиями называется *палеткой*).

Выполним интерполирование горизонталей по линии однородного склона 3-4: точка 3 ( $H_3 = 78,6$  м); точка 4 ( $H_4 = 75,7$  м). На палетке (или мысленно) оцифруем параллельные линии через 1 м, начиная с высоты, например, 74 м. Положим палетку на линию 3-4 и установим точку 4 в положение, соответствующее ее высоте (75,7 м). Затем это положение зафиксируем иглой измерителя и провернем палетку до тех пор, пока точка 3 не станет в положение, соответствующее ее высоте (78,6 м) на шкале высот палетки. Иглой измерителя переколоть на ватман (план) все точки пересечения параллельных линий палетки с линией 3-4 и подписать места уколов соответствующими высотами (подписи горизонталей можно сделать и сокращенными).

Аналогично выполняют интерполирование по другим линиям однородных склонов.

После полного интерполирования, ориентируясь на примерные формы рельефа, указанные на абрисах, выполняют предварительную укладку горизонталей по одноименным высотам. Целесообразно построение рельефа начинать с рисовки его по характерным линиям и четким формам (лощины - по линиям водосливов, хребты – по линиям водоразделов, горы (холмы) и т.п.), а затем переходить к сопряжениям между формами рельефа. Окончательная укладка горизонталей выполняется после полного уяснения рисунка рельефа, при этом производится сглаживание небольших волн в линии горизонталей примерно до  $1/4$  высоты сечения рельефа.

Для построения ситуации следует пользоваться абрисами тахеометрической съемки на станциях, а также записями в журнале тахеометрической съемки. Т.е. необходимо воспроизвести ту ситуацию местности, которая фактически и была объектом съемки.

#### 82.5. Построение на плане ситуации по результатам теодолитной съемки

Для нанесения ситуации следует использовать информацию, приведенную в абрисе теодолитной съемки. Нанесение результатов горизонтальной съемки, выполненной способом полярных координат и перпендикуляров, производится в полном соответствии с результатами измерений, приведенных на абрисах горизонтальной съемки. В некоторых случаях, чаще для способа угловой засечки и полярных координат, производят вычисление координат точек местности и сами точки наносят на план графически с помощью поперечного масштаба. Вычисление координат точек местности выполняют для твердых контуров, например, для точек 7 и 8 (рис. 8.3). Если же контур не твердый, как, например, береговая линия озера или контуры острова (рис. 8.2), то такой контур вполне достаточно построить графически по угловым засечкам и другими графическими способами.

При нанесении результатов горизонтальной съемки на план могут не совпасть положения точек, полученных дополнительно из тахеометрической съемки. Обычно это и происходит, поскольку тахеометрическая съемка для четких контуров предусматривает, в основном, съемку рельефа в данном месте. По точности же определения планового положения точек тахеометрическая съемка уступает горизонтальной.

Топографические планы и карты окончательно оформляется в соответствии с требованиями, изложенными в [46, 47].

## Глава 9 НИВЕЛИРНЫЕ РАБОТЫ

### § 83. Способы и методы нивелирования

Нивелированием называют комплекс геодезических работ, связанных с измерением превышений и высот точек местности. Данные работы проводятся при решении различных инженерно-геодезических задач в строительстве, при высотной съемке местности, а также научно-технических задач при изучении динамических процессов движения земной коры, исследовании разностей уровня воды в морях и океанах, при изучении деформаций инженерных сооружений и др.

Существует несколько основных способов и методов нивелирования: геометрическое, тригонометрическое, гидростатическое, барометрическое, механическое, стереофотограмметрическое.

*Геометрическое нивелирование* выполняют с помощью горизонтального визирного луча, образованного прибором, например, нивелиром (§ 48, 51). Превышение между точками получают как разность отсчетов по рейкам, установленных в этих точках.

При использовании высокоточных нивелиров и соблюдении специальных методик измерений может быть обеспечена точность определения превышений (передачи абсолютных высот) до 0,5 – 0,7 мм на 1 км хода, до 0,05 – 0,10 мм и менее – на коротких базах, т.е. при сравнительно небольших (до 20 м) расстояниях между точками. При техническом нивелировании точность передачи высот составляет 20 – 50 мм на 1 км хода.

Указанный большой диапазон точности измерений (от 0,05 до 50 мм) позволяет применять данный способ практически при решении любых инженерно-геодезических задач по определению превышений и высот точек. Кроме того, способ геометрического нивелирования по исполнению работ сравнительно прост, не требует использования громоздкого оборудования, вычислительные действия могут выполняться непосредственно в поле.

Подробно выполнение работ методом геометрического нивелирования будет рассмотрено ниже в последующих параграфах настоящей главы.

*Тригонометрическое нивелирование* выполняют наклонным визирным лучом (рис. 7.25), образованным, например, оптической системой теодолита (§ 43). Часто такой вид нивелирования используют при создании высотного обоснования теодолитных ходов, при передаче высот через недоступные расстояния, при больших уклонах местности, в горных выработках, когда наблюдаемые точки находятся в кровле выработки, а также в выработках, имеющих значительный уклон.

При соответствующей организации работ погрешность в определении превышения данным способом может достигать 0,1 – 0,3 м на 1 км хода. На небольших базах при использовании точных и высокоточных приборов превышения можно определять с точностью до 1 – 2 мм.

Очевидно, что при использовании нивелирных реек и установке угла наклона визирной оси зрительной трубы  $\nu = 0^\circ$  (при установке на шкале вертикального круга значения места нуля) теодолитом можно реализовать способ геометрического нивелирования.

Следующие виды нивелирования (барометрическое, гидростатическое, радиолокационное) относятся к *физическим* методам нивелирования.

*Барометрическое нивелирование* основано на изменении атмосферного давления с изменением высоты точки местности. Точность этого метода небольшая, от 1 до 5 м, однако часто барометрическое нивелирование применяют геологи при поисковых работах в горной и значительно пересеченной местности, при больших перепадах высот.

Для нивелирования используют барометры-анероиды, в показания которых вводят поправки за влияние внешних условий. Поскольку атмосферное давление в каждой точке изменяется по метеорологическим условиям, то для повышения точности ходы барометрического нивелирования прокладывают замкнутыми (с возвращением к исходной точке), либо разомкнутыми (между точками с известными высотами).

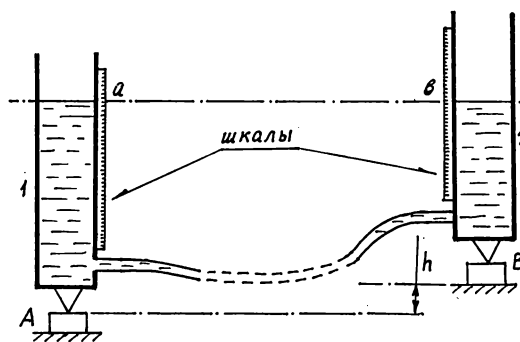


Рис. 9.1. Гидростатическое нивелирование

При *гидростатическом нивелировании* используется свойство жидкостей устанавливаться в сообщающихся сосудах на одном уровне. На измерительных колбах 1 и 2 (рис. 9.1), заполненных жидкостью, имеются одинаковые шкалы, по которым производят отсчеты  $a$  и  $b$  уровня жидкости в точках A и B. Разность отсчетов характеризует превышение:

$$h = a - b \quad (9.1)$$

Погрешности в определении превышений при использовании различных конструкций гидронивелиров могут находиться в пределах от 0,1 до 2 мм. При измерениях с точностью до 1 – 2 мм отсчеты по шкалам берутся визуально. При более точных измерениях уровень жидкости в каждом из сосудов регистрируют электрическим способом с помощью электрического контакта с микрометрическим винтом, закрепленного на сосуде (в этом случае используется токопроводящая жидкость).

Гидростатические нивелиры являются чаще всего стационарными системами и содержат несколько измерительных сосудов, соединенных между собой гибкими шлангами. Такие системы устанавливают на плотинах гидроэлектростанций, в горных выработках при исследовании геомеханических процессов, на прецизионных технологических комплексах. Гидростатическое нивелирование используют при передаче высот через большие водные препятствия. Имеются конструкции гидронивелиров, позволяющие определять взаимное смещение точек на базе 50 м с погрешностью до 5 – 10 мкм.



*Радиолокационное нивелирование* используют при нивелировании земной поверхности с самолета или другого летательного аппарата (*аэроадионивелирование*). Погрешность в определении высот в зависимости от условий съемки достигает 2 – 5 м (до 10 м).

Этот вид нивелирования применяют для построения профиля местности и определения высот фотографирования при аэрофотосъемке. Он основан на непрерывном измерении расстояния с самолета до поверхности земли с помощью излучаемого передатчиком электромагнитного сигнала и приема его после отражения от подстилающей поверхности. Регистрируется время  $\tau$  нахождения сигнала на двойном пути  $s$ , т.е. используется радиодальномер.

*Механическое нивелирование* используют, в основном, для профилирования железнодорожных путей, подкрановых наземных и высотных путей и балок. Специальные приборы позволяют автоматически регистрировать при перемещении по направляющим (рельсам) пройденное расстояние, высоту и профиль пути, а также уклоны. Погрешность в определении превышений составляет от 0,15 до 0,30 м на 1 км пройденного расстояния.

*Стереофотограмметрическое нивелирование* реализуется при обработке стереопар фотоснимков одной и той же местности, полученных как при наземной фототеодолитной съемке, так и при воздушной съемке с летательных аппаратов. При наземной съемке используют фототеодолиты, представляющие собой теодолит, совмещенный с фотоаппаратом. При воздушной съемке применяются специальные аэрофотоаппараты, устанавливаемые на самолете на гиросtabilизированной платформе, позволяющей удерживать оптическую ось фотокамеры в отвесном положении, либо близком к отвесному положению.

Данный вид нивелирования широко применяют при составлении топографических планов и карт по фотоснимкам, при наблюдениях за деформациями, происходящими на инженерных сооружениях, в том числе и в горных выработках, при исследовании поверхностных перемещений земной поверхности в локальных областях (чаще – склоновых процессов сдвижения земной поверхности).

## **§ 84. Способы геометрического нивелирования**

В главе 5, при рассмотрении вопросов проверок нивелиров, говорилось о способах геометрического нивелирования «из середины» и «вперед». Рассмотрим несколько подробнее каждый из этих способов.

*Нивелирование из середины.* Для определения превышения между точками  $A$  и  $B$  нивелир устанавливают посередине между ними (рис. 9.2 а), т.е. обеспечивают равенство плеч  $L_A = L_B$  на станции. Разность отсчетов на заднюю точку  $A$  (3) и переднюю точку  $B$  (II) определяет искомое превышение передней точки над задней, если оцифровка шкал используемых реек возрастает от их основания:

$$h = 3 - II \quad (9.2)$$

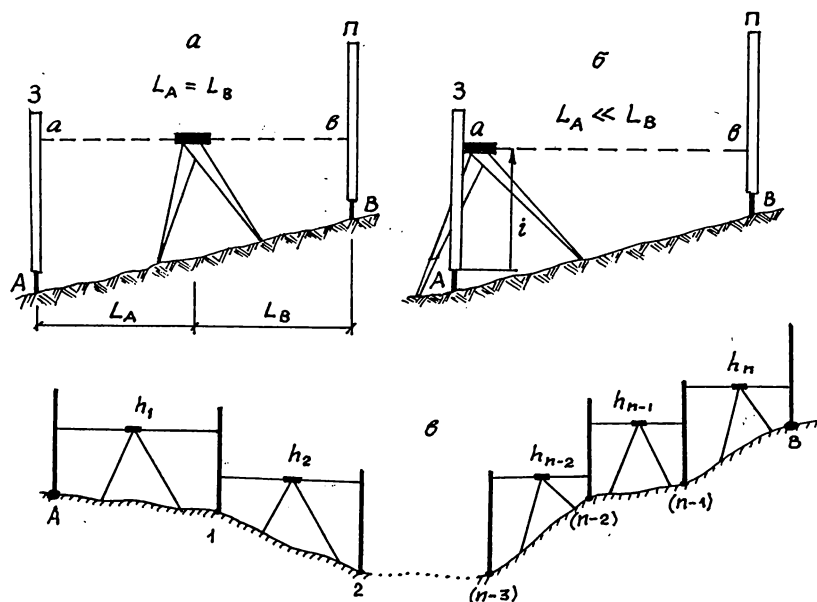


Рис. 9.2. Способы геометрического нивелирования:  
 нивелирование из середины (а); нивелирование вперед (б); последовательное  
 нивелирование (в)

Если известна высота точки  $A$  ( $H_A$ ), то

$$H_B = H_A + h \quad (9.3)$$

При *нивелировании вперед* (рис. 9.2 б) нивелир размещают в точке  $A$ , измеряют его высоту  $i = 3$  и определяют превышение по формуле

$$h = i - \Pi = 3 - \Pi, \quad (9.4)$$

т.е. по той же формуле (9.2), а высоту точки  $B$  – по формуле (9.3).

При нивелировании вперед нивелир может размещаться непосредственно в точке  $A$  (проекция окуляра зрительной трубы совпадает с положением точки  $A$ ), либо вблизи этой точки на расстоянии, позволяющем получить четкое изображение шкалы рейки.

Кроме рассмотренных выше способов геометрического нивелирования существует способ *последовательного* или *сложного* нивелирования, в котором могут быть реализованы как способ нивелирования из середины, так и способ нивелирования вперед (рис. 9.2 в).

Этот способ используется при передаче высот на сравнительно большие расстояния (при трассировании), при нивелировании рек, геофизических профилей, создании высотного обоснования и в других случаях.

Для привязки нивелирного хода геометрического нивелирования значительной длины целесообразно иметь в начале и конце хода нивелирные реперы:  $P_A$  (начальный репер) и  $P_B$  (конечный репер). В этом случае нивелирование можно выполнять в ходе одного направления.

Точки хода, отсчеты на которые по рейке берут на соседних двух станциях, называют *связующими* (точки  $1, 2, \dots, n - 1$ ). Расстояние между связующими точками, имеющими нумерацию, часто определено, например,



## § 85. Основные источники погрешностей геометрического нивелирования

На точность определения превышений влияют многочисленные факторы, среди которых основными являются: влияние кривизны Земли и рефракции атмосферы; невыполнение главного условия нивелира; погрешности отсчетов по шкалам реек; погрешности установки зрительной трубы; погрешности в нанесении делений шкал реек и др.

Рассмотрим влияние указанных погрешностей и факторов на точность нивелирования.

### 1. Влияние кривизны Земли.

На физической поверхности Земли на расстоянии  $L$  находятся точки  $A$  и  $B$ , превышение между которыми равно  $h$  (рис. 9.3).

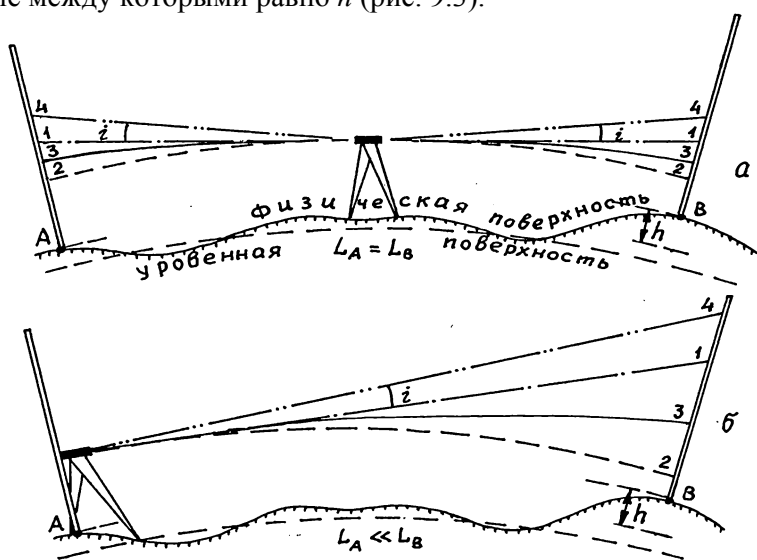


Рис. 9.3. Погрешности нивелирования из-за влияния кривизны Земли, рефракции и невыполнения главного условия нивелира

Установим нивелир точно посередине между точками  $A$  и  $B$  и возьмем отсчеты по рейкам, полагая, что световой луч (1) в направлении визирной оси распространяется в атмосфере прямолинейно. Для правильных отсчетов по рейкам следовало бы потребовать, чтобы световой луч проходил по уровенной поверхности, определяемой высотой прибора, т.е. по пути (2). В этом случае превышение между точками будет соответствовать истинному:

$$h_{ист} = 3_2 - \Pi_2 \quad (9.13)$$

На самом деле мы имеем

$$h_1 = 3_1 - \Pi_1 \quad (9.14)$$

Очевидно, что для симметричной схемы погрешности в отсчетах по рейкам  $\Delta Z_I = Z_I - Z_2$  и  $\Delta P_I = P_I - P_2$ , определяемые влиянием *кривизны Земли*, будут одинаковыми, поскольку  $L_A = L_B$ . Следовательно,

$$h = (Z_2 + \Delta Z_I) - (P_2 + \Delta P_I) = Z_2 - P_2 \quad (9.15)$$

При нивелировании вперед (рис. 9.3 б)  $\Delta Z_I$  значительно меньше  $\Delta P_I$ , в связи с чем погрешность  $\Delta P_I$  полностью входит в значение измеренного превышения.

Таким образом, *при нивелировании из середины влияние кривизны Земли, как систематическая погрешность, исключается в разности отсчетов по рейкам.*

Величина погрешности  $k$  из-за кривизны Земли в отсчете по рейке, находящейся на расстоянии  $L$  от нивелира, может быть оценена по формуле

$$k = \frac{L^2}{2R}, \quad (9.16)$$

где  $R$  – радиус Земли.

Указанная погрешность при нивелировании может быть определена практически с любой точностью с учетом эллиптичности Земли, т.е. с учетом параметров референц-эллипсоида Красовского. Данные вопросы рассматриваются подробно в курсе *высшей геодезии*.

## 2. Влияние рефракции атмосферы.

Визирные лучи (3), проходя в атмосфере через слои воздуха, имеющие разную плотность, искривляются, отклоняясь в сторону земной поверхности. Погрешность в отсчете, вызванная влиянием *рефракции атмосферы*,  $r = (Z_3 - Z_2)$ ,  $r = (P_3 - P_2)$ , может быть оценена по приближенной формуле

$$r = 0,07 \frac{L^2}{R} \quad (9.17)$$

Если условия измерений стабильны для визирных лучей в направлениях  $A$  и  $B$ , то можно полагать, что при симметричной схеме измерений погрешность из-за рефракции атмосферы исключается в разности отсчетов, как и при влиянии кривизны Земли. Часто погрешности  $k$  и  $r$  объединяют и определяют общую погрешность влияния кривизны Земли и рефракции

$$f = 0,43 \frac{L^2}{R} \quad (9.18)$$

Приведем в качестве сравнительных характеристик значения погрешностей  $k$  и  $r$  и суммарной погрешности  $f$  для радиуса Земли  $R = 6371,11$  км и различных расстояний  $L$  от нивелира до рейки (табл. 9.1)

Таблица 9.1

$L$	10	50	100	200	300	400	500	1000
$k$	0,0078	0,196	0,785	3,14	7,06	12,56	19,62	78,45
$r$	0,0011	0,027	0,110	0,44	0,99	1,76	2,75	10,99
$f$	0,0067	0,169	0,675	2,70	6,07	10,80	16,87	67,49

Как видно из этой таблицы, уже при расстояниях 100 м погрешность из-за влияния кривизны Земли составляет почти 1 мм. Погрешность из-за

влияния рефракции атмосферы имеет знак, обратный знаку погрешности из-за кривизны Земли, в связи с чем общая погрешность отклонения отсчета от истинного меньше, чем  $k$ .

При нивелировании из середины (при симметричной схеме)  $r_3 = r_{II}$ , т.е. исключаются из значения полученного превышения, а при нивелировании вперед  $r_3$  значительно меньше  $r_{II}$ , что приводит к погрешности в определении превышения.

Таким образом, *при нивелировании из середины влияние рефракции атмосферы, как систематическая погрешность, значительно ослабляется и во многих случаях исключается в разности отсчетов по рейкам.*

### 3. Невыполнение главного условия нивелира.

Если в нивелире не выполняется главное условие, т.е. после установки нивелира в рабочее положение визирный луч (4) занимает не горизонтальное положение, а отклонен от него на угол  $i$ , то отсчеты по рейкам будут равны  $З_4$  и  $П_4$ . Разность отсчетов  $(З_4 - З_I)$  и  $(П_4 - П_I)$  характеризуют погрешность из-за невыполнения главного условия нивелира. Ее величина может быть оценена по формуле

$$u = i \frac{L}{\rho}, \quad (9.19)$$

где  $\rho = 206265''$ .

При нивелировании из середины, при использовании симметричной схемы измерений, погрешности в отсчетах по рейкам из-за невыполнения главного условия нивелира будут одинаковыми и исключаются в разности отсчетов. При нивелировании вперед превышение будет содержать систематическую погрешность, если визирная ось зрительной трубы не будет при измерениях совпадать с горизонтальной плоскостью.

Таким образом, *при нивелировании из середины остаточным невыполнением главного условия нивелира можно пренебречь.*

Вообще говоря, при любом неравенстве плеч на станции, если остаточная погрешность в превышении будет больше установленного допуска, схему измерений следует характеризовать как нивелирование вперед.

Рассмотрим пример оценки влияния погрешностей  $k$ ,  $r$  и  $u$  на результат измерения превышения.

**Пример 9.1.** Оценка влияния кривизны Земли, рефракции атмосферы и невыполнения главного условия нивелира на результаты измерения превышений при разных плечах на станции.

Исходные данные. Предположим, что точки  $A$  и  $B$  находятся на расстоянии 100 м друг от друга. Неравенство плеч на станции равно 20 м ( $L_A = 40$  м;  $L_B = 60$  м). Угол  $i = 10''$ . Заданная точность определения превышения  $m_h = 1$  мм. Требуется оценить возможность обеспечения указанной точности измерений при данном неравенстве плеч.

**Решение.**

По формуле (9.16)

$$\Delta_k = k_B - k_A = \frac{L_B^2 - L_A^2}{2R} = 0,16 \text{ мм}$$

По формуле (9.17)

$$\Delta_r = r_B - r_A = 0,07 \frac{L_B^2 - L_A^2}{R} = 0,02 \text{ мм}$$

По формуле (9.19)

$$\Delta_u = u_B - u_A = \frac{i}{\rho} (L_B - L_A) = 0,97 \text{ мм}$$

Как следует из результатов оценки, при разности плеч в 20 м практически можно пренебречь влиянием рефракции атмосферы, влияние кривизны Земли можно считать пренебрегаемо малым, а вот невыполнение главного условия нивелира вызывает погрешность того же порядка, что и заданная точность измерения превышения.

В таких случаях необходимо оценить допустимую величину разности плеч на станции, при которой погрешность из-за невыполнения главного условия составляла бы 1:3 ... 1:5 от заданной (допустимой) погрешности измерений, т.е. была бы пренебрегаемо малой. Примем  $\Delta_u = 0,2 m_h = 0,2 \text{ мм}$ . Тогда

$$\Delta L_{\text{доп}} = (L_B - L_A) = \Delta_u \frac{\rho}{i} \approx 4 \text{ м}$$

Очевидно, что при такой разности плеч погрешности из-за влияния кривизны Земли и рефракции атмосферы практически будут равны нулю.

#### 4. Погрешность установки зрительной трубы.

Погрешность обусловлена неточностью установки пузырька цилиндрического уровня в нульпункте, а также недостаточной чувствительностью уровня к малым перемещениям трубы элевационным винтом.

Принимая погрешность установки пузырька уровня  $m_\tau = 2''$  (для контактных уровней), расстояние от нивелира до реек  $L = 100 \text{ м}$ , определим значение вероятной погрешности в отсчете

$$\Delta_\tau = \frac{m_\tau}{\rho} L = 0,96 \text{ мм} \quad (9.20)$$

Для превышения, определяемого разностью отсчетов,  $\Delta_{h(\tau)} = \sqrt{2} \cdot 0,96 \text{ мм} = 1,35 \text{ мм}$ .

#### 5. Погрешность отсчета по рейке - $m_{mp}$ .

Указанная погрешность определяется недостаточной разрешающей способностью зрительной трубы нивелира:

$$m_{mp} \cong \frac{60'' L}{\rho \Gamma^x}, \quad (9.21)$$

где  $\Gamma^x$  – увеличение зрительной трубы. Предположим, что для тех же условий измерений  $\Gamma^x = 25^x$ . Тогда  $m_{mp} = 1,16 \text{ мм}$ , а для превышения  $\Delta_{h(mp)} = \sqrt{2} \cdot 1,16 \text{ мм} = 1,64 \text{ мм}$ .

#### 6. Погрешность в отсчете из-за наклона рейки.

Очевидно, что чем больше наклон рейки, тем больше будет и погрешность отсчета. Предположим, что рейка отклонилась от вертикального положения на угол  $\alpha$  (рис. 9.4). Визирный луч находится на высоте  $a_o$ , соответствующей вертикальному положению рейки. Из-за наклона по рейке читается отсчет  $a$ . Погрешность из-за наклона рейки может быть получена по формуле

$$\Delta_H = a_o \left( \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2}} - 1 \right), \quad (9.22)$$

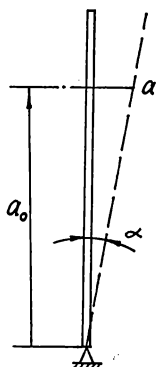


Рис. 9.4. Влияние наклона рейки на точность отсчета

а превышение – по формуле

$$\Delta_{hH} = \sqrt{2}a_o \left( \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2}} - 1 \right), \quad (9.23)$$

Предположим, что  $\alpha = 1^\circ$  ( $\rho = 57,3^\circ$ ),  $a_o = 2000$  мм. Тогда  $\Delta_{hH} = 0,43$  мм.

Для частичного устранения погрешности, возникающей из-за наклона рейки, при техническом нивелировании и нивелировании средней точности при больших отсчетах по рейке речник выполняет качание рейкой в направлении наблюдателя с переходом через вертикальное положение. Наблюдатель при этом фиксирует минимальный отсчет. При точном и высокоточном нивелировании используют нивелирные рейки, снабженные круглым или цилиндрическим уровнем. В этом случае речник удерживает рейку

или закрепляет ее в вертикальном положении по показанию уровня.

#### 7. Погрешность в дециметровых делениях рейки - $\Delta_\theta$ .

Используемые при техническом нивелировании нивелирные рейки могут иметь погрешности в дециметровых делениях шкал до 0,7 мм, что допускается технической инструкцией. Для превышения, определяемого по различным дециметровым диапазонам, погрешность может составить  $\Delta_{\theta} = 0,99$  мм.

#### 8. Погрешность округления отсчета.

Эта погрешность оценивается как 0,1 часть наименьшего деления рейки. Т.е., если используется рейка с сантиметровыми делениями, то погрешность округления составит 1 мм, а для измеренного превышения  $\Delta_{ho} = 1,41$  мм.

Таким образом, ориентируясь на указанные основные погрешности 4 - 8, оценим вероятную погрешность определения превышения на станции при плечах, равных 100 м (расстояние между точками – 200 м):

$$m_h = \sqrt{\Delta_{ht}^2 + \Delta_{h(np)}^2 + \Delta_{hH}^2 + \Delta_{ho}^2 + \Delta_{\theta}^2} \approx 3 \text{ мм}.$$

## § 86. Техническое нивелирование

С помощью технического нивелирования определяют высоты пунктов съемочного обоснования, нивелируют профили для линейных сооружений, геофизические профили, поверхности местности сравнительно большой площади.

Ходы геометрического нивелирования прокладывают между двумя исходными реперами в виде одиночных ходов (рис. 9.5 а), между тремя и более исходными реперами в виде разветвленных систем нивелирных ходов с одной (рис. 9.5 б) или несколькими (рис. 9.5 в) узловыми точками. Замкнутые нивелирные ходы, опирающиеся только на один исходный репер прокладывают только в исключительных случаях.



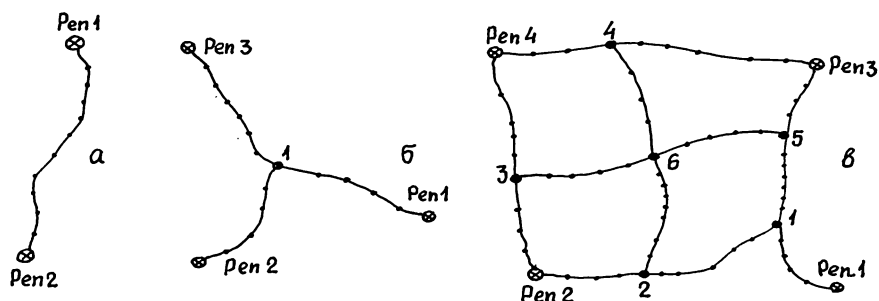


Рис. 9.5. Виды ходов геометрического нивелирования

Допустимые длины ходов высотного обоснования определяются как высотой сечения рельефа, заданной для топографической съемки, так и характеристиками самих ходов (табл. 9.2).

Таблица 9.2

Характеристика хода	Допустимая длина хода (км) при высоте сечения рельефа (м)		
	0,25 м	0,50 м	1,00 м
Между двумя исходными пунктами	2	8	16
Между исходным пунктом и узловой точкой	1,5	6	12
Между двумя узловыми точками	1	4	8

Техническое нивелирование выполняется также при инженерных изысканиях для проектирования строительства с целью получения информации о рельефе местности. При проектировании различных линейных сооружений (дорог, трубопроводов, ЛЭП, каналов и т.п.) техническое нивелирование называется *продольным* или *нивелированием трассы*. Часто при проектировании строительства производят техническое *нивелирование площади по квадратам*, либо другим методом.

Для производства технического нивелирования используют нивелиры типа Н10 (§ 46) с увеличением зрительной трубы не менее  $20\times$  и ценой деления уровня при зрительной трубе не более 45" на 2 мм, либо аналогичные нивелиры с самоустанавливающейся линией визирования (с компенсатором) типа Н10К. Применяются одно- или двусторонние деревянные складные рейки с ценой деления 1 или 2 см, а также металлические телескопические рейки с делениями 1 см и такие же двухсторонние рейки с миллиметровыми и сантиметровыми делениями.

Расстояние от нивелира до рейки (плечо) на станции не должно превышать 150 м. Его определяют по нитяному дальномеру зрительной трубы. Следует придерживаться равноточности в результатах измерений, т.е., по возможности, обеспечивать примерно равные плечи на всех станциях.

Порядок работы на станции при техническом нивелировании при использовании двусторонних нивелирных реек следующий:

- отсчеты по черной и красной сторонам задней рейки;
- отсчеты по черной и красной сторонам передней рейки.

Превышения, определенные по черным и красным сторонам реек не должны отличаться более, чем на 5 мм. Колебания нуля красной пятки реек (разности красного и черного отсчетов по рейке, установленной в данной точке) в нивелирном ходе не должны превышать также 5 мм.

Если рейки, используемые при нивелировании, односторонние, то порядок работы на станции другой:

- отсчет по задней рейке;
- отсчет по передней рейке;
- переустановка нивелира на станции (изменение примерно на 10 см горизонта прибора);
- отсчет по передней рейке;
- отсчет по задней рейке.

Разность в превышениях, полученных при двух горизонтах прибора не должна быть более 5 мм.

Весьма важным при выполнении работ является обеспечение контроля взятия отсчетов и величины измеренного превышения. Для этого и применяют двусторонние рейки, разности красного и черного отсчетов по которым должна быть постоянной в пределах указанного выше допуска в 5 мм. Контрольным измерением является повторение указанных разностей при другом горизонте прибора. Часто выполняют перестановку рейки дополнительно на сторожок, обозначающий данную точку. При этом разность отсчетов на точку и сторожок должна быть одинаковой при нивелировании с двух соседних станций.

Общая оценка точности хода геометрического нивелирования выполняется по формулам (9.9), (9.10) и (9.11). Если полученная практическая невязка хода не превышает допустимой величины, то ее распределяют поровну на все превышения хода в виде поправок  $v_i$  со знаком, обратным знаку невязки:

$$v_i = -\frac{f_h}{n}, \quad (9.24)$$

где  $n$  – число станций (превышений) в ходе. При этом  $\sum v_i = -f_h$ , т.е. вся невязка должна быть распределена на поправки. Полученные поправки вводят в измеренные превышения и вычисляют высоты *связующих точек* хода.

При производстве технического нивелирования попутно определяют высоты характерных точек рельефа местности, урезов воды в реках и водоемах, а также высоты устойчивых по высоте объектов (крышек колодцев, валунов, головок рельсов и т.п.). Указанные точки являются промежуточными, на местности они, по возможности, маркируются, и на них составляют абрис с привязкой промерами до ближайших объектов ситуации или ориентиров.

## § 87. Трассирование

Под трассированием (нивелированием трассы) понимают комплекс геодезических работ по выбору, проложению, ориентированию и закреплению на местности осевой линии (трассы) линейного сооружения.

Трассирование начинают на топографической карте или плане (камеральное трассирование) с учетом характеристик проектируемого объекта, а также других условий, определяемых решением той или иной инженерной задачи, после чего продолжают на местности (полевое трассирование).

Камеральное трассирование имеет своей целью выбор места расположения оси проектируемого линейного сооружения с учетом характера местности и требований к сооружению технического и экономического характера. К ним относятся: соблюдение предельных (для дорог) или минимальных (для каналов, водоводов и т.п.) уклонов, обеспечения минимального объема земляных работ, обеспечение примерного баланса объемов выемок и насыпей и др.

Исходными данными для непосредственного полевого трассирования является плановое и высотное положение начальной точки трассы, а также начальное направление трассы (дирекционный угол, истинный или магнитный азимуты). Полевое трассирование включает в себя следующие работы:

- вынос трассы в натуру (вынос начальной точки и начального направления);
- разбивка пикетажа (с учетом характеристик линейного сооружения и задач трассирования);
- нивелирование трассы.

После камеральной обработки результатов нивелирования и построения профиля по данному направлению он передается для дальнейшего использования заказчику работ.

*Вынос трассы в натуру* выполняют известными способами (гл. 10) привязкой к пунктам геодезического обоснования или привязкой к местным предметам. Углы поворота трассы, если они имеются, измеряют теодолитом одним полным приемом. С помощью теодолита выполняют и провешивание линий. Расстояния измеряют мерной лентой, рулеткой или светодальномером с относительной погрешностью 1:1000 – 1:2000. В некоторых случаях, при отсутствии топографических карт или планов, трассирование выполняют непосредственно на местности, исходя из условий решения той или иной задачи.

Ориентирование оси трассы выполняют в румбовой или круговой системе, в некоторых случаях ориентирование производят по магнитному азимуту.

*Разбивка пикетажа.* Пикет – это деревянный колышек сечением 3 x 3 или 4 x 4 см длиной 10-15 см, забиваемый в землю вровень с поверхностью (верх колышка должен выступать над поверхностью земли на 1-2 см). Рядом с пикетом устанавливают сторожок (маяк), возвышающийся на 20-50 см над поверхностью земли колышек, на котором записывают номер соответствующего пикета. Пикеты устанавливают друг от друга на одинаковом расстоя-

нии в горизонтальной плоскости (на одинаковом горизонтальном проложении). Чаще всего через 100 или 50 м. Если расстояния между пикетами 50 м, то пикеты обозначают следующим образом: ПК00, ПК05, ПК10, ... , ПК55, ПК60, ... . При расстояниях между пикетами в 100 м – ПК0, ПК1, ПК2, ... , ПК23, ... . При разбивке пикетажа учитывают углы наклона отрезков линий для приведения наклонных расстояний к горизонту.

Колышками помечают также точки перегибов рельефа. Такие точки называют *плюсовыми*, а их номером является горизонтальное проложение от ближайшего заднего по ходу пикета. Например, плюсовая точка ПК7+83 находится на расстоянии 83 м от пикета 7, т.е. на расстоянии 783 м от начала трассы (от ПК0). Плюсовыми точками являются все *углы поворота трассы*, точки *поперечных профилей*, в том числе и точек пересечения продольного и поперечного профилей, точки перегибов рельефа, а также ими могут быть точки пересечения трассы с контурами ситуации и линейными сооружениями (объектами).

Одновременно с разбивкой пикетажа производится инструментальная съемка местности в полосе шириной 20-30 м и до 50 м с каждой стороны от оси трассы. Съемка производится в основном *способом перпендикуляров*, иногда *линейными и угловыми засечками*. Для некоторых заданий по трассированию съемка местности не производится.

При дорожном строительстве, выполняют разбивку главных точек кривой на трассе : *начало кривой (НК)*, *конец кривой (КК)* и *угол поворота(УП)*. Выполняют вычисления элементов кривой (§ 88) и пикет за кривой переносят вперед на величину *домера (Д)*.

По результатам инструментальной съемки местности ведут т.н. пикетажный журнал, в который заносят результаты измерений на каждом интервале, определяемом двумя соседними пикетами.

*Нивелирование по пикетажу*. Привязка трассы в ее начале и конце производится к реперам имеющейся нивелирной сети, либо другим точкам, высоты которых известны с необходимой точностью.

При нивелировании трассы связующими точками обязательно являются все пикеты и *иксовые* точки. Превышения связующих точек определяют дважды (по двум сторонам нивелирных реек, либо при двух горизонтах прибора). В некоторых случаях допускается нивелировать способом из середины с плечом 100 м, т.е. устанавливать нивелир практически на одном из пикетов, а нивелирование из середины выполнять по двум другим соседним пикетам. Плюсовые точки являются *промежуточными*, и на них берут только один (промежуточный) отсчет по черной стороне рейки (либо при одном горизонте прибора). Рейку при этом ставят на землю у сторожка плюсовой точки. В некоторых случаях плюсовую точку делают связующей. В этом случае на ее месте забивают колышек, как и на пикете, и рейку ставят на этот колышек.

Расстояния до иксовых точек не измеряют, поскольку иксовые точки служат только для передачи высот между связующими точками.

Точки поперечных профилей нивелируют так же, как и плюсовые промежуточные точки. Если со станции не обеспечивается видимость рейки в точке поперечного профиля, то превышение на нее передают с помощью иксовой точки.

## § 88. Расчет и разбивка главных точек кривых на трассе

На рис. 9.6 представлена схема, поясняющая расчет главных элементов кривой и построение главных точек кривой на трассе.

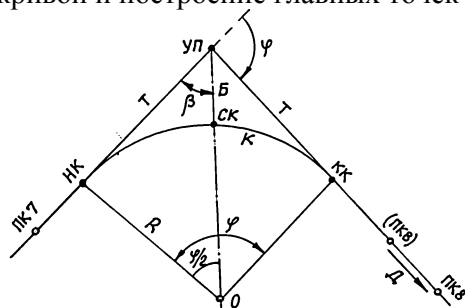


Рис. 9.6. Расчет главных элементов кривой  
значения *тангенса*

$$T = R \times \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad (9.25)$$

*биссектрисы*

$$B = R \left( \sec \frac{\varphi}{2} - 1 \right), \quad (9.26)$$

*длины кривой*

$$K = R \frac{\pi \times \varphi}{180^\circ} \quad (9.27)$$

*и величину домера*

$$D = 2T - K. \quad (9.28)$$

Кроме этого, для построения главных точек кривой вычисляют значения НК (*начала кривой*) и КК (*конца кривой*):

$$НК = УП - T; \quad КК = УП + T, \quad (9.29)$$

где УП – пикетажное значение угла поворота.

Разбивку главных элементов кривых, а также и *детальную разбивку кривых*, производят у вершин углов поворота.

От угла поворота в направлении младшего и старшего пикетов (по тангенсам) откладывают значения начала и конца кривой. В вершине угла поворота теодолитом откладывают угол  $\beta = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$  и в полученном направлении откладывают значение биссектрисы кривой. Получают точку *середины кривой* (СК). Далее старший пикет переносят вперед на величину домера.

**Пример 9.2.** Расчет главных элементов кривой.

Исходные данные:  $R = 500$  м ;  $\varphi = 30^\circ$  ; УП = ПК5 + 40.

**Решение.**

$T = 500 \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = 133,97 \text{ м}$ ;  $B = 500 \cdot (\sec 15^\circ - 1) = 17,64 \text{ м}$ ;  
 $K = (500 \cdot 3,1416 \cdot 30^\circ) : 180^\circ = 261,80 \text{ м}$ ;  $D = 2 \cdot 133,97 - 261,80 = 6,14 \text{ м}$ ;  
 $HK = \text{ПК}5 + 40 - 133,97 = 540,00 - 133,97 = 406,03 \text{ м} = \text{ПК}4 + 6,03$ ;  
 $KK = \text{ПК}5 + 40 + 133,97 = 540,00 + 133,97 = 673,97 \text{ м} = \text{ПК}6 + 73,97 \text{ м}$ .  
 Контроль:  $HK + K = KK - D : (406,03 + 261,80 = 667,83 = 673,97 - 6,14 = 667,83 \text{ м})$ .

## § 89. Нивелирование поперечных профилей

Разбивку поперечных профилей трассы выполняют перпендикулярно к ее оси и производят в тех случаях, когда поперечный скат местности более 1:5. Точка пересечения поперечного профиля с продольным может совпадать со связующей точкой, либо быть плюсовой точкой (с пикетажным наименованием). Характерные точки поперечного профиля (точки перегибов рельефа) определяют вправо и влево от оси трассы соответствующим расстоянием (рис. 9.7). На их месте устанавливают сторожок. На плюсовую точку берут по рейке только черный отсчет.

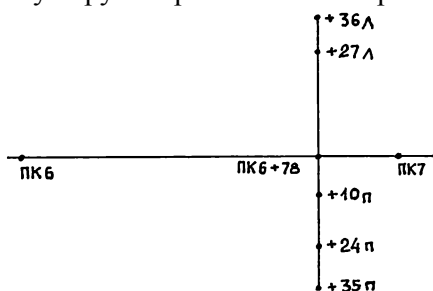


Рис. 9.7. Поперечный профиль

Если рельеф местности в поперечном направлении к оси трассы сложный, то на соответствующих точках поперечного профиля выполняют разбивку и нивелирование дополнительных поперечных профилей (поперечных профилей второго порядка). Чаще всего поперечные профили строят перпендикулярно к оси трассы, однако в некоторых слу-

чаях он может располагаться и под углом к ней. Этот угол измеряют теодолитом одним приемом, либо с помощью нивелира, имеющего лимб горизонтального круга.

## § 90. Обработка результатов нивелирования трассы

На рис. 9.8 показана схема нивелирования трассы, а в табл. 9.3 — соответствующий данной схеме пример записей и обработки результатов измерений.

Привязка трассы выполнена к реперам *A* и *B* (на рисунке трасса показана не полностью). На станции 1 задней точкой является *РенА*, передней — ПК0. Отсчеты на *РенА*: черный — 1320, красный — 6105; на ПК0 отсчеты: черный — 1861, красный — 6648 (см. табл. 9.3). Контрольные разности,  $(6105 - 1320) = 4785$  и  $(6648 - 1861) = 4787$ , должны находиться в допустимых пределах (допускается расхождение до 5 мм относительно красного нуля рейки, в данном случае использованы рейки с красным нулем 4786).

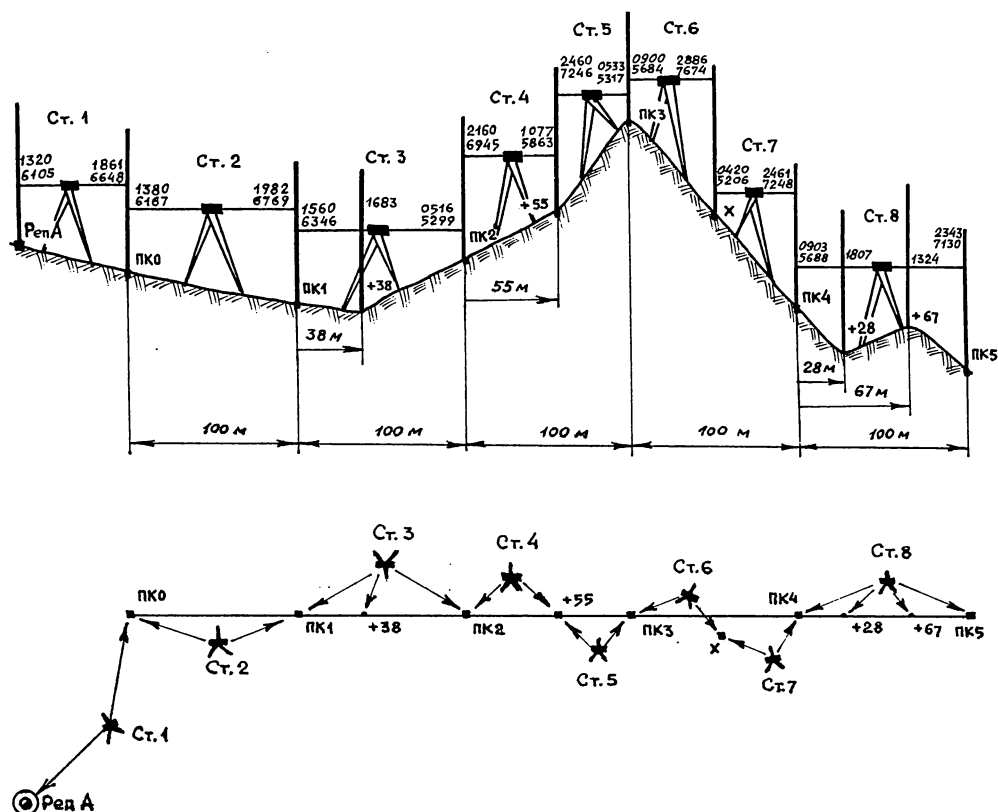


Рис. 9.8. Схема нивелирного хода

Таблица 9.3

Пример 9.3. Журнал геометрического нивелирования

№№ стан-ций	№№ точек	Отсчеты			Превышения		Горизонт прибора	Высоты точек	№№ точек
		задний	передний	промежуточный	черное красное	среднее исправленное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	РедА	1320	1861		-0541	-0542		<b>132,648</b>	РедА
	ПК0	6105	6648		-0543	+3		132,109	ПК0
		4785	4787			<b>-0539</b>			
2	ПК0	1380	1982		-0602	-0602			
	ПК1	6167	6769		-0602	+3		131,510	ПК1
		4787	4787			<b>-0599</b>			
3	ПК1	1560	0516		+1044	+1046	133,070		
	ПК2	6346	5299		+1047	+2		132,558	ПК2
	ПК1+38	4786	4783	1683		<b>+1048</b>		313,387	ПК1+38
4	ПК2	2160	1077		+1083	+1082			
	ПК2+55	6945	5863		+1082	+3		133,643	ПК2+55
		4785	4786			<b>+1085</b>			

5	ПК2+55	2460	0533		+1927	+1928			
	ПК3	7246	5317		+1929	+3		135,574	ПК3
		4786	4784			<b>+1931</b>			
6	ПК3	0900	2886		-1986	-1988			
	X <sub>1</sub>	5684	7674		-1990	+2		133,588	X <sub>1</sub>
		4784	4788			<b>-1986</b>			
7	X <sub>1</sub>	0420	2461		-2041	-2042			
	ПК4	5206	7248		-2042	+3		131,549	ПК4
		4786	4787			<b>-2039</b>			
8	ПК4	0903	2343		-1440	-1441	132,452		
	ПК5	5688	7130		-1442	+3		130,111	ПК5
	ПК4+28	4785	4787	1807		<b>-1438</b>		130,645	ПК4+28
	ПК4+67			1324				131,128	ПК4+67
9	ПК5	1826	2431		-0605	-0606	131,937		
	ПК6	6612	7219		-0607	+2		129,507	ПК6
	ПК5+40	4786	4788	2073		<b>-0604</b>		129,864	ПК5+40
	(УП)								(УП)
10	ПК6	1621	1571		+0050	+0050	131,128		
	ПК7	6406	6357		+0049	+3		129,560	ПК6
	ПК6+78	4785	4786	2076		<b>+0053</b>		129,052	ПК6+78
	Поперечный профиль на ПК6+78								
	+10 п			1356				129,772	+10 п
	+24 п			0943				130,185	+24 п
	+35 п			0521				130,607	+35 п
	+27 л			1895				129,233	+27 л
	+36 л			1633				129,495	+36 л
11	ПК7	2763	0756		+2007	+2006			
	ПК8	7548	5543		+2005	+3		131,569	ПК8
		4785	4787			<b>+2009</b>			
12	ПК8	1305	1727		-0422	-0423			
	PenB	6091	6515		-0424	+3		<b>131,149</b>	PenB
		4786	4788			<b>-0420</b>			

$$a = 94662 \quad e = 97726 \quad c = -3064 \quad \sum h_{cp} = -1532$$

$$H_{PenA} = 132,648 \text{ м}; \quad H_{PenB} = 131,149 \text{ м} \quad f_h = -33 \text{ мм} \quad f_{h \text{ доп}} = \pm 51 \text{ мм}$$

Превышения на станции 1 вычисляют дважды, по черным и красным отсчетам:  $h_y = 1320 - 1861 = -0541$  мм;  $h_k = 6105 - 6648 = -0543$  мм. Разность полученных превышений не должна превышать 5 мм. Среднее превышение равно (-0542) мм. Значения средних превышений округляют до 1 мм.

Аналогично производят обработку результатов измерений на других станциях.

На станциях 3, 8, 9 и 10 дополнительно взяли промежуточные отсчеты на плюсовые точки ПК1+38, ПК4+28, ПК4+67, ПК5+40(УП), ПК6+78. Плюсовая точка ПК5+40 является углом поворота трассы, а плюсовая точка ПК6+78



является точкой пересечения с трассой поперечного профиля, по точкам которого влево и вправо от направления трассирования (хода) взяты промежуточные отсчеты по черной стороне рейки. Плюсовая точка ПК2+55 выбрана в качестве связующей точки, т.е. на нее, как и на пикеты, взяты отсчеты по черной и красной сторонам реек на двух соседних станциях, 4 и 5. Между пикетами ПК3 и ПК4 выбрана *иксовая точка*, поскольку с одной установки нивелира превышение между указанными пикетами определить невозможно из-за значительного превышения между ними.

*Порядок обработки журнала геометрического нивелирования трассы* после выполнения полевых работ следующий.

*Постраничный контроль* (пп. 1 – 4) – выполняется на каждой странице полевого журнала.

1. Вычисляют суммы отсчетов по черным и красным сторонам задней и передней реек:  $a = 94662$ ;  $b = 97726$ .

2. Вычисляют алгебраическую сумму превышений, полученных по черным и красным отсчетам:  $c = -3064$ .

3. Вычисляют сумму средних превышений:  $\sum h_{cp} = -1532$  мм.

4. Контролируют полученные результаты:

$$a - b = c \rightarrow 94662 - 97726 = -3064$$

$$\sum h_{cp} = 0,5c \rightarrow 0,5 (-3064) = -1532 \text{ мм.}$$

Последнее равенство может не выполняться на 2 мм.

5. Вычисляют невязку хода в превышениях по формуле

$$f_h = \sum h_{CP} - h_{TEOP}, \quad (9.30)$$

где

$$h_{TEOP} = H_{PenB} - H_{PenA}, \quad (9.31)$$

т.е. разности абсолютных высот конечного и начального реперов трассы.

$$h_{TEOP} = 131,149 - 132,648 = -1,499 \text{ м} = -1499 \text{ мм.}$$

$$f_h = -1532 - (-1499) = -33 \text{ мм.}$$

6. Вычисляют допустимую невязку хода по формуле

$$f_{доп} = \pm 50 \text{ мм} \sqrt{L(\text{км})}, \quad (9.32)$$

где  $L$  – длина хода между исходными реперами в км.

В примере длина хода определяется числом пикетов (8 пикетов - 800 м). Кроме того, привязка хода в начале и в конце трассы увеличивает длину хода. Предположим, что расстояние от *PenA* до ПК0 равно 127 м, а расстояние от ПК8 до *PenB* равно 106 м. Тогда общая длина хода составит  $800 \text{ м} + 127 \text{ м} + 106 \text{ м} = 1033 \text{ м} = 1,033 \text{ км}$ . В этом случае допустимая невязка хода составит  $f_{доп} = \pm 50 \text{ мм} \sqrt{1,033} = \pm 51 \text{ мм}$ .

Должно выполняться условие (9.11). В примере оно выполнено.

7. По формуле (9.24) вычисляют поправки в средние превышения хода. Поправки следует округлить до 1 мм, но при этом сумма поправок должна быть равна невязке хода с обратным знаком. В примере величины поправок равны  $v_h = -(-33 \text{ мм})/12 = +2,75 \text{ мм}$ . В этом случае в 9 средних превышений следует ввести поправки по +3 мм и в 3 средних превышения по +2 мм,

распределив последние равномерно по ходу. Посмотрите как это выполнено в журнале (поправки в столбце 7 подписаны под средними превышениями).

8. Алгебраическим сложением выполняют исправление средних превышений

$$h_{ИСПР} = h_{ВЫР_{\text{ср}}} + v_{hi} \quad (9.33)$$

В журнале значения исправленных превышений в столбце 7 записаны курсивом жирным шрифтом.

Контролем исправления превышений является выполнение условия

$$\sum h_{ИСПР} = h_{ТЕОР} \quad (9.34)$$

9. Последовательно по ходу вычисляют высоты связующих точек:

$$\begin{aligned} H_{ПК0} &= H_{PenA} + h_{ПК0 ИСПР} \\ H_{ПК1} &= H_{ПК0} + h_{ПК1 ИСПР} \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Контролем вычислений является получение высоты конечного репера, которая должна получиться точно равной исходной величине:

$$H_{PenB} = H_{ПК8} + h_{PenB ИСПР} = H_{PenB ИСХ} \quad (9.35)$$

10. Вычисляют высоты промежуточных (плюсовых) точек, в том числе и точек поперечного профиля.

Значения высот промежуточных точек определяют через горизонт прибора  $ГП$ , который обычно определяют по заднему на станции пикету или задней связующей точке по формуле

$$ГП = H_{СВ.ЗАДН} + a_{СВ.ЗАДН}, \quad (9.36)$$

где  $a_{СВ.ЗАДН}$  – черный отсчет на заднюю связующую точку на данной станции.

Высоту промежуточной точки определяют по формуле

$$H_{+} = ГП - c_{+}, \quad (9.37)$$

где  $c_{+}$  – отсчет (черный) на плюсовую точку на той же станции.

Например, на станции 3 задней точкой является ПК1, черный отсчет на него – 1560, промежуточный отсчет на плюсовую точку ПК1+38 – 1683, высота ПК1 – 131,510 м. Исходя из приведенных данных, горизонт прибора на станции 3 равен  $ГП_3 = 131,510 + 1,560 = 133,070$  м, а высота плюсовой точки  $H_{ПК1+38} = 133,070 - 1,683 = 131,387$  м.

Если на станции несколько плюсовых точек, например, станции 8 и 10, то высоты всех плюсовых точек определяют через один и тот же горизонт прибора данной станции.

## § 91. Построение профиля трассы

Профиль геометрического нивелирования строят обычно на миллиметровой бумаге. Горизонтальный и вертикальный масштабы профиля устанавливают, исходя из технического задания. При этом горизонтальный масштаб выбирают из ряда масштабов с основанием 1, 2, 5, например, 1:500, 1:2000, 1:1000 и т.п., а вертикальный масштаб (масштаб высот) делают в 10 раз крупнее. Однако допускается выбор и другого вертикального масштаба с основаниями, указанными выше.

Построение профиля начинают с заполнения его сетки (рис. 9.9), основное содержание которой определяется результатами геометрического

нивелирования: пикеты, расстояния, отметки земли по оси трассы, уклоны проектной линии, проектные отметки по оси трассы (красные отметки), расстояния, план прямых и кривых. Для решения различных геодезических и инженерно-геодезических задач сетка профиля может быть надстроена и другим содержанием. Например, в верхней части сетки часто помещают план трассы и др.

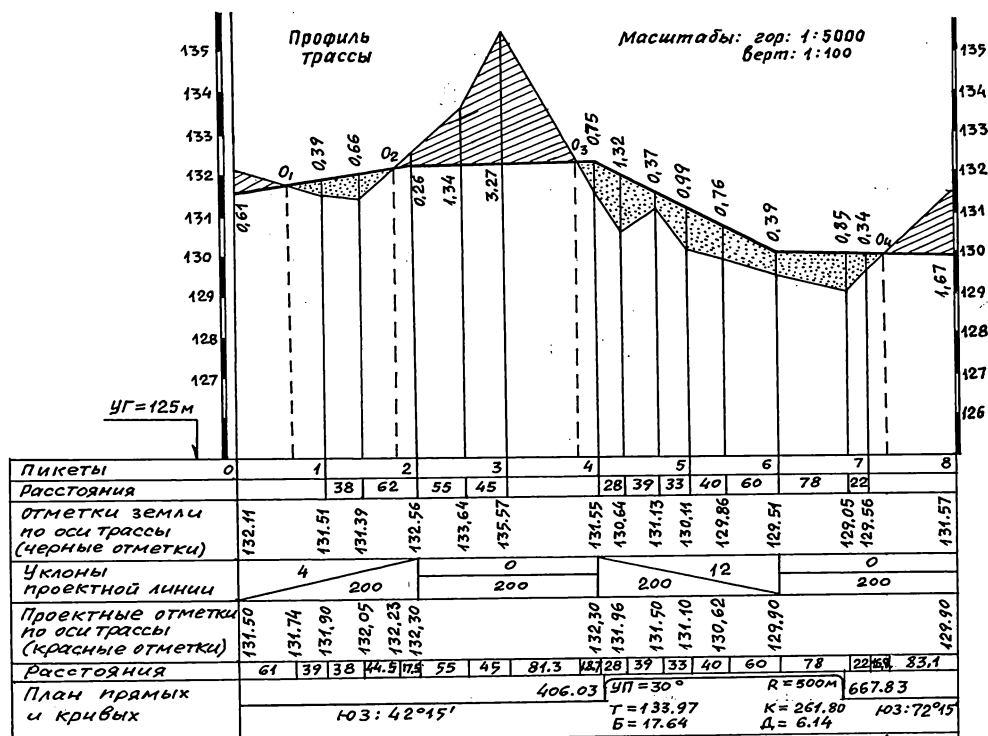


Рис. 9.9. Профиль трассы

На сетке профиля в выбранном горизонтальном масштабе размечают положение пикетов (для примера – через 100 м), а в первой строке «расстояния» размечают положение плюсовых точек между соответствующими пикетами. Например, точка ПК1+38 находится на расстоянии 38 м от ПК1, точка ПК2+55 – на расстоянии 55 м от ПК2. Если плюсовых точек между пикетами более одной, то их размечают аналогично, но в полученных отрезках записывают расстояния между ближайшими точками. Например, между пикетами ПК4 и ПК5 находятся плюсовые точки +28 и +67. Для первой точки записывают расстояние 28 м, а для второй – (67 м – 28 м) = 39 м и далее – остаток до 100 м, равный 33 м. Если между пикетами нет плюсовых точек, то на данном отрезке оставляют пробел. В строку «отметки земли по оси трассы» выписывают из журнала с округлением до 0,01 м высоты соответствующих точек.

Для оцифровки шкалы высот в соответствии с выбранным масштабом устанавливают т.н. «условный горизонт» УГ с таким расчетом, чтобы под графическим изображением линии профиля оставалось место для решения требуемых задач (построение проектной линии для строительства линейного сооружения, нанесение данных буровой разведки и др.). Далее шкалу оцифровывают и наносят точки трассы, которые соединяют прямыми отрезками.

## § 92. Построение проектной линии

Решение указанной задачи построения проектной линии для строительства дороги проследим на примере, приведенном на рис. 9.9.

Проектная линия чаще всего задается красной отметкой начальной ее точки на ПК0 (131,50 м) и уклонами на каждый из участков трассы при обеспечении уклонов, не превышающих максимальной величины проектного уклона (в примере  $i_{\max} \leq 0,040$ ). При графическом (предварительном) построении проектной линии, кроме обеспечения заданной величины уклона, стремятся выполнить следующие требования:

- отрезки разных уклонов проектной линии должны начинаться и заканчиваться в точках с известными ординатами (черными отметками);
- объемы земляных работ по срезке и засыпке грунта на участке профиля должны быть примерно одинаковыми;
- переход с уклона на уклон различных знаков должен осуществляться через горизонтальную площадку длиной не менее 100 м.

После графической разметки на чертеже проектной линии в строке «уклоны» выполняют их разметку в соответствии с их знаком. Для положительных уклонов линию проводят из нижнего левого угла в верхний правый, при отрицательных уклонах – из верхнего левого угла в нижний правый, при нулевых уклонах строят горизонтальную линию посередине строки. Указывают расстояние, на котором действует данный уклон.

Значения уклонов на участках предварительно определяют графически, как отношение превышений концов отрезка прямолинейного участка проектной линии к горизонтальному проложению, а затем округляют полученное значение до 0,001. Начинают такую работу с того отрезка проектной линии, для одной из точек которого известна начальная проектная высота.

В примере, для первого отрезка (ПК0-ПК2) уклон равен

$$i_1 = \frac{H_{ПК2} - H_{ПК0(ПР)}}{d_1} = \frac{132,25 - 131,50}{200} = +0,0038 ; \dots i_{1ПР} = +0,004 .$$

После этого определяют значения ординат для всех других точек данного участка по формуле

$$H_i = H_{нач} + d_i i_{1ПР} , \quad (9.38)$$

где  $d_i$  – горизонтальное проложение от начальной точки отрезка с известной проектной высотой до определяемой точки.

$$H_{ПК1(ПР)} = 131,50 + 100 \cdot (+0,004) = 131,90 \text{ м.}$$

$$H_{ПК1+38(ПР)} = 131,50 + 138 \cdot (+0,004) = 132,05 \text{ м.}$$

$$H_{ПК2(ПР)} = 131,50 + 200 \cdot (+0,004) = 132,30 \text{ м}$$

Далее следует горизонтальный участок с нулевым уклоном с той же отметкой 132,30 м.

По аналогии с участком 1 вычисляем проектный уклон и проектные отметки точек на участке 3:

$$i_3 = \frac{H_{ПК 6} - H_{ПК 4(ПР)}}{d_3} = \frac{130,00 - 132,30}{200} = -0,0115 ; \dots i_{3ПР} = -0,012 .$$

$$H_{ПК4+28(ПР)} = 132,30 + 28 \cdot (-0,012) = 131,96 \text{ м.}$$

$$H_{ПК4+67(ПР)} = 132,30 + 67 \cdot (-0,012) = 131,50 \text{ м.}$$

$$H_{ПК5(ПР)} = 132,30 + 100 \cdot (-0,012) = 131,10 \text{ м.}$$

$$H_{ПК5+40(ПР)} = 132,30 + 140 \cdot (-0,012) = 130,62 \text{ м.}$$

$$H_{ПК6(ПР)} = 132,30 + 200 \cdot (-0,012) = 129,90 \text{ м.}$$

Далее следует последний, четвертый, участок, уклон которого равен нулю, т.е. отметка 129,90 м сохраняется для всех точек данного участка.

Расчет для точек нулевых работ (точек пересечения поверхности земли с проектной линией) выполняется по схеме, приведенной на рис. 9.10. Сначала на профиль со стороны проектной линии выписывают т.н. *рабочие отметки* – разности высот земли и проектной линии в данной точке. Если проектная линия находится выше фактического профиля, то рабочие отметки на чертеже подписывают над проектной линией, если проектная линия ниже фактической, то рабочие отметки подписывают ниже проектной линии.

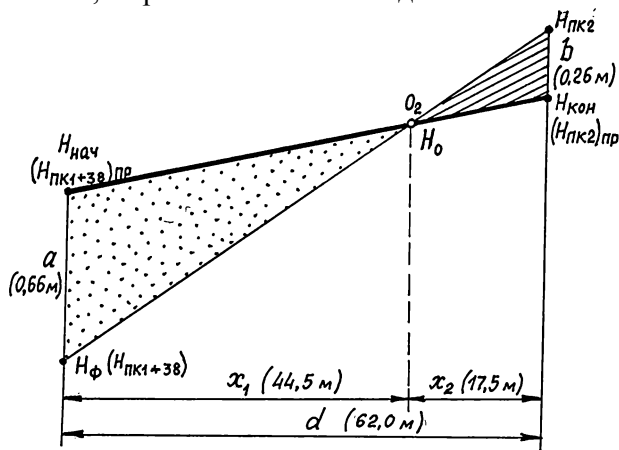


Рис. 9.10. Расчет точек нулевых работ (для точки  $O_2$  – рис. 9.9)

Следует найти расстояния  $x_1$  и  $x_2$  до точки нулевых работ от ближайших точек с известными отметками. Точка нулевых работ обязательно имеется в тех местах, где ближайшие рабочие отметки записаны по разные стороны проектной линии. После этого вычисляют высоты точек нулевых работ.

Расстояния  $x_1$  и  $x_2$  находят по формулам

$$x_1 = d \frac{a}{a+b} ; \quad x_2 = d \frac{b}{a+b} \quad (9.39)$$

$$\text{В примере } x_1 = 62 \frac{0,66}{0,66 + 0,26} = 44,5 \text{ м}, \quad x_2 = 62 \frac{0,26}{0,66 + 0,26} = 17,5 \text{ м.}$$

Вычисление высоты точки нулевых работ выполняют по формуле

$$H_0 = H_{(3)ПР} + x_1 \cdot i_{ПР} , \quad (9.40)$$

где  $H_{(3)ПР}$  – проектная высота задней точки отрезка, на котором находится точка нулевых работ. В примере:  $H_0 = 132,05 + 44,5 \cdot (+0,004) = 132,23 \text{ м.}$

Аналогичным образом производится расчет точек нулевых работ  $O_1$ ,  $O_3$  и  $O_4$ . При этом для точек  $O_3$  и  $O_4$  их высоты можно не определять, поскольку на данных участках проектный уклон равен нулю.

### § 93. Построение поперечного профиля и проектного полотна дороги

Поперечный профиль обычно строят примерно над тем же местом, где он находится на местности и на продольном профиле. Если поперечных профилей много, то их строят на отдельном листе бумаги. Часто вертикальный масштаб поперечного профиля мельче, чем вертикальный масштаб основного профиля, а горизонтальный масштаб, наоборот, крупнее. Для решения практических задач в некоторых случаях поперечные профили строят в удобном для работы масштабе.

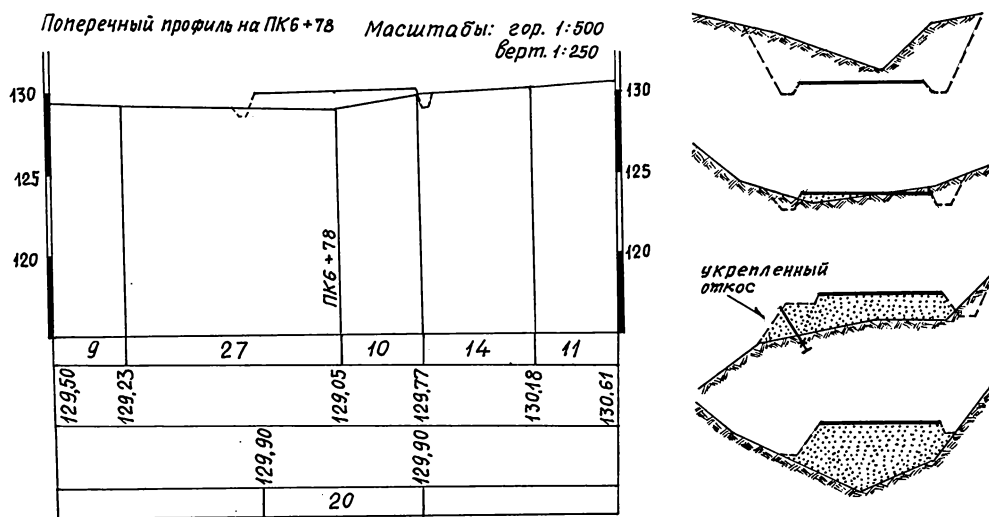


Рис. 9.11. Поперечный профиль  
Поперечный профиль (слева), варианты поперечного профиля дороги (справа)

Для построения поперечного профиля (рис. 9.11) выполняют разметку расстояний вправо и влево от оси поперечного профиля (от точки ПК6+78), выбирают удобное значение условного горизонта ( $УГ = 115$  м) и строят точки по их ординатам, приведенным в табл. 9.3.

Для построения полотна дороги, если решается именно эта задача, на поперечном профиле отмечают проектную высоту полотна дороги (129,90 м) в точке ПК6+78 и строят само полотно с учетом ширины проезжей части дороги, ширины обочин и параметров кювет. В примере ширина дороги с обочинами принята равной 20 м, поверхность – горизонтальная. Откосы кювет приняты под углом  $40^\circ$  к горизонту.

Возможны различные случаи положения проектного полотна дороги (рис. 9.11). Для каждого из них получается различное оформление обочин в соответствии с техническими требованиями по углу откосов кювет, глубине кювет и т.п.

## § 94. Нивелирование площадей

Данный вид геодезических работ применяют для составления проектов вертикальной планировки поверхности земли перед различными сооружениями (вокзалами, складами, пакгаузами, в населенных пунктах, у строящихся мостов), при строительстве аэродромов и др.

Нивелирование площадей выполняют следующими способами: по квадратам; параллельными линиями; способом полигонов.

Состав работ при *нивелировании площади по квадратам* следующий:

- рекогносцировка участка;
- построение на местности основных квадратов или прямоугольников с их проектным ориентированием;
- построение заполняющих квадратов;
- передача отметки на вершину одного из квадратов или отдельно на закрепленную точку;
- нивелирование вершин всех квадратов;
- обработка результатов измерений и построение рельефа;
- нанесение ситуации (при необходимости) и составление плана.

Стороны квадратов могут быть размерами от 5 до 100 м в зависимости от назначения съемки.

В зависимости от размеров снимаемой площади может быть выполнена непосредственная разбивка, а затем привязка сети квадратов, либо может быть выполнена разбивка с теодолитного хода. Во втором случае по снимаемому участку прокладывают магистральную линию, намечают на ней точки на расстояниях друг от друга, равных стороне квадрата, а затем строят серию параллельных линий с разбивкой углов квадратов (рис. 9.12).

В процессе разбивки вершин квадратов ведут съемку ситуации линейными и створными промерами от вершин и сторон квадратов. На больших площадях, во избежание накопления погрешностей в построении квадратов, строят теодолитный ход (квадрат или прямоугольник) с измерением сторон дважды с относительной погрешностью 1:1000 – 1:2000 и углов в 90° с погрешностью в 1,0'–1,5'. Затем на сторонах теодолитного хода строят сетку квадратов. Оцифровку вершин квадратов выполняют цифрами вдоль наибольшей оси и малыми буквами по короткой стороне. Таким образом, каждая вершина оцифровывается буквой и цифрой: в4, г7 и т.п.

Для привязки по высоте рядом с нивелируемой площадью устанавливают грунтовой репер и передают на него отметку с ближайшего исходного репера способом геометрического нивелирования.

Если длины сторон снимаемой площади не превышают 350 м, то нивелирование всех вершин квадратов можно выполнять с одной станции, расположив нивелир примерно посередине снимаемого участка. При больших размерах участка устанавливают две и более станции, при этом отметку с грунтового репера передают на один из связующих кольев в вершине квадрата, примыкающего к следующему нивелируемому фрагменту участка,

либо устанавливают дополнительно грунтовый репер и передают на него отметку.

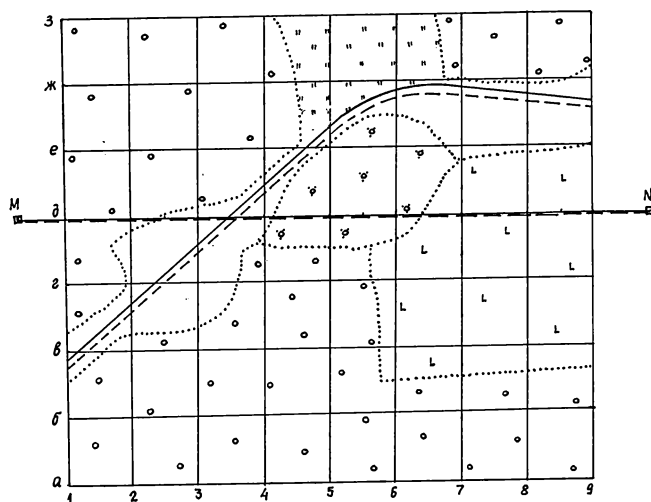


Рис. 9.12. Разбивка квадратов с магистральной линией

Технология нивелирования и определение отметок земли у вершин квадратов — через горизонт прибора. Сначала берут отсчет по рейке, установленной на репере (или связующей точке), а затем последовательно переходят от вершины к вершине и получают для них соответствующие отсчеты. Запись результатов измерений производят в журнале, либо непосредственно на схеме (рис. 9.13).

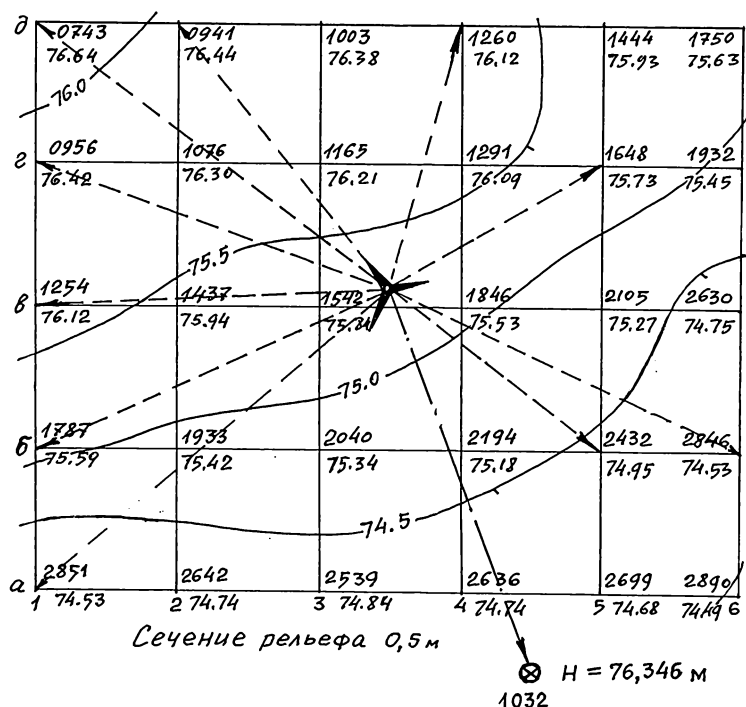


Рис. 9.13. Полевая схема и план нивелирования площади по квадратам

В таблице 9.4, составленной по данным измерений (рис. 9.13), приведены значения вычисленных высот через горизонт прибора. Эти же



значения записаны и на схеме (плане), и по ним построен рельеф с сечением горизонталей через 0,5 м.

Таблица 9.4

$\partial$	76,64	76,44	76,38	76,12	75,93	75,63
$z$	76,42	76,30	76,21	76,09	75,73	75,45
$v$	76,12	75,94	75,84	75,53	75,27	74,75
$\bar{b}$	75,59	75,42	75,34	75,18	74,95	74,53
$a$	74,53	74,74	74,84	74,74	74,68	74,49
	1	2	3	4	5	6

$$ГП = 76,346 + 1,032 = 77,348 \text{ м}$$

$$H_{a1} = 77,348 - 2,851 = 74,53 \text{ м}$$

$$H_{a4} = 77,378 - 1,846 = 75,53 \text{ и т.п.}$$

Для более качественного изображения рельефа на местности ведут абрис с указанием направления интерполирования горизонталей. Для рельефа простой формы обычно достаточно интерполирования по сторонам квадратов, при более сложных поверхностях производят дополнительное интерполирование по диагоналям квадратов.

Если местность значительно пересеченная и имеет много перегибов рельефа, то нивелируют и точки перегибов, одновременно выполняя их плановую привязку внутри квадрата. Обозначают такие точки чаще всего римскими цифрами.

*Способ параллельных линий* (рис. 9.14) применяют при равнинном рельефе в открытой или закрытой местности. Основой здесь является магистраль MN, которую прокладывают примерно посередине участка. Магистраль закрепляют через 500 м плановыми и высотными пунктами (обычно – совмещенными). Перпендикулярно к магистрали, либо под углом к ней (в особых местах) разбивают поперечные профили, которые могут быть прямыми, ломаными, а также иметь свои поперечники (поперечника второго порядка). Длина поперечного профиля не должна быть более 500 м.

По поперечным профилям разбивают пикетаж, начиная от магистрали, а концы этих линий промерами связывают между собой.

Магистраль нивелируют дважды, в прямом и обратном направлениях. Нивелирование по точкам поперечных профилей производится непрерывным ходом, параллельными галсами, что обеспечивает контроль работ по привязке к пикетным точкам магистрали. Так же, как и в способе нивелирования по квадратам, производится плановая съемка ситуации привязкой ее к магистрали и поперечникам.

После увязки всех образовавшихся фактических нивелирных ходов вычисляют высоты точек и строят топографический план с рельефом.

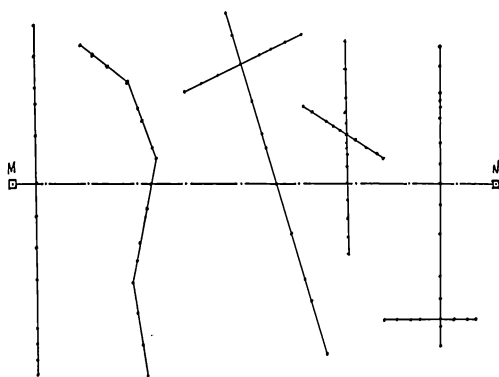


Рис. 9.14. Схема нивелирования  
способом параллельных линий

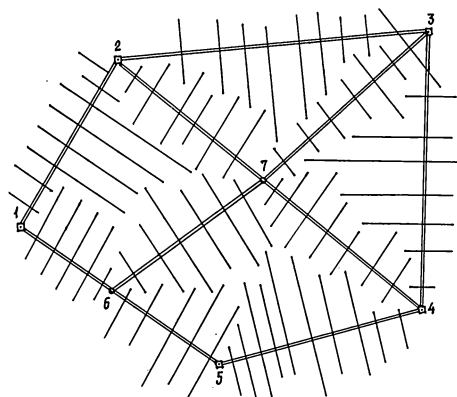


Рис. 9.15. Схема нивелирования  
способом полигонов

*Способ полигонов* (рис. 9.15) применяется на открытой местности с ярко выраженным рельефом. Основой для выполнения работ служит сеть сомкнутых магистралей. Прокладывают их обычно по водоразделам и тальвегам. На магистралях разбивают поперечные профили примерно по той же схеме, как и в предыдущем способе.

Магистрали увязывают в системе теодолитных ходов упрощенными нестрогими методами (глава 16), вычисляют координаты и высоты ее точек.

Сеть съемочных точек поперечных профилей должна сравнительно равномерно покрыть снимаемую местность в соответствии с требованиями к топографическим съемкам соответствующих масштабов.

## Глава 10 ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАЗБИВОЧНЫЕ РАБОТЫ

### § 95. Назначение и организация разбивочных работ

В результате выполнения разбивочных работ на местности находят с заданной или установленной точностью положение точек проектируемого сооружения.

Проектирование сооружения выполняют на топографическом плане, на нем же выполняют т.н. разбивочный чертеж с указанием значений основных разбивочных элементов, определяемых тем или иным способом построения точек, линий и т.п. элементов сооружения. Для перенесения на местность проекта сооружения используют особые его точки и линии: углы сооружения; главные, основные, промежуточные и детальные оси.

Для объектов линейного типа (траншеи, дороги, путепроводы и т.п.) главными осями являются их продольные оси, обычно оси симметрии. Основными осями для дорог являются оси, определяющие границы проезжей части, обочин, кюветов.

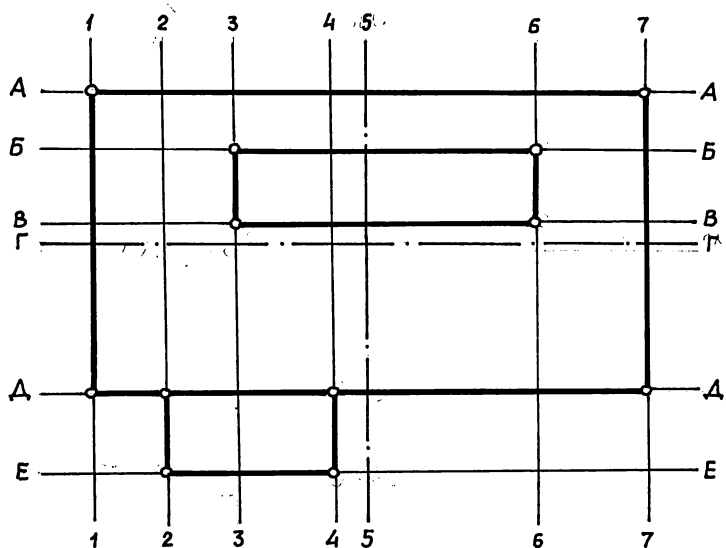


Рис. 10.1. Разбивочные оси сооружения.

Для зданий с симметричной геометрией главными осями являются оси симметрии (рис. 10.1). Так, для основного сооружения прямоугольной формы, определяемого точками Д1, А1, А7, Д7, главными осями являются оси Г-Г и 5-5. Основные оси определяют контур сооружения, т.е. определяют его форму и габариты (размеры). В соответствии с рис. 10.1 основными осями основного контура сооружения являются 1-1, 7-7, А-А, Д-Д, для пристройки – 2-2, 4-4, Д-Д (совпадающая с основной осью сооружения) и Е-Е. Промежуточные и детальные оси определяют положение различных

конструкционных элементов обычно внутри сооружения. К указанным осям относятся оси 3-3, 6-6, Б-Б и В-В, определяющие, например, расположение технологического оборудования. Обычно промежуточные и детальные оси выносят относительно главных и основных осей.

Указываемые в проекте сооружения или на разбивочном чертеже углы, координаты, расстояния, превышения, высоты называют проектными.

Высоты точек сооружения часто принимают условными. Например, для зданий за начальную (нулевую) отметку принимают уровень «чистого пола» первого этажа. В этом случае для подвальных помещений отметки будут отрицательными. Однако следует иметь в виду, что при проектировании уровень «чистого пола» первого этажа задают в абсолютной отметке привязкой к местности, а затем принимают ее равной нулю для строительного чертежа.

Принцип производства разбивочных работ – от общего к частному. При разбивке главных и основных осей выполняется проектная ориентировка сооружения по сторонам света, а также его плановое расположение на местности относительно имеющейся ситуации. При детальной разбивке определяют положение отдельных элементов как относительно главных и основных осей, так и относительно друг друга.

Организация и технология разбивочных работ должна быть строго согласована с соответствующими этапами строительства объекта.

Для выполнения разбивочных работ на местности создают плановую и высотную геодезическую разбивочную основу, которая должна быть построена с заданной точностью определения ее координат и высот и закреплена на местности долговременными знаками в местах, обеспечивающих ее сохранность на весь период строительства.

Непосредственная разбивка сооружения на любом из этапов производится после соответствующей геодезической подготовки, в результате которой определяют разбивочные элементы (углы, расстояния, превышения и др.) для перенесения по ним на местность искомых точек и линий проекта. На первом этапе выполняют разбивку главных и основных осей, на втором этапе, после возведения фундаментов (выполнения «нулевого цикла»), от фактически закрепленных главных и основных осей разбивают продольные и поперечные оси отдельных частей сооружения. На третьем этапе, если этого требует назначение сооружения, выполняют разбивку технологических осей для установки оборудования.

Каждый из этапов разбивочных работ определяется различными требованиями точности. Например, если разбивка главных осей сооружения на местности может быть выполнена с погрешностью до 5 см, то детальные оси относительно главных часто разбивают на порядок точнее (до 3-5 мм). Во многих случаях установка технологического оборудования требует точности разбивки технологических осей до 1 мм и менее. В любом случае геодезическая основа должна обеспечивать необходимую точность разбивки. В связи с этим, при повышенных требованиях точности, создают дополнительную (обычно плановую) локальную геодезическую основу, которую закрепляют

уже внутри строящегося сооружения, привязываемую к фактическому положению главных осей.

Полевые разбивочные работы связаны, в основном, с построением на местности проектных горизонтальных углов, расстояний, превышений (высот) и уклонов.

## § 96. Построение на местности проектного горизонтального угла

Вынос на местность проектного горизонтального угла  $\beta$  с вершиной в точке 1 (рис. 10.2) выполняют при двух положениях вертикального круга: при «круге лево» (КЛ) и «круге право» (КП).

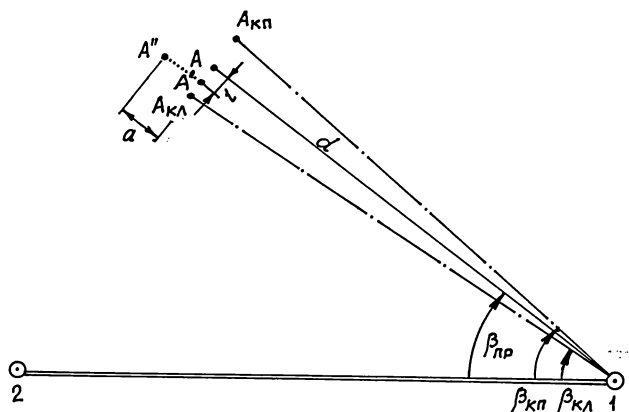


Рис. 10.2. Построение проектного угла

Теодолит устанавливают в рабочее положение в вершине проектного угла, выполняют наведение на опорную точку 2 и берут на нее отсчет  $2(KЛ)$  по шкале горизонтального круга. В точке 2 при необходимости может быть установлена на штативе визирная цель с устройством для ее центрирования и горизонтирования. К полученному отсчету прибавляют (если угол откладывается по часовой стрелке) или отнимают от него (если угол откладывается против часовой стрелки) значение проектного угла  $\beta_{пр}$

$$A(KЛ) = 2(KЛ) \pm \beta_{пр} \pm 360^0 \quad (10.1)$$

и устанавливают полученный отсчет на шкале горизонтального круга сначала грубо, затем – точно наводящим винтом при закрепленной колонке. Положение направления на искомую точку  $A$  при «круге лево» по команде наблюдателя фиксируют шпилькой на местности. Меняют положение круга, берут отсчет  $2(KП)$  на опорную точку 2, вычисляют отсчет на точку  $A$

$$A(KП) = 2(KП) \pm \beta_{пр} \pm 360^0 \quad (10.2)$$

и устанавливают полученное значение на шкале горизонтального круга, как и в предыдущем случае. Положение направления на точку  $A$  при «круге право» фиксируют второй шпилькой на местности рядом с первой шпилькой. В случае расхождений в положении зафиксированных направлений за оконча-

тельное принимают среднее направление. Затем построенный угол измеряют теодолитом двумя-тремя полными приемами. Если расхождения в значениях измеренного и проектного углов соответствуют заданной точности построения, то задача считается выполненной. В противном случае необходимо заново построить угол.

В формулах (10.1) и (10.2)  $\pm 360^\circ$  используют при отрицательных отсчетах и отсчетах, больших  $360^\circ$ .

Уточнение направления  $I-A$ , соответствующее проектному углу, можно выполнить следующим способом.

Вычисляют значение

$$\Delta\beta = \beta_{изм} - \beta_{пр} \quad (10.3)$$

и соответствующую линейную поправку  $l$  в угол  $\beta_{изм}$

$$l = d \frac{\Delta\beta''}{\rho''}, \quad (10.4)$$

где  $d$  – расстояние от точки  $I$  до точки  $A$  (при построениях);  $\rho'' = 206265''$ . Полученное значение  $l$  откладывают в соответствующем направлении в точке  $A$  перпендикулярно к линии  $I-A$ . Шпильку из точки  $A$  переносят в точку  $A'$  и для контроля двумя-тремя полными приемами измеряют построенный угол.

Вообще говоря, указанным способом можно строить проектные углы точнее, чем это позволяют возможности используемого теодолита. Например, при использовании теодолита Т30 проектный угол можно построить с точностью до  $10''$ .

**Пример 10.1.** Построение проектного угла теодолитом Т2.

Заданная точность построения проектного угла  $5''$ . Значение проектного угла  $\beta_{пр} = 73^\circ 36' 20''$ . Расстояние  $I-A = d = 70$  м.

**Решение.**

Отсчет на точку 2 при КЛ:  $2(KЛ) = 117^\circ 42' 45''$ .

Отсчет на точку  $A$  при КЛ:  $A(KЛ) = 117^\circ 42' 45'' + 73^\circ 36' 20'' = 191^\circ 22' 05''$ .

Отсчет на точку 2 при КП:  $2(KП) = 297^\circ 43' 15''$ .

Отсчет на точку  $A$  при КП:  $A(KП) = 297^\circ 43' 15'' + 73^\circ 36' 20'' = 11^\circ 19' 35''$ .

Измеренное значение построенного проектного угла  $\beta_{изм} = 73^\circ 36' 28''$ .

Разность  $\Delta\beta = 73^\circ 36' 28'' - 73^\circ 36' 20'' = +8''$ , что превышает необходимую точность построения угла.

Линейная поправка  $l = 70000 \text{ мм} \frac{8''}{206265''} = 2,7 \text{ мм}$ . Полученная поправка откладывается в сторону уменьшения угла.

Новое измеренное значение построенного угла составило  $73^\circ 36' 22''$ , что является допустимым.

## § 97. Построение на местности проектного расстояния

Чаще всего приходится строить одновременно проектный угол и проектное расстояние  $s_{IA}$ . В этом случае сначала выполняют построение проектного угла, размещая шпильки примерно на проектном расстоянии. После фикса-

ции на местности точки  $A'$  (рис. 10.2) точно измеряют расстояние линии  $I-A'$  с учетом компарирования рулетки и поправок за наклон линии и вводят в полученное расстояние поправку

$$a = S_{IBM} - S_{IP} . \quad (10.5)$$

Шпильку из точки  $A'$  переставляют по направлению линии  $I-A'$  с учетом величины и знака поправки  $a$ .

Для контроля измеряют построенные проектный угол (в связи с подвижками проектной точки на местности могло произойти смещение с направления  $I-A$ ) и проектное расстояние. В том и другом случаях должна быть обеспечена заданная точность построения разбивочных элементов.

При использовании светодальномеров отражатель устанавливают по команде наблюдателя по створу линии  $I-A$  до получения проектного расстояния (разбивочного элемента). При использовании электронных тахеометров одновременно фиксируют как значение проектного угла, так и значение проектного расстояния при перемещении в проектной точке отражателя.

Поправку за наклон местности вычисляют по формуле

$$l_H = 2d \sin^2 \frac{V}{2} , \quad (10.6)$$

где  $V$  - угол наклона проектной линии. Он может быть получен из отношения превышения  $h$  концов проектного отрезка к горизонтальному проложению  $d$  этого отрезка:

$$V = \arctg \frac{h}{d} . \quad (10.7)$$

Поправка  $l_H$  всегда положительная.

Если между номинальной и эталонной длиной  $l_0$  мерного прибора существует разность  $\Delta l$ , то поправку за компарирование определяют по формуле

$$l_K = \frac{\Delta l}{l_0} d . \quad (10.8)$$

Поправка  $l_K$  отрицательная, если фактическая длина мерного прибора меньше номинальной, и положительная, если фактическая длина мерного прибора больше номинальной.

Поправка за температуру, как указывалось выше, зависит от коэффициента линейного расширения  $\alpha$  материала, из которого изготовлена лента мерного прибора. Для стали принимают в расчетах  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ . Величина поправки за температуру

$$l_T = \alpha d (t_K - t) , \quad (10.9)$$

где  $t$  - рабочая температура;  $t_K$  - температура компарирования мерного прибора. Поправка за температуру имеет знак «плюс», если рабочая температура меньше температуры компарирования. Если температура компарирования была меньше рабочей температуры, то поправка за температуру принимается отрицательной.

Таким образом, фактическая проектная длина на местности с учетом поправок определяется по формуле

$$S_{\text{ПР (ДЛИННОСТРОЕ НИИ)}} = d_{\text{ПР}} + l_H - l_K + l_T. \quad (10.10)$$

### Пример 10.2. Построение проектного расстояния.

Получено проектное значение горизонтального проложения  $d_{\text{ПР}} = 69,738$  м, которое необходимо построить с относительной погрешностью  $\delta$  не более 1:10000. Превышение концов проектной линии  $h = 0,805$  м. Для построения на местности используется стальная рулетка Р100 (номинальная длина 100 м), при компарировании которой при температуре  $t_K = 18^\circ\text{C}$  получена эталонная ее длина 100,0035 м. Рабочая температура при построении линии составила  $t = 22^\circ\text{C}$ .

#### Решение.

Абсолютная погрешность построения проектного расстояния составляет

$$m_d = d_{\text{ПР}} \delta = 69738 \text{ мм} \frac{1}{10000} \cong 7 \text{ мм}.$$

Вычисляем поправки  $l_H$ ,  $l_K$  и  $l_T$ .

$$\text{Угол наклона } \nu = \arctg \frac{0,805}{69,738} = 0^\circ 39,7'.$$

$$l_H = 2 \times 69,738 \times 10^3 \sin^2 0^\circ 19,85' = +4,65 \text{ мм}.$$

$$l_K = \frac{0,0035}{100} 69,738 \times 10^3 = +2,44 \text{ мм}.$$

$$l_T = 12 \times 10^{-6} \times 69,738 \times 10^3 (18^\circ - 22^\circ) = -3,35 \text{ мм}.$$

Проектное расстояние

$$s_{\text{ПР}} = 69738 \text{ мм} + 4,65 \text{ мм} - (+2,44 \text{ мм}) - 3,35 \text{ мм} = 69737 \text{ мм} = 69,737 \text{ м}.$$

Обратите внимание на то, что при указанных в примере условиях поправки практически компенсировали друг друга, а фактический отсчет по рулетке, соответствующий проектному (расчетному) расстоянию, оказался даже несколько меньше проектного значения горизонтального проложения. Это оказалось следствием сравнительно малого угла наклона проектной линии. Чаще всего на пересеченной местности поправки за наклон линии значительно превышают остальные.

При контрольном измерении построенного расстояния той же рулеткой и при той же рабочей температуре измеренная длина оказалась равной 69,741 м. Разность с проектной длиной составила  $(69,741 - 69,737) = +0,004 \text{ м} = +4 \text{ мм}$ , что меньше допустимой величины погрешности построения (7 мм – см. исходные данные примера и начало решения).

## § 98. Построение на местности проектных отметок и линий заданного уклона

Часто от репера Государственной нивелирной сети невозможно передать высоту непосредственно на проектную точку. Для этого, как отмечалось выше, создают высотную геодезическую основу, которую закрепляют на строительной площадке. Саму высотную основу привязывают нивелирным ходом, либо системами нивелирных ходов к исходным пунктам (реперам) геодезической сети.

Для выноса на местность проектной отметки используют, в основном, метод *геометрического нивелирования*, реже, при невозможности использовать указанный выше метод, - метод *тригонометрического нивелирования*.

Для выноса проектной отметки методом геометрического нивелирования нивелир устанавливают посредине между исходной и проектной точками (рис. 10.3). По исходной точке находят горизонт прибора

$$ГП = H_{\text{ИСХ}} + a, \quad (10.11)$$



где  $a$  – отсчет по рейке, установленной на исходной точке.

Формулу (10.11) удобно использовать, если с данной станции выносят сразу несколько проектных высот.

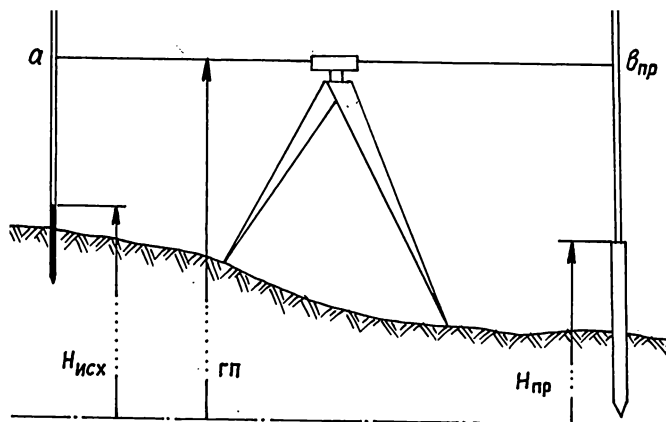


Рис.10.3. Построение проектной отметки способом геометрического нивелирования

Поскольку проектная высота  $H_{пр}$  известна, то известно и проектное превышение

$$h_{пр} = H_{пр} - H_{исх} = a - b_{пр}, \quad (10.12)$$

где  $b_{пр}$  – отсчет по рейке, установленной в проектной точке, соответствующий проектной высоте. Таким образом,

$$b_{пр} = a - h_{пр} = ГП - H_{пр}. \quad (10.13)$$

Высотное положение проектной точки изменяют до тех пор, пока на рейке не установится отсчет, равный  $b_{пр}$ . После этого превышение  $h_{пр}$  измеряют несколько раз (при нескольких горизонтах прибора) и убеждаются в обеспечении заданной точности построения высоты.

Проектная точка может быть подвижной по высоте, выполненной в виде болта (в конструкции), ею может быть деревянный или металлический кол, забиваемый в землю, часто на строительных конструкциях проектной точкой является черта (откраска) по основанию рейки.

При строительстве зданий всегда требуется передача проектной высоты (отметки) на другой монтажный горизонт, например, по колонне или стене. Для этого от проектной черты на стене или колонне нижнего горизонта рулеткой откладывают проектную разность двух монтажных горизонтов. При передаче высот на несколько монтажных горизонтов на каждом из них выполняют контрольное нивелирование по проектным отметкам.

При использовании для построения проектной отметки метода тригонометрического нивелирования в исходной точке (в точке с известной высотой) устанавливают теодолит (рис. 10.4), измеряют его высоту  $i$ , горизонтальное проложение  $d$  и определяют угол наклона  $\gamma$ , соответствующий проектной высоте  $H_{пр}$ :

$$v_{\text{пр}} = \arctg \left( \frac{h_{\text{пр}} - i}{d} \right). \quad (10.14)$$

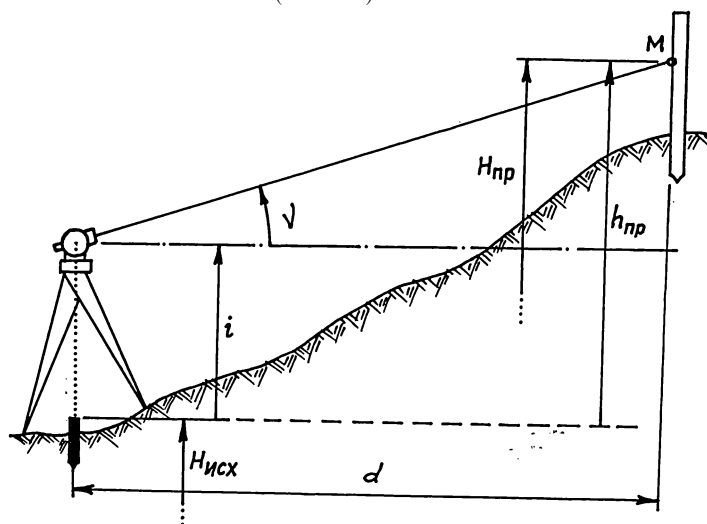


Рис.10.4. Построение проектной отметки способом тригонометрического нивелирования

Определяют отсчет по вертикальному кругу теодолита при «круге право» и «круге лево», соответствующие значению полученного проектного угла наклона:

$$\begin{aligned} BK (КТ) &= v_{\text{пр}} + MO \\ BK (КЛ) &= MO - v_{\text{пр}}, \end{aligned} \quad (10.15)$$

где  $MO$  – место нуля, предварительно определенное на станции по 2-3 точкам.

Метка  $M$  будет соответствовать проектной высоте в заданной точке.

Для контроля построения проектной отметки следует изменить горизонт прибора, измерить несколькими приемами угол наклона на метку  $M$  и вычислить значение проектной высоты по формуле:

$$H_{\text{пр (ср)}} = H_{\text{исх}} + i + d \text{tg } v. \quad (10.16)$$

Если при построении не будет обеспечена заданная точность, то метку  $M$  перемещают на величину расхождения в соответствующем направлении и выполняют контрольную проверку высоты.

Построение линии с проектным уклоном можно выполнить с помощью нивелира, либо с помощью теодолита.

Геометрическое нивелирование удобно использовать при небольших проектных уклонах, например, при строительстве дорог. При значительных уклонах используют теодолит.

На рис. 10.5 представлена схема построения линии. Нивелир устанавливают в створе проектной линии в точке  $I$  (рис. 10.5 а), высота которой известна ( $H_{I(\text{пр})}$ ). Далее, на расстояниях  $d_i$  от точки  $I$ , выставляют точки на их проектную высоту

$$H_{i(\text{пр})} = H_{I(\text{пр})} + d_i i_{\text{пр}} \quad (10.17)$$

с вычислением для каждой из них соответствующего отсчета по рейке, как это выполнялось при передаче на точку проектной высоты.

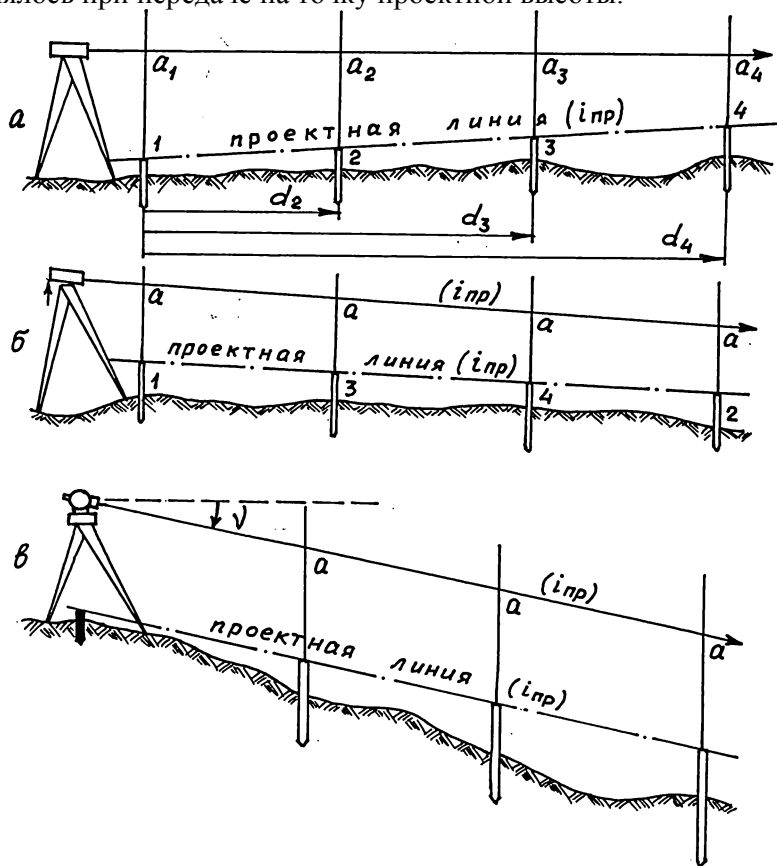


Рис. 10.5. Построение линии заданного уклона  
а) горизонтальным лучом; б) наклонным лучом нивелира; в) с помощью теодолита

В другой схеме (рис. 10.5 б) определяют проектную высоту в конечной точке 2 линии и элевационным винтом нивелира добиваются совпадения отсчетов  $a$  по рейкам, установленным в точках 1 и 2. Далее, в промежуточных точках по створу линии выставляют точки, на которых отсчет по рейке также должен быть равным отсчету  $a$ .

Во второй схеме вместо нивелира можно использовать теодолит (рис. 10.5 в). Теодолит устанавливают в проектной точке 1, определяют проектный угол наклона

$$v_{\text{пр}} = \arctg i_{\text{пр}}, \quad (10.18)$$

по нескольким измерениям определяют место нуля вертикального круга и вычисляют по формулам (10.15) отсчет по вертикальному кругу, соответствующий проектному углу. При полученном отсчете визируют на точку 2 проектной линии и по рейке, установленной в этой точке, берут отсчет  $a$ . Для промежуточных точек линии должны также обеспечиваться такие же отсчеты по рейкам.

После построения линии с заданным уклоном необходимо выполнить контрольные измерения по ее зафиксированным на местности точкам и убедиться в правильности построения, т.е. в обеспечении необходимой точности построения проектного уклона. Целесообразно контрольные измерения выполнять способом геометрического нивелирования, если это возможно по условиям измерений.

**Пример 10.3.** Построение проектного уклона с помощью теодолита.

Исходные данные.

Величина проектного уклона  $i_{пр} = -0,145$ . Точность построения уклона  $\pm 0,005$ . Место нуля МО =  $-0^{\circ}02,4'$ . Горизонтальное проложение линии 1-2  $d_{12} = 65,356$  м. Проектная высота в точке 1  $H_{1(пр)} = 156,857$  м.

**Решение.**

Определяем проектную высоту в точке 2:

$$H_{2(пр)} = H_{1(пр)} + d_{12}i_{пр} = 156,857 + 65,356(-0,145) = 147,380 \text{ м.}$$

По формулам (10.18) и (10.15) находим значения проектного угла и отсчетов по вертикальному кругу при «круге лево» и «круге право»:  $v_{пр} = -8^{\circ}15,0'$ ;  $ВК(КЛ) = -8^{\circ}15,0' + +(-0^{\circ}02,4') = -8^{\circ}17,4'$ ;  $ВК(КП) = -0^{\circ}02,4' - (-8^{\circ}15,0') = +8^{\circ}12,6'$ .

Отсчет по рейке в точке 2 при наблюдениях после установки отсчетов по вертикальному кругу при положениях КЛ и КП составил  $a_2 = 1476$  мм.

При контрольном нивелировании максимальное расхождение в проектных высотах по линии 1-2 на расстояниях 15 м составило 15 мм. Таким образом, ошибка в построении проектного уклона составила  $15 \text{ мм}/15000 \text{ мм} = 0,001$ , что удовлетворяет поставленной задаче.

При выполнении аналогичных работ, не требующих высокой точности, можно пользоваться тремя визирками одинаковой длины (рис. 10.6), которые представляют собой вертикальный брусок с прикрепленной к нему горизонтальной планкой.

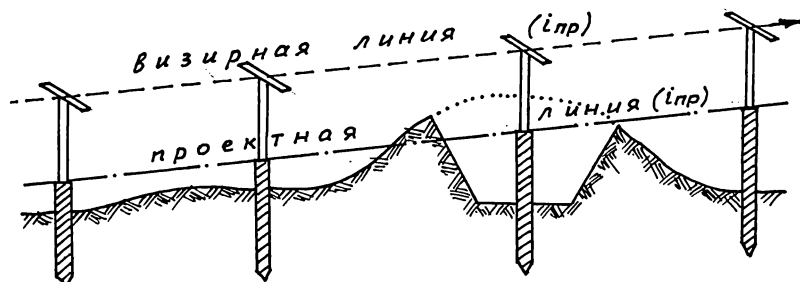


Рис. 10.6. Построение проектного уклона с помощью визирок.

Две визирки устанавливают в точках 1 и 2 с предварительно выставленными на них проектными отметками. Третью визирку перемещают по створу линии 1-2 и «на глаз» совмещают горизонтальные планки всех трех визирок (наблюдатель должен находиться в точках 1 или 2. По основанию третьей визирки фиксируют точку с ее проектной высотой, соответствующей заданному проектному уклону.

## § 99. Способы разбивочных работ

*Способ прямой и обратной угловых засечек.* Чаще всего эти способы применяют для выноса недоступных точек, а также точек, находящихся на значительных расстояниях от геодезической основы.

В способе *прямой угловой засечки* (рис. 10.7 а) положение точки  $M$  определяют с исходных пунктов  $A$  и  $B$  геодезической основы построением в каждой из них горизонтальных углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , которые являются разбивочными элементами. Указанные углы строят на местности по правилам, изложенным в § 96. В данной схеме целесообразно использовать одновременно два теодолита. При этом положение проектной точки фиксируют по команде двух наблюдателей при положениях КЛ, а затем – при положениях КП. После фиксирования среднего положения точки  $M$  выполняют контрольное измерений углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$ .

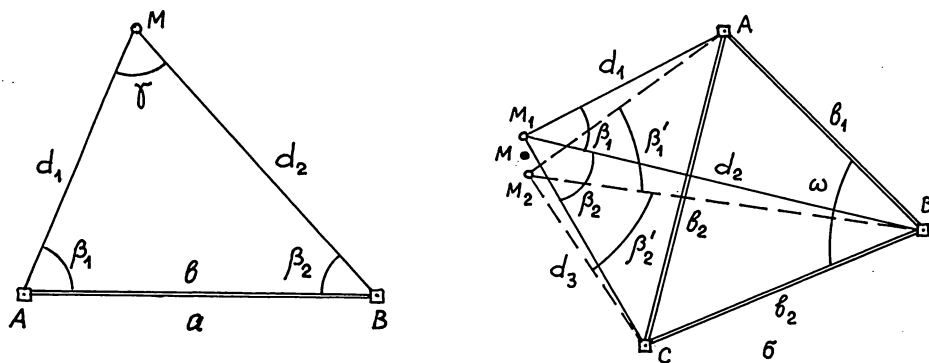


Рис. 10.7. Вынос проектной точки способами прямой и обратной угловых засечек.  
а) способ прямой угловой засечки; б) способ обратной угловой засечки.

Необходимо иметь ввиду, что величина угла  $\gamma$  при точке  $M$  не должна быть малой и слишком большой. Оптимальным углом, при котором вынос точки может быть выполнен с меньшей ошибкой, является  $\gamma \approx 109^\circ - 110^\circ$  при примерно равных расстояниях от исходных точек до точки  $M$ . Т.е. следует стремиться обеспечить симметричную схему построения точки  $M$ .

Во многих случаях бывает сложно из одного приема вынести точку  $M$  с заданной точностью в ее проектное положение. В таких случаях используют *способ замкнутого треугольника*. Вынос точки осуществляют последовательными приближениями. Для этого с максимально возможной точностью выполняют построение точки  $M$ , затем несколькими приемами измеряют все углы треугольника, уравнивают углы и вычисляют координаты точки  $M$  из решения по формулам *прямой угловой засечки*. Полученные координаты сравнивают с проектными и при недопустимых отклонениях в их значениях определяют поправки (редукции) в положение точки  $M$  и смещают последнюю в проектное положение. Для контроля снова измеряют углы и выполняют аналогичные вычисления.

Метод последовательных приближений реализуется и в способе обратной угловой засечки (рис. 10.7 б). Предварительно точку  $M$  выносят на местность и измеряют при ней углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . По формулам *обратной угловой засечки* определяют координаты точки  $M$  и сравнивают их с проектными. При необходимости положение точки  $M$  редуцируют на величины отклонений по координатам  $X$  и  $Y$ , точку  $M$  фиксируют в положении  $M_2$  и снова уже в новой точке измеряют горизонтальные углы  $\beta$  а затем вычисляют координаты новой точки  $M$ . Все указанные действия выполняют до тех пор, пока задача качественного построения проектной точки не будет решена.

*Способ полярных координат* используют в тех случаях, когда проектные точки находятся сравнительно недалеко от точек геодезической основы. При этом предпочтительно, чтобы расстояния до них не превышали длины мерного прибора (ленты или рулетки).

На местности от исходного направления  $AB$  (рис. 10.8) строят проектный угол  $\beta$  и проектное расстояние  $d$ , которые в данном способе являются разбивочными элементами. Проектная точка может находиться далеко от точек геодезической основы или не может быть вынесена по техническим условиям способами угловой засечки. В таких случаях к точке прокладывают полигонометрический ход (рис. 10.9), используя для этого последовательно расчетные проектные углы и проектные расстояния. Данный способ называют *способом проектного полигона*.

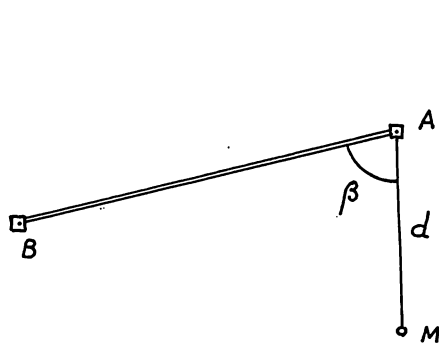


Рис. 10.8. Вынос на местность проектной точки способом полярных координат.

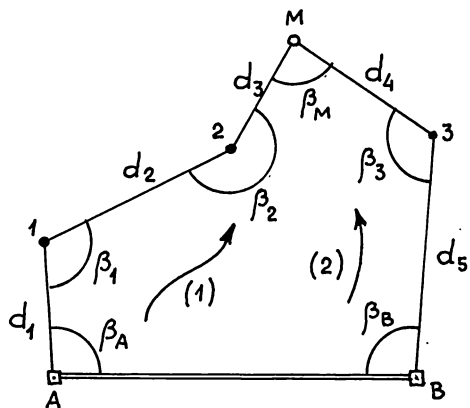


Рис. 10.9. Вынос на местность проектной точки способом проектного полигона.

По двум ходам от базисной линии  $AB$  геодезической основы получают два положения точки  $M$  из решения ходов (1) и (2). В качестве первого приближения вычисляют средние значения координат проектной точки. Затем в полученной точке  $M$  измеряют угол  $\beta_M$  и линии  $d_3$  и  $d_4$  и вычисляют координаты точки  $M$  в общей схеме замкнутого полигона. Если координаты точки  $M$  будут значительно отличаться от проектных, то определяют поправки (редукции) в положение точки  $M$ , точку смещают и снова измеряют угол  $\beta_M$  и линии  $d_3$  и  $d_4$ . Из решения хода находят координаты точки  $M$  и сравни-

вают их с проектными. Такие действия выполняют до достижения необходимой точности построения проектной точки.

При небольших расстояниях от проектной точки до точек геодезической основы удобно использовать *способ линейной засечки*, реализуемый с помощью двух или трех рулеток (рис. 10.10). Разбивочными элементами в этом способе являются только расстояния  $S$  или горизонтальные проложения  $d$ .

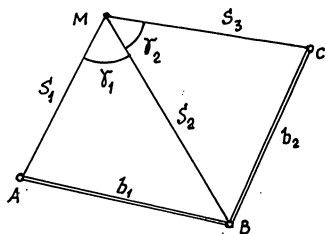


Рис. 10.10. Вынос на местность проектной точки способом линейной засечки.

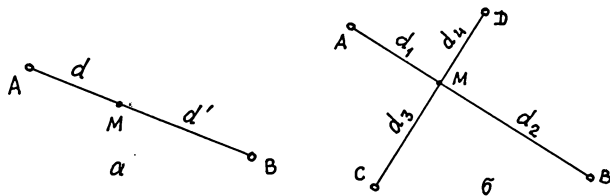


Рис. 10.11. Способы створных засечек.  
а) способ створно-линейной засечки; б) способ створной засечки

Для выноса осей сооружений удобно использовать *способы створных засечек* (рис. 10.11).

В схеме *створно-линейной засечки* (рис. 10.11 а) положение точки  $M$  определяют на линии створа, образованного пунктами  $A$  и  $B$  геодезической основы. По линии створа проектным расстоянием  $d$  задают положение искомой точки  $M$ . При необходимости положение точки  $M$  может быть проконтролировано с другой точки створа. В точке  $A$  створа устанавливают теодолит, а в точке  $B$  – визирную цель (на штативе, с возможностью центрирования и горизонтирования).

В схеме *створной засечки* (рис. 10.11 б) точку  $M$  задают на линии пересечения створов  $AB$  и  $CD$ . Для повышения точности работу целесообразно выполнять одновременно двумя теодолитами и двумя визирными целями несколькими приемами с перестановкой теодолитов и визирных целей. Для контроля измеряют расстояния от построенной точки до исходных пунктов геодезической основы.

Обычно на строительной площадке имеется т.н. *строительная сетка*. В ее системе координат задано положение всех осей (главных, основных и т.д.), а также всех главных (узловых) точек. В этом случае вынос проектных точек осуществляется в системе координат строительной сетки по приращениям координат  $\Delta x$  и  $\Delta y$  (рис. 10.12). В общегосударственной или местной системах координат  $XOY$  используется система координат  $xAy$  строительной сетки с началом координат в точке  $A$ . Ось  $Ay$  задается исходным направлением на другую исходную точку ( $B$ ) геодезической основы. Положение точки  $M$  определяется расстояниями  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , т.е. приращениями координат в системе строительной сетки.

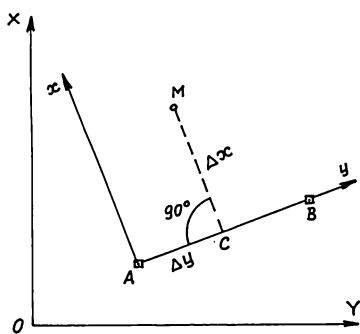


Рис. 10.12. Разбивка точек сооружения от строительной сетки

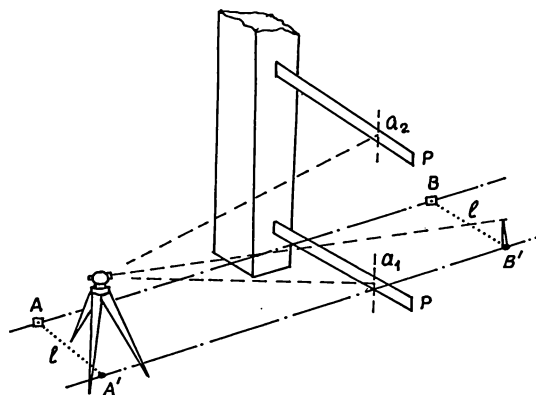


Рис. 10.13. Способ бокового нивелирования

Предварительно строят проектное расстояние  $\Delta y$ , устанавливают в полученной точке  $C$  теодолит, строят проектный угол  $\beta$ , равный  $90^\circ$  на точку  $M$  и в полученном направлении откладывают отрезок  $\Delta x$ . Для обеспечения более высокой точности построения точки. Меньшее из  $\Delta x$  и  $\Delta y$  следует строить в виде перпендикуляра, а большее – по створу исходной линии.

Вынос вертикальных осей конструкций выполняют *способом бокового нивелирования* (рис. 10.13). От оси  $AB$ , на которой находится строительная конструкция, например, колонна, а небольшом расстоянии  $l$  строят линию  $A'B'$ , параллельную исходной линии  $AB$ . В точке  $A'$  устанавливают теодолит, который визируют на марку, находящуюся в точке  $B'$ . Перпендикулярно к оси колоны последовательно на ее основание и верх устанавливают рейку  $P$  (с уровнем, ориентированным осью по продольной оси рейки) и берут отсчеты  $a_1$  и  $a_2$  по вертикальной нити сетки зрительной трубы. Равенство указанных отсчетов определяет вертикальность оси колонны.

## § 100. Расчет разбивочных элементов

В данном параграфе будет рассмотрен пример расчета разбивочных элементов для некоторых из способов производства разбивочных работ. При этом принцип расчета будет подробно пояснен, и его легко применить практически к любому другому способу.

*Разбивочными элементами* являются углы, расстояния, превышения, которые непосредственно строят на местности для получения проектного положения точек или линий сооружаемого объекта.

На местности имеется геодезическая основа  $A-B-C-D-E-F$  (рис. 10.14) с известными координатами  $X, Y, H$ , заданными в местной системе координат (табл. 10.1). Необходимо вынести на местность углы  $1, 2, 3$  и  $4$  прямоугольного контура с размерами сторон  $d_{12} = d_{34} = 30,000$  м и  $d_{23} = d_{41} = 75,000$  м, а также выполнить разбивку главных осей  $I-I'$  и  $II-II'$  сооружения и передать проектную высоту на точку  $M$ .



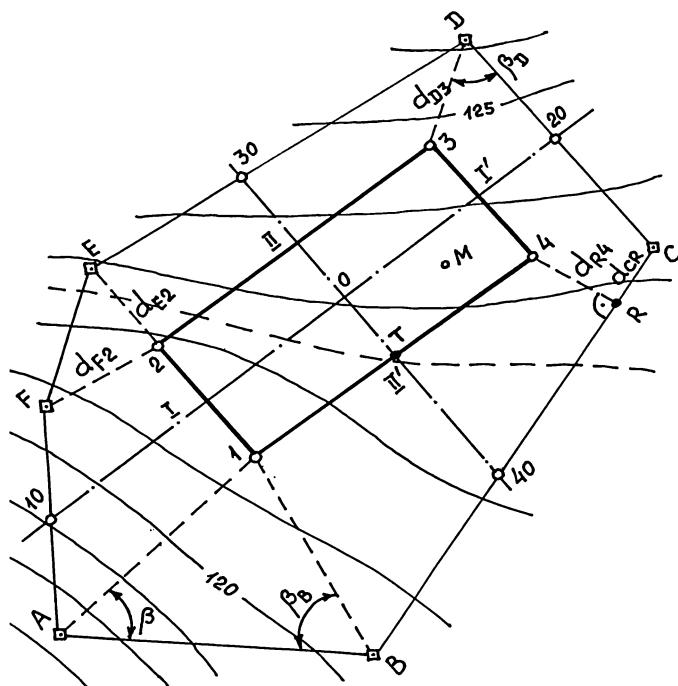


Рис. 10.14. Расчет разбивочных элементов.

Таблица 10.1

Пункты основы	X, м	Y, м	H, м
A	3673,681	7112,241	117,403
B	3662,429	7166,522	120,352
C	3734,968	7237,400	123,363
D	3774,576	7217,639	126,050
E	3750,263	7132,405	122,901
F	3722,592	7121,946	120,600

С топографического плана (проекта сооружения) получены следующие проектные величины:

- координаты центра сооружения:  $X_O = 3730,000$  м;  $Y_O = 7180,000$  м;
- дирекционный угол направления главной оси  $I-I'$   $\alpha_1 = 67^\circ 30'$ .

Установлена проектная высота точки  $M$   $H_{M(пр)} = 123,600$  м.

При составлении геодезического проекта разбивочных работ с учетом взаимного расположения контура сооружения и геодезической основы принято следующее решение:

- точку 1 вынести способом прямой угловой засечки с точек A и B основы;
- точку 2 вынести способом линейной засечки с точек E и F основы;
- точку 3 вынести способом полярных координат с точки D основы от исходного направления DC;

- главную ось симметрии  $I-I'$  зафиксировать в створе линий  $AF$  и  $DC$  в точках  $10$  и  $20$ ;
- главную ось симметрии  $II-II'$  зафиксировать в створе линий  $DE$  и  $BC$  в точках  $30$  и  $40$ ;
- проектную высоту на точку  $M$  передать с точки  $C$  основы с контрольным определением построения проектной отметки через точку  $D$ .

*Обращаем Ваше внимание на то, что техническое задание на производство разбивочных работ здесь составлено исключительно в учебных целях, с учетом рассмотрения возможно большего числа способов разбивки. Таким образом, представленный в примере проект разбивки для данного сооружения и данных условий может оказаться не оптимальным с точки зрения практического его воплощения.*

Решение задачи в части определения разбивочных элементов.

Из решения обратных геодезических задач находим дирекционные углы и горизонтальные проложения исходных направлений геодезической основы (табл. 10.2).

Таблица 10.2

Направление	Дирекционный угол	Горизонтальное проложение, м	Направление	Дирекционный угол	Горизонтальное проложение, м
AB	101° 42' 40"	55,435	DE	254° 04' 45"	88,634
BC	44° 20' 11"	101,418	EF	200° 42' 20"	29,582
CD	333° 29' 05"	44,264	FA	191° 13' 23"	49,864

Найдем плановые координаты и высоты (на местности) проектных точек сооружения.

Часто координаты проектных точек получают непосредственно с плана графическим методом. Здесь мы рассмотрим аналитический, наиболее точный метод определения координат проектных точек.

В соответствии с геометрией сооружения и проектными исходными данными вычислим проектные значения углов сооружения (точек  $1$ ,  $2$ ,  $3$ , и  $4$ ). Для этого воспользуемся вспомогательной точкой  $T$ .

Дирекционный угол  $\alpha_{OT} = \alpha_{30-40} = \alpha_I + 90^\circ = 67^\circ 30' + 90^\circ = 157^\circ 30'$ .

Горизонтальное проложение  $d_{OT} = 0,5 d_{12} = 15,000$  м.

Дирекционный угол  $\alpha_{TI} = \alpha_I + 180^\circ = 67^\circ 30' + 90^\circ = 247^\circ 30'$ .

Горизонтальное проложение  $d_{TI} = 0,5 d_{23} = 37,500$  м.

Найдем координаты точки  $I$  из последовательного решения прямых геодезических задач по ходу  $O-T-I$ :

$$X_1 = X_O + d_{OT} \cos \alpha_{OT} + d_{TI} \cos \alpha_{TI} = 3701,791 \text{ м}$$

$$Y_1 = Y_O + d_{OT} \sin \alpha_{OT} + d_{TI} \sin \alpha_{TI} = 7151,095 \text{ м}$$

Координаты остальных точек также определяем из решения прямых геодезических задач по ходу  $I-2-3-4$  с контрольным вычислением координат точки  $I$ :

$$X_2 = X_1 + d_{12} \cos \alpha_{12} = 3729,507 \text{ м}; \dots Y_2 = Y_1 + d_{12} \sin \alpha_{12} = 7139,614 \text{ м}$$

$$X_3 = X_2 + d_{23} \cos \alpha_{23} = 3758,208 \text{ м}; \dots Y_3 = Y_2 + d_{23} \sin \alpha_{23} = 7208,905 \text{ м}$$

$$X_4 = X_3 + d_{34} \cos \alpha_{34} = 3730,492 \text{ м}; \dots Y_4 = Y_3 + d_{34} \sin \alpha_{34} = 7220,386 \text{ м}$$

$$X_1 = X_4 + d_{41} \cos \alpha_{41} = 3701,791 \text{ м}; \dots Y_1 = Y_4 + d_{41} \sin \alpha_{41} = 7151,095 \text{ м}$$

Для определения координат створных точек необходимо решить систему уравнений для двух пересекающихся линий. Например, для точки 10 пересекающиеся линии  $AF$  и  $O-10$  имеют соответственно дирекционные углы  $\alpha_{O-10} = \alpha_I + 180^\circ = 67^\circ 30' + 180^\circ = 247^\circ 30'$ ;  $\alpha_{AF} = \alpha_{FA} + 180^\circ = 11^\circ 13' 23''$ .

Можно записать следующие системы уравнений для координат  $X$  и  $Y$  точки 10:

$$X_{10} = X_O + d_{O-10} \cos \alpha_{O-10} = X_A + d_{A-10} \cos \alpha_{AF}; \quad (10.19)$$

$$Y_{10} = Y_O + d_{O-10} \sin \alpha_{O-10} = Y_A + d_{A-10} \sin \alpha_{AF}$$

Из уравнений (10.19) выразим и вычислим значения неизвестных горизонтальных проложений:

$$d_{A-10} = \frac{(X_O - X_A) \operatorname{tg} \alpha_{O-10} - (Y_O - Y_A)}{\cos \alpha_{AF} \operatorname{tg} \alpha_{O-10} - \sin \alpha_{O-10}} = 31,382 \text{ м}$$

$$d_{O-10} = \frac{X_A - X_O + d_{A-10} \cos \alpha_{AF}}{\cos \alpha_{O-10}} = 66,732 \text{ м} \quad (10.20)$$

По формулам (10.19) находим значения координат точки 10:  $X_{10} = 3704,463 \text{ м}$ ;  $Y_{10} = 7118,348 \text{ м}$ .

Аналогичные уравнения составляют и для определения координат точек 20, 30 и 40.

В таблице 10.3 приведены проектные значения координат искомых точек, а также высоты этих точек, полученные с топографического плана.

Таблица 10.3

Проектные точки	$X$ , м	$Y$ , м	$H$ , м
10	3704,463	7118,348	119,05
20	3750,555	7229,624	124,55
30	3760,264	7167,465	124,40
40	3692,233	7195,644	122,10
1	3701,791	7151,095	121,30
2	3729,507	7139,614	121,90
3	3758,208	7208,905	124,65
4	3730,492	7220,386	123,35
$M$	Заданная проектная	высота	123,45

На этом заканчиваются подготовительные расчетные работы, после чего можно вычислить значения разбивочных элементов.

*Вычисление разбивочных элементов для створных точек 10, 20, 30 и 40.*

Каждую из указанных точек выносим на створ соответствующей линии с двух концов этой линии. Разбивочными элементами для выноса створных точек являются горизонтальные проложения  $d$  от исходных точек, а при практическом исполнении – наклонные расстояния  $s$ . Горизонтальные проложения находят из решения обратной геодезической задачи по координатам соответствующих точек. Например, для точки 10

$$d_{A-10} = \sqrt{(X_A - X_{10})^2 + (Y_A - Y_{10})^2} = 31,382 \text{ м}$$

$$d_{F-10} = \sqrt{(X_F - X_{10})^2 + (Y_F - Y_{10})^2} = 18,483 \text{ м}$$

Контроль:  $d_{A-10} + d_{F-10} = 49,865 \text{ м} = d_{F-A} (49,864 \text{ м; табл. 10.2})$ , что допустимо.

Наклонные расстояния определяем по формулам

$$s_{A-10} = \sqrt{d_{A-10}^2 + h_{10-A}^2} = 31,485 \text{ м}; \dots s_{F-10} = \sqrt{d_{F-10}^2 + h_{10-F}^2} = 18,548 \text{ м}, \text{ в которых}$$

$$h_{10-A} = H_{10} - H_A = 119,05 - 117,40 = +1,65 \text{ м}; \dots h_{10-F} = H_{10} - H_F = -1,55 \text{ м}.$$

Аналогичные вычисления выполняют и для остальных створных точек (табл. 10.4).

Таблица 10.4

Проектные точки	Исходные точки	Горизонтальные проложения, м	Превышения, м	Наклонные расстояния, м
10	A	31,382	+1,65	31,485
	F	18,483	-1,55	18,548
20	D	26,845	-1,50	26,887
	C	17,419	+1,20	17,460
30	E	36,459	+1,50	36,490
	D	52,175	-1,65	52,201
40	C	59,748	-1,25	59,761
	B	41,670	+1,75	41,707

При практическом построении створных точек, если требуется высокая точность построения проектных точек, вводят поправки за компарирование мерного прибора и поправки за температуру.

*Вычисление разбивочных элементов для точек 1, 2, 3 и 4.*

*Точка 1.* Выносится на местность способом прямой угловой засечки построением горизонтальных углов  $\beta_A$  и  $\beta_B$  в точках A и B. Горизонтальные углы (разбивочные элементы) определяются как разность дирекционных углов соответствующих направлений:

$$\beta_A = \alpha_{AB} - \alpha_{A1}; \quad \beta_B = \alpha_{B1} - \alpha_{BA} \quad (10.21)$$

Из решения обратной геодезической задачи

$$\alpha_{A1} = 54^\circ 06' 54''; \quad \alpha_{A1} = 338^\circ 35' 55''.$$

Следовательно,

$$\beta_A = 101^\circ 42' 40'' - 54^\circ 06' 54'' = 47^\circ 35' 46''; \quad \beta_B = 338^\circ 35' 55'' - 291^\circ 42' 40'' = 46^\circ 53' 15''.$$

*Точка 2.* выносится на местность способом линейной засечки с точек E и F расстояниями  $s_{E2}$  и  $s_{F2}$ .

Из решения обратной геодезической задачи горизонтальные проложения  $d_{E2} = 21,972 \text{ м}$ ;  $d_{F2} = 18,973 \text{ м}$ . Превышения  $h_{2-E} = -1,00 \text{ м}$ ;  $h_{2-F} = +1,30 \text{ м}$ . Следовательно,  $s_{E2} = 21,995 \text{ м}$  и  $s_{F2} = 19,017 \text{ м}$ .

*Точка 3.* Выносится на местность способом полярных координат с точки D от исходного направления DC ( $\alpha_{DC} = 153^\circ 29' 05''$ ). Разбивочными элементами являются горизонтальное проложение  $d_{D3}$  (наклонное расстояние  $s_{D3}$ ) линии D3 и горизонтальный угол в точке D ( $\beta_D$ ).

Из решения обратной геодезической задачи дирекционный угол  $\alpha_{D3} = 208^\circ 05' 04''$ ; горизонтальное проложение  $d_{D3} = 18,552$  м. Превышение  $h_{3-D} = 124,65 - 126,05 = -1,40$  м.

Горизонтальный угол  $\beta_D = \alpha_{D3} - \alpha_{DC} = 208^\circ 05' 04'' - 153^\circ 29' 05'' = 54^\circ 35' 59''$ . Наклонное расстояние  $s_{D3} = 18,605$  м.

*Точка 4.* Выносится на местность способом прямоугольных координат наклонными отрезками  $s_{CR}$  (по линии  $CB$ ) и  $s_{R4}$  (по перпендикуляру к линии  $CB$ ).

Горизонтальные проложения  $d_{CR}$  и  $d_{R4}$  указанных отрезков найдем из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} X_4 &= X_C + d_{CR} \cos \alpha_{CB} + d_{R4} \cos \alpha_{R4} \\ Y_4 &= Y_C + d_{CR} \sin \alpha_{CB} + d_{R4} \sin \alpha_{R4} \end{aligned} \quad (10.22)$$

где  $\alpha_{CB} = 224^\circ 20' 11''$ ;  $\alpha_{R4} = \alpha_{CB} + 90^\circ = 314^\circ 20' 11''$ .

После подстановки в уравнения (10.22) всех известных величин получим  $d_{CR} = 15,092$  м,  $d_{R4} = 9,041$  м.

С топографического плана получим высоту точки  $R$   $H_R = 122,90$  м. Следовательно,  $h_{R-C} = -0,45$  м,  $h_{4-R} = +0,45$  м.

Наклонные расстояния  $s_{CR} = 15,099$  м,  $s_{R4} = 9,052$  м.

После выноса на местность точек 1, 2, 3 и 4 выполняют контрольные промеры расстояний 1-2, 2-3, 3-4 и 4-1 с определением соответствующих горизонтальных проложений и сравнивают полученные значения с проектными. Кроме того, в точках 1, 2, 3 и 4 измеряют теодолитом проектные горизонтальные углы ( $90^\circ$ ).

*Точка М.* Вынос точки на проектную высоту (123,45 м, табл. 10.3) осуществляется с точки  $C$  с контрольным определением ее значения с исходной точки  $D$ .

Вычисляют проектное превышение  $h_{M-C(ПП)} = H_{M(ПП)} - H_C = 123,450 - 123,357 = +0,093$  м и контрольное проектное превышение  $h_{M-D(ПП)} = H_{M(ПП)} - H_D = 123,450 - 126,050 = -2,600$  м.

Нивелир устанавливают посередине между точками  $C$  и  $M$  и выполняют построение проектной отметки в соответствии с правилами, изложенными в § 98.

Аналогичные работы выполняют и при контрольной проверке построения проектной высоты с точки  $D$ . Однако здесь следует иметь ввиду, что, скорее всего, с одной станции невозможно будет увидеть обе рейки, установленные в точках  $D$  и  $M$ , поскольку превышение между этими точками значительное, почти равно длине нивелирной рейки. В этом случае проверка построения высоты выполняется двумя станциями (ходом) через икс-овую точку. Суммарное превышение ( $h_{x-D} + h_{M-x}$ ) должно соответствовать проектному превышению  $h_{M-D(ПП)}$ .

## § 101. Разбивочные работы при трассировании

В главе 9 были рассмотрены вопросы нивелирования трассы, например, при строительстве дороги. Перед выполнением нивелирования производят

разбивку пикетажа, для чего используется теодолит и мерный прибор (дальномер, светодальномер, рулетка), либо только электронный тахеометр.

Для задания направления трассы от какого-либо исходного направления вычисляют проектное значение угла  $\beta$  и строят этот угол на местности, т.е. задают начальное направление трассы от пикета ПК до первого угла ее поворота УП (рис. 10.15).

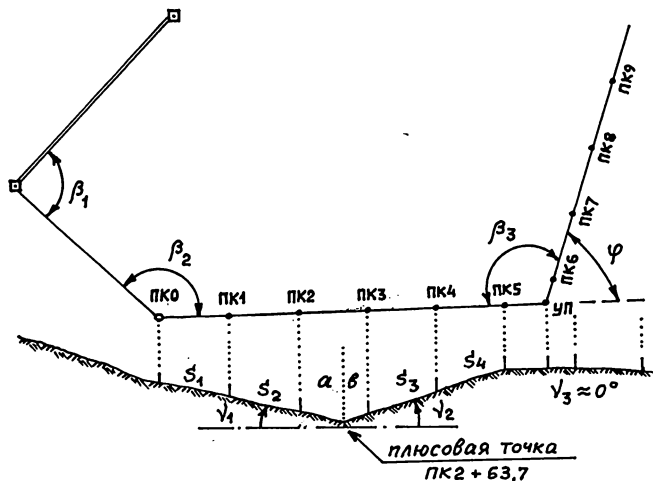


Рис. 10.15. Разбивочные работы при трассировании линейных сооружений.

Расстояние между пикетами соответствует 100 м в горизонтальном проложении (либо другому установленному расстоянию, например, 50 м). В связи с тем, что местность может иметь наклон к плоскости горизонта, в проектное расстояние вводят поправку за наклон. При перегибах местности между пикетами (например, между пикетами ПК2 и ПК3) поправки за наклон вводят для каждого из наклонных отрезков с учетом углов наклона  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

По мере удаления трассы от пикета ПК) створ линии задают теодолитом, последовательно перемещая его на другие пикеты, с визированием на удаленный задний пикет отсчетом по горизонтальному кругу  $0^\circ$ . В этом случае продолжение створа будет соответствовать отсчету по горизонтальному кругу  $180^\circ$ .

В точке угла поворота УП выполняют разбивку кривой заданного радиуса. Основные элементы кривой вычисляют по формулам (9.25) – (9.29).

В процессе разбивки кривой все пикеты за углом поворота следует переместить вперед на величину домера ( $D$ ), поскольку длина кривой всегда меньше двух ее тангенсов ( $T$ ).

Детальная разбивка кривой может выполняться несколькими способами (рис. 10.16).

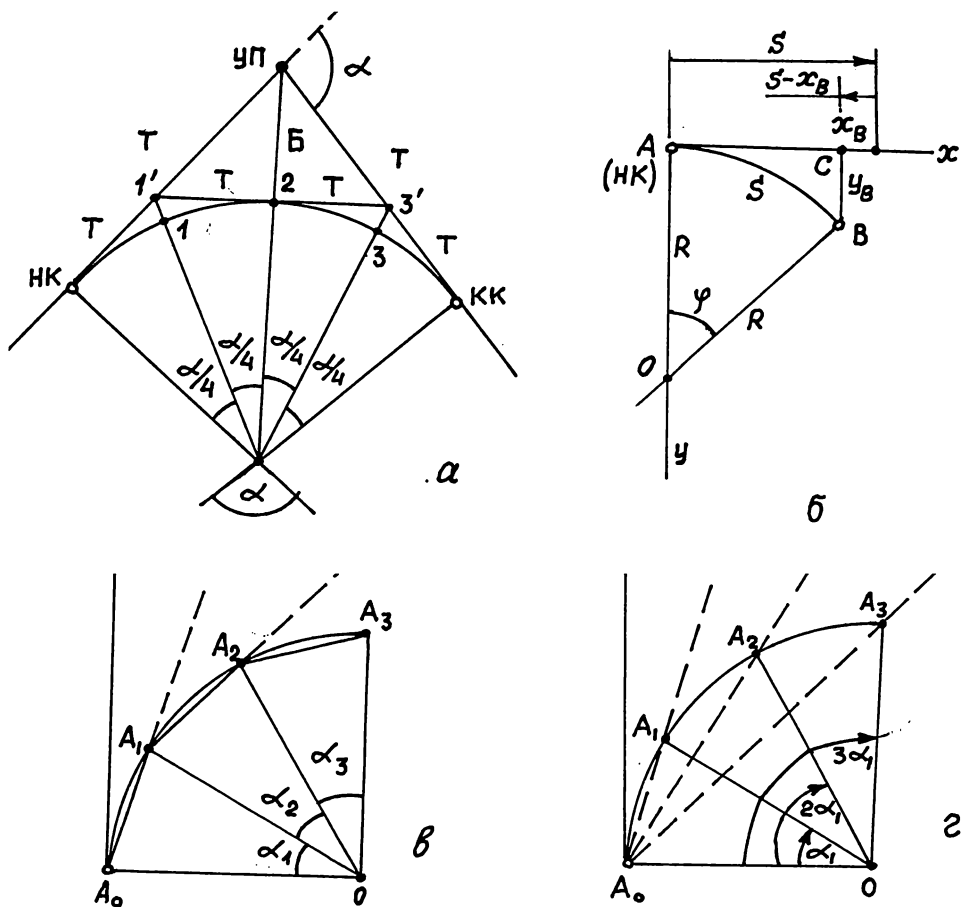


Рис. 10.16. Детальная разбивка кривых на трассе  
 а) разбивка кривой по частям; б) способ координат; в) способ хорд; г) способ углов

При *разбивке кривой по частям* (рис. 10.16 а) всю ее, от начала кривой (НК) до конца кривой (КК), делят на две одинаковые кривые: НК-М и М-КК. Для каждой из них производят детальную разбивку, принимая значения  $HKI' = I'2 = 23' = 3'KK = T$ . При этом значение  $T$  вычисляют по формуле

$$T = R \times \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}. \quad (10.23)$$

Точки  $I'$  и  $3'$  находятся на линиях НК-УП и КК-УП.

После построения точек  $I'$  и  $3'$  каждую из кривой разбивают *способом координат* (рис. 10.16 б).

В способе координат положение любой из точек кривой получают в условной системе прямоугольных координат  $xoy$ . Ось  $y$  – направление от начала кривой к ее центру  $O$ ; ось  $x$  – направление тангенса ( $T$ ), т.е. касательной в точке начала кривой.

Координаты точки  $B$ , которая находится на расстоянии  $s$ , будут равны

$$x_B = R \times \sin \varphi \quad ; \quad y_B = R(1 - \cos \varphi) = 2R \times \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (10.24)$$

где  $\varphi = \frac{s}{R} \rho$  ;  $\rho$ - радиан.

При радиусах до 500 м разбивку кривой ведут через 10 м, а при больших радиусах – через 20 м.

Технология разбивки следующая. От точки  $A$  рулеткой по направлению тангенса, задаваемому теодолитом, откладывают отрезок  $s$ . Находят разность  $(s - x)$  и откладывают ее в обратном направлении. В полученной точке устанавливают теодолит и строят им угол  $90^\circ$  от направления тангенса (линия  $CB$ ). Затем по направлению  $CB$  откладывают координату  $y$ .

Схема разбивки кривых *способом хорд* (продолженных или последовательных) представлена на рис. 10.16 в).

При детальной разбивке кривой отрезки (хорды)  $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = a$ . Вообще говоря, значение  $a$  может быть и произвольным, но не более длины имеющейся рулетки. Для точки  $A_1$

$$y_{A1} = \frac{a^2}{2R}; \quad x_{A1} = a - \frac{y^2}{2a}, \quad (10.25)$$

или

$$y_{A1} = 2R \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}; \quad x_{A1} = R \times \sin \alpha_1, \quad (10.26)$$

где  $\sin \frac{\alpha_1}{2} = \frac{a}{2R}$ .

Точки  $K_1$  и  $K_2$  и т.д. на кривой можно построить способом линейной засечки. По линии  $A_0B_0$  следует отложить хорду  $a$  до точки  $B_1$ , а затем из нее отрезком  $0,5s$  и из точки  $A_0$  отрезком  $a$  получить положение точки  $K_1$ . В этом случае  $s = \frac{a^2}{R}$ .

Чтобы построить точку  $A_2$  продолжают линию  $A_0A_1$  на расстояние  $a$  ( $A_1A_2 = a$ ). Из точки  $A_1$  радиусом  $a$  и из точки  $A_2'$  радиусом  $s$  засекают положение точки  $A_2$ . Последующие точки получают аналогично.

При детальной разбивке *способом углов* (рис. 10.16 г) на кривой получают равноотстоящие друг от друга точки  $A_1, A_2, \dots$ , как и в способе хорд. Для этого в точке  $A_0$  устанавливают теодолит и ориентируют  $0^\circ$  горизонтального круга по направлению  $A_0B_0$  (по линии тангенса). Затем устанавливают по горизонтальному кругу отсчет  $0,5\alpha_1$  и в этом направлении откладывают хорду  $a$  (в точке  $A_1$ ). Далее снова по горизонтальному кругу устанавливают отсчет  $2(0,5 \alpha_1)$ , один конец рулетки фиксируют в точке  $A_1$ , а другой ее конец на отсчете  $a$  совмещают в изображении через зрительную трубу теодолита с вертикальной нитью (точка  $A_2$ ) по команде наблюдателя. По аналогии с точкой  $A_2$  достраиваются остальные точки, изменяя каждый раз отсчет по горизонтальному кругу на  $0,5\alpha_1$ . Такие же действия выполняют и из точки  $KK$  конца кривой.

*Способ стягивающей хорды* (рис. 10.17) используют обычно в тех случаях, когда радиус кривой слишком большой, а также в тех случаях, когда нет доступа к центру кривой и для построения *переходных кривых*.



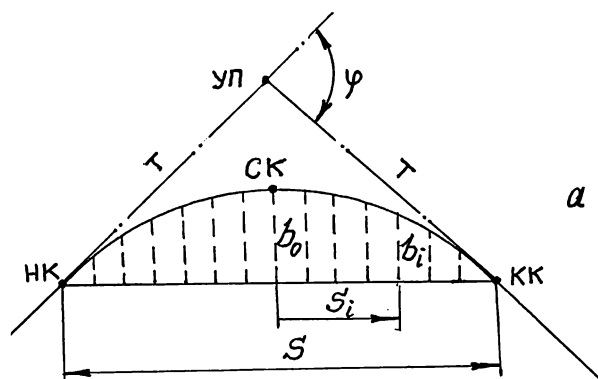


Рис. 10.17. Способ стягивающей хорды

При разбивке круговых кривых разбивочные работы выполняют по частям, короткими хордами, либо длинными хордами, но с учетом уклонения кривой от хорды. Если задаться значением угла  $\varphi$ , то можно определить длину хорды

$$S = 2R \times \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (10.27)$$

а величину стрелки прогиба  $b_o$  в середине кривой – по формуле

$$b_o = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{S}{2}\right)^2} = R - \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = R(1 - \cos \frac{\varphi}{2}) \quad (10.28)$$

Величины стрелок прогиба  $b_i$  получают по приближенной формуле:

$$b_i = b_o - \frac{S_i}{2R} \quad (10.29)$$

через шаг в 2 м по обе стороны от стрелки  $b_o$ . Поскольку круговая кривая симметричная, то величины рабочих промеров от середины кривой при равных шагах разбивки по обе стороны будут одинаковыми.

*Переходные кривые* выполняют в местах сопряжения круговых кривых с прямолинейными участками с целью ослабления резких ударов на поворотах при больших скоростях от действия центробежной силы. Для этого в местах сопряжений делают вставку (рис. 10.18), радиус которой изменяется от бесконечности (на прямой) до радиуса круговой кривой. После перехода через круговую кривую радиус изменяется соответственно от радиуса кривой до бесконечности.

Чаще всего для переходных кривых используют радиальную кривую (спираль), уравнение которой имеет вид

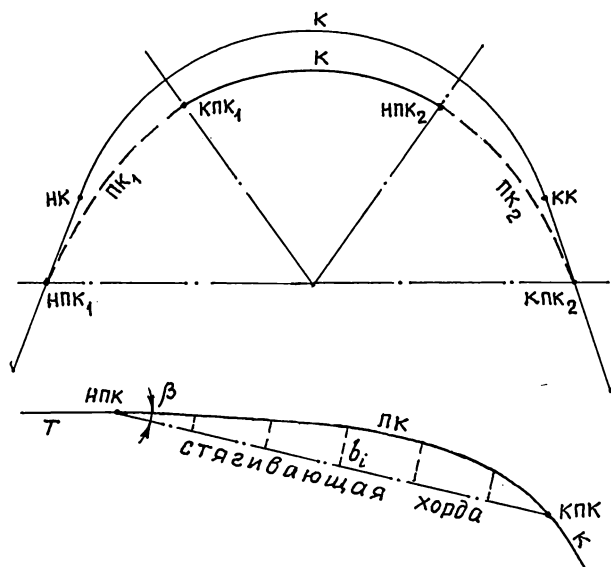


Рис. 10.18. Переходная кривая

$$\rho_i = \frac{C}{L_i}, \quad (10.30)$$

где  $C$  – параметр кривой (постоянный коэффициент; его выбирают в пределах 45000 – 150000 в зависимости от скорости движения поезда; при небольших скоростях  $C < 45000$ );  $L_i$  – длина переходной кривой до точки  $i$ ;  $\rho_i$  – радиус кривизны кривой в указанной точке.

Значения стрелок прогиба через определенный шаг вычисляют от стягивающей хорды с учетом параметров переходной кривой. Поскольку переходная кривая несимметричная, то величины стрелок прогиба будут различными, т.е. разбивку следует выполнять нарастающим итогом либо от НПК (начала переходной кривой), либо от ее конца (КПК). Для определения стрелок прогиба переходных кривых существуют специальные таблицы.

Способ стягивающей хорды является более точным из всех, рассмотренных выше, поскольку значения промеров  $b_i$  значительно меньше, чем промеры от тангенса.

## § 102. Разбивка фундаментов инженерных сооружений

Базовые (главные) оси сооружения закрепляют на местности постоянными знаками, которые устанавливают ниже глубины промерзания грунтов. Каждая из осей должна иметь не менее четырех знаков, по два на обеих ее сторонах. Остальные оси могут быть закреплены временными знаками по два знака на каждую из осей (рис. 10.19).

Для удобства использования на строительной площадке все оси, либо основную их часть, выносят на *обноску*. Обноской является доска, горизон-

тально закрепленная на столбах (стойках) на высоте примерно 0,5 м от поверхности земли. Существует и металлическая обноски многоуровневого использования. Ось на обноске фиксируют гвоздем. На металлической обноске имеется специальный хомут, который может в открепленном состоянии свободно передвигаться по обноске.

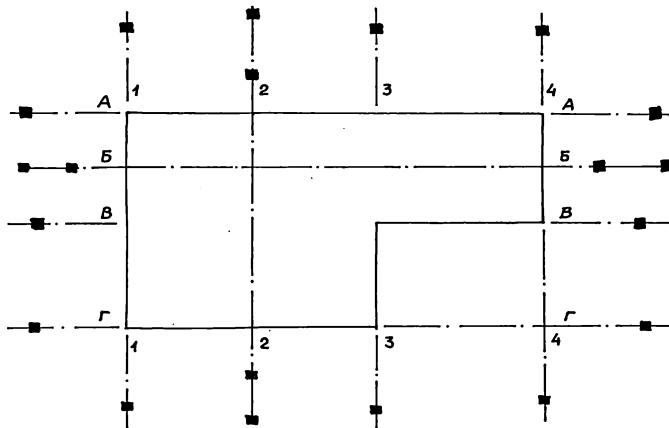


Рис. 10.19. Закрепление осей строящегося здания

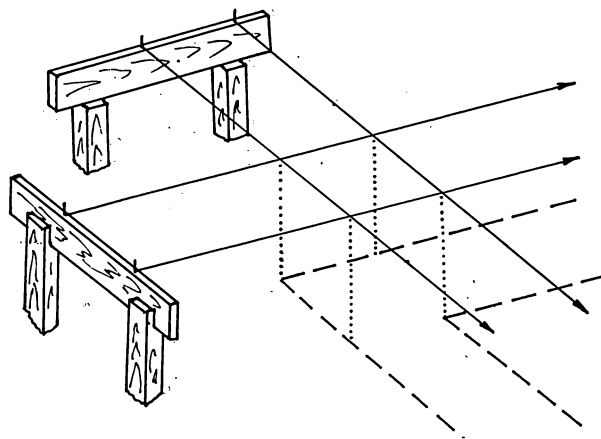


Рис. 10.20. Разбивка фундамента

Реже применяют *сплошную обноску* из-за ее громоздкости и сложности построения. Сплошная обноска выполняется прямолинейной, устанавливается строго параллельно основным осям по всему контуру здания, в связи с чем от нее можно непосредственно откладывать проектные расстояния. *Створная обноска* устанавливается фрагментами, в местах расположения осей, причем, на произвольных расстояниях от контура здания.

Створная обноска применяется и при разбивке фундаментов (рис. 10.20).

В этом случае одна из меток на обноске определяет положение габаритной (основной) оси строения, а вторую метку устанавливают в соответствии с проектными размерами фундамента. По меткам натягивают проволоку на соответствующую другую обноску и определяют положение контура фундамента по проекции проволоки на землю.

### § 103. Оценка точности разбивочных работ

На точность разбивочных работ влияют погрешности из-за центрирования прибора и визирных целей ( $m_{ц}$ ), погрешности фиксации точки на местности или конструкции сооружения ( $m_{ф}$ ), погрешности собственно разбивочных работ ( $m_{pp}$ ), которые зависят от геометрии способа разбивки, а также погрешности исходных данных ( $m_{исх}$ ), зависящие от точности определения координат геодезической разбивочной основы. При этом погрешности  $m_{исх}$  и  $m_{ц}$  определяются и геометрией способа разбивки. С учетом этого, общая погрешность разбивки ( $m_p$ ) определится суммой всех перечисленных выше погрешностей в вероятностном ее выражении:

$$m_p = \sqrt{m_{pp}^2 + m_{исх}^2 + m_{ц}^2 + m_{ф}^2}. \quad (10.31)$$

Выполним оценку каждого из слагаемых формулы (10.31) в зависимости от геометрии способа разбивки. При этом рассмотрим здесь только четыре основных способа разбивки, наиболее часто используемых при проведении указанных работ: способ прямой угловой засечки; способ обратной угловой засечки; способ линейной засечки; способ полярных координат.

Погрешности фиксации точки не зависят от геометрии способа разбивки, а определяются только технологической точностью закрепления точки на местности. Вынесенная точка может быть закреплена дюбелем в твердом покрытии, гвоздем на деревянной обноске, либо торце деревянного кола, накерниванием на металлических знаках или конструкциях сооружения и другими способами.

В способе прямой угловой засечки погрешность собственно разбивочных работ оценивается по одной из формул см. рис. 10.7:

$$m_{pp} = m_{\beta} \frac{b}{\rho \times \sin \gamma} \sqrt{\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2}; \quad (10.32)$$

$$m_{pp} = m_{\beta} \frac{1}{\rho \times \sin \gamma} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}; \quad (10.33)$$

где  $m_{\beta}$  - средняя квадратическая погрешность построения углов  $\beta_1$  и  $\beta_2$ ;  $\rho'' = 206265''$  - число секунд в радиане;  $s$  - расстояния от исходных пунктов до точки  $M$ ;  $\gamma$  - угол при точке  $M$ .

При симметричных построениях, а также при предварительных оценках, можно принимать  $s_1 = s_2 = s$ . Тогда

$$m_{pp} \approx m_{\beta} \frac{\sqrt{2}}{\rho \times \sin \gamma} s. \quad (10.34)$$

Максимальная точность построения точки  $M$  в данном способе достигается при  $\gamma \approx 109,5^\circ$ .

Погрешность исходных данных определяется суммарной погрешностью в положении исходных пунктов  $A$  и  $B$  ( $m_A$ ;  $m_B$ ). Часто принимают значения  $m_A = m_B = m_{AB}$ , исходя из равноточности построения геодезической основы в пределах локальной зоны, т.е. сравнительно близкого расположения данных исходных точек в общей системе построения опорной сети. Тогда, с учетом геометрии разбивки,

$$m_{ИСХ} = \frac{m_{AB}}{\sin \gamma} \sqrt{\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2} = \frac{m_{AB}}{b} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}. \quad (10.35)$$

Принимая для приближенных расчетов  $s_1 = s_2 = s$  и  $\gamma = 90^\circ$ , получим

$$m_{ИСХ} \approx \frac{m_{AB} \sqrt{2}}{b} s. \quad (10.36)$$

По аналогичным формулам определяют и погрешность центрирования теодолита в точках  $A$  и  $B$  и используемых визирных целей, последовательно устанавливаемых в тех же точках:

$$m_{Ц} = \frac{l}{\sin \gamma} \sqrt{\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2} = \frac{l}{b} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}, \quad (10.37)$$

где  $l$  – линейный элемент центрирования, определяемый несовпадением вертикальной оси вращения теодолита (визирной цели) с вершиной угла в соответствующей точке, либо с положением самой исходной точки (для визирных целей).

Если визирные цели не используются, т.е. наведение производится непосредственно на исходную точку, то

$$m_{Ц} = \frac{l}{2 \sin \gamma} \sqrt{\sin^2 \beta_1 + \sin^2 \beta_2} = \frac{l}{2b} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}. \quad (10.38)$$

Часто для предварительных оценок принимают  $s_1 = s_2 = s$ . В этом случае при использовании визирных целей  $m_{Ц} = l \frac{s}{b} \sqrt{2}$ , а при работе без визирных целей –  $m_{Ц} = l \frac{s}{b \sqrt{2}}$ .

В способе обратной угловой засечки (рис. 10.7) погрешность собственно разбивочных работ определяется по формуле

$$m_{PP} = \frac{m_s d_1}{\rho \times \sin(\beta_1 + \beta_2 + \omega)} \sqrt{\left(\frac{d_2}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{d_3}{b_2}\right)^2}. \quad (10.39)$$

Общая погрешность влияния исходных данных для приближенных оценок определяется по формуле

$$m_{ИСХ} = \frac{m_{ABC}}{\sin t} \times \frac{S}{b} \sqrt{4 + \cos t}, \quad (10.40)$$

где  $m_{ABC}$  – погрешность построения пунктов геодезической разбивочной основы;  $t = (\beta_1 + \beta_2 + \omega - 180^\circ)$ ;  $S$  и  $b$  – средние значения сторон и базисов разбивки.

В способе линейной засечки (рис. 10.10) практически во всех случаях полагают, что точность  $m_s$  отложения расстояний является одинаковой для  $s_1$  и  $s_2$ , что для симметричных построений при примерном равенстве этих расстояний вполне допустимо. В этом случае погрешность собственно разбивочных работ может быть оценена по формуле

$$m_{pp} = \frac{m_s \sqrt{2}}{\sin \gamma} . \quad (10.41)$$

Очевидно, что максимальная точность будет обеспечена при  $\gamma = 90^\circ$ , т.е. в этом случае  $m_{pp} = m_s \sqrt{2}$ .

Влияние погрешности исходных данных при  $m_A = m_B = m_{AB}$  получается из отношения

$$m_{ИCX} = \frac{m_{AB}}{\sin \gamma} , \quad (10.42)$$

а при  $\gamma = 90^\circ$   $m_{ИCX} = m_{AB}$ .

Если для построения расстояний используются оптические дальномеры, либо светодальномеры или электронные тахеометры, то обязательно необходимо учитывать в этом способе погрешность центрирования, которая здесь может быть оценена по формуле

$$m_{ц} = \frac{l}{\sin \gamma} , \quad (10.43)$$

а при  $\gamma = 90^\circ$   $m_{ц} = l$ .

В способе полярных координат (рис. 10.8) погрешность собственно разбивочных работ зависит от погрешности  $m_\beta$  построения угла и погрешности  $m_s$  построения расстояния:

$$m_{pp} = \sqrt{m_s^2 + \left( \frac{m_\beta}{\rho} \right)^2 s^2} . \quad (10.44)$$

Из практического опыта известно, что погрешность построения угла (в линейной форме) меньше, чем погрешность построения расстояния, т.е.  $\frac{m_\beta}{\rho} s < m_s$ . В связи с этим применять в формуле (10.44) принцип равных влияний нецелесообразно. В расчетах обычно используют коэффициент

$$\lambda = \frac{m_s}{m_\beta} \times \frac{\rho}{s} , \quad (10.45)$$

принимая его значение, равным 2 – 3 единицам. С учетом (10.45) формулу (10.44) можно записать в виде

$$m_{pp} = m_s \sqrt{\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2}} = m_\beta \frac{s}{\rho} \sqrt{\lambda^2 + 1} . \quad (10.46)$$

Влияние погрешностей исходных данных при  $m_A = m_B = m_{AB}$  и погрешностей центрирования оцениваются по практически идентичным формулам:

$$m_{ИCX} = m_{AB} \sqrt{1 + \left( \frac{s}{b} \right)^2 - \frac{s}{b} \cos \beta} , \quad (10.47)$$

$$m_{ц} = l \sqrt{1 + \left( \frac{s}{b} \right)^2 - \frac{s}{b} \cos \beta} . \quad (10.48)$$

Из формул (10.47) и (10.48) следует, что для ослабления влияния погрешностей исходных данных и погрешностей центрирования отношение  $s/b$  должно быть минимальным, а угол  $\beta$  должен быть меньше прямого. Т.е. базис разбивки должен быть больше проектного расстояния.

При приближенных расчетах принимают  $\beta = 90^\circ$  и  $s = b$ . Тогда  $m_{ИСХ} = m_{AB} \sqrt{2}$  и  $m_{Ц} = l \sqrt{2}$ .

Необходимая точность разбивочных работ определяется техническим заданием, и для исполнителя работ принятая точность построения проектных точек является безусловно обязательной. В связи с этим исполнитель должен определить, какими приборами в том и другом способах разбивки он сможет обеспечить заданную точность построений непосредственно на местности. Рассмотрим решение указанной задачи для некоторых рассмотренных выше способов.

Значения точностных характеристик геодезических приборов входят как аргумент в формулы погрешностей собственно разбивочных работ ( $m_{PP}$ ). Выразим в формуле (10.31) значение  $m_{PP}$  через другие погрешности, обозначив общую погрешность разбивки, определенную техническим заданием, через  $m_{ТЗ}$ :

$$m_{PP} = \sqrt{m_{ТЗ}^2 - m_{ИСХ}^2 - m_{Ц}^2 - m_{\Phi}^2}. \quad (10.49)$$

С учетом формулы (10.32) для *способа прямой угловой засечки* можно записать условие выбора угломерного прибора для обеспечения заданной точности построения проектной точки:

$$m_{\beta} \leq \rho \times \sin \gamma \sqrt{\frac{m_{ТЗ}^2 - m_{ИСХ}^2 - m_{Ц}^2 - m_{\Phi}^2}{s_1^2 + s_2^2}}, \quad (10.50)$$

причем погрешность исходных данных и погрешность центрирования предварительно вычисляются соответственно по формулам (10.35) и (10.37).

Из аналогичных преобразований для *способа обратной угловой засечки* получим

$$m_{\beta} \leq \frac{\rho \times \sin(\beta_1 + \beta_2 + \omega)}{d_1} \sqrt{\frac{m_{ТЗ}^2 - m_{ИСХ}^2 m_{Ц}^2 - m_{\Phi}^2}{\left(d_2 / \frac{1}{b_1}\right)^2 + \left(d_3 / \frac{1}{b_2}\right)^2}}, \quad (10.51)$$

для *способа линейной засечки* без учета погрешности центрирования -

$$m_s \leq \sin \gamma \sqrt{\frac{m_{ТЗ}^2 - m_{ИСХ}^2 - m_{\Phi}^2}{2}} \quad (10.52)$$

и с учетом погрешности центрирования -

$$m_s \leq \sin \gamma \sqrt{\frac{m_{ТЗ}^2 - m_{ИСХ}^2 - m_{Ц}^2 - m_{\Phi}^2}{2}}. \quad (10.53)$$

В формулах (10.51) – (10.53) значения погрешностей исходных данных и погрешностей центрирования предварительно вычисляют по формулам, приведенным выше для указанных способов разбивки.

При оценках выбора технических средств для построения проектных точек *способом полярных координат* обычно сначала выбирают углоизмерительный прибор, точность которого должна удовлетворять условию:

$$m_{\beta} \leq \frac{\rho}{s} \sqrt{\frac{m_{ТЗ}^2 - m_{ИСХ}^2 - m_{Ц}^2 - m_{\Phi}^2}{\lambda^2 + 1}}. \quad (10.54)$$

Значения  $m_{ИСХ}$  и  $m_{Ц}$  здесь определяют по формулам (10.47) и (10.49).

После выбора углоизмерительного прибора по формуле (10.45) выполняют оценку допустимой погрешности построения расстояния:

$$m_s \leq \lambda \frac{m_\beta}{\rho} s, \quad (10.55)$$

Рассмотрим численные примеры по оценке выбора технических средств, при использовании способов угловой и линейной засечек и способа полярных координат, разбивочные элементы для которых определены в примере § 96.

**Пример 10.4.** Выбор технических средств для производства разбивочных работ.

Исходные данные см. в § 96. Заданная точность выноса проектных точек 1, 2, 3, и 4 сооружения  $m_{ТЗ} = 10$  мм;  $l = 1,5$  мм;  $m_\phi = 2$  мм; погрешность в координатах исходных пунктов  $m_A = m_B = m_{AB} = 5$  мм.

**Решение.**

*Способ прямой угловой засечки (точка 1).*

Приближенные (для оценки) значения:  $s_1 = 48,0$  м;  $s_2 = 43,1$  м;  $b = 56,3$  м;  $\gamma = 85^\circ$ .

Погрешность исходных данных – формула (10.35) –  $m_{исх} = 5,7$  мм; погрешность центрирования – формула (10.37) –  $m_{ц} = 1,7$  мм; допустимая погрешность построения угла – формула (10.50) –  $m_\beta \leq 25''$ . Целесообразно использовать для разбивки теодолит отечественного производства Т15, либо зарубежного точностью  $20''$ .

*Способ линейной засечки (точка 2).*

Приближенные (для оценки) значения:  $s_1 = 22,0$  м;  $s_2 = 19,0$  м;  $b = 28,8$  м;  $\gamma = 88,9^\circ$ .

Погрешность исходных данных – формула (10.42) –  $m_{исх} = 5,0$  мм; допустимая погрешность построения расстояния – формула (10.52) –  $m_s \leq 6$  мм. Относительная

средняя квадратическая погрешность для худших условий составит  $\delta \leq \frac{m_s}{s_{\max}} = \frac{1}{3600}$ .

Практически такую точность обеспечит рулетка Р50 1-го или 2-го класса точности.

*Способ полярных координат (точка 3).* Коэффициент  $\lambda = 2$ .

Приближенные (для оценки) значения:  $s = 18,6$  м;  $b = 44,3$  м;  $\beta = 54^\circ 36'$ .

Погрешность исходных данных – формула (9.47) –  $m_{исх} = 4,8$  мм; погрешность центрирования – формула (9.48) –  $m_{ц} = 1,4$  мм; допустимая погрешность построения угла – формула (9.54) –  $m_\beta \leq 42''$ .

Для работы выбираем теодолит Т30.

Допустимая погрешность построения расстояния – формула (9.55) –  $m_s \leq 7,6$  мм (при этом обеспечивается некоторый запас точности, поскольку точность теодолита почти в полтора раза превышает необходимую точность построения угла).

Относительная средняя квадратическая погрешность составит  $\delta \leq \frac{7,6}{18600} = \frac{1}{2500}$ .

Практически такую точность обеспечит любая рулетка.

## Глава 11

# ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАБОТЫ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

## § 104. Общие положения

Геодезические работы в строительстве представляют собой комплекс измерений, вычислений и построений на местности, при котором должно обеспечиваться проектное размещение сооружений с необходимой точностью и возведение их конструкций (элементов) в полном соответствии с геометрическими их параметрами и требованиями нормативных документов.



Решение указанных задач осуществляется в соответствии с этапами строительно-монтажного производства.

Перед началом строительства проводят ряд организационно-технических мероприятий, которые должны обеспечить плановые показатели строительства с соблюдением требуемой технологии и последовательности работ. Строительство может быть начато только после отвода на местности контура участка работ и создания разбивочной геодезической основы, предусматривающей не только выполнение разбивочных работ, но и необходимые наблюдения за деформациями строящегося объекта и сооружений, которые попадают в зону влияния строительства.

При подготовке к строительству изучают проектную документацию, которая содержит стройгенпланы для подготовительного и основного этапов строительства и пояснительную записку. Стройгенпланы обязательно содержат ситуационные планы с нанесенными на них знаками планово-высотной геодезической основы. В пояснительной записке имеются указания о методах выполнения инструментального контроля за качеством ведения строительных работ, сроках и объемах производства геодезических и маркшейдерских (для объектов шахтного строительства) работ. Устанавливается потребность на те или иные инструменты, использование которых позволит обеспечить с необходимой точностью все необходимые инженерно-геодезические работы.

В связи с тем, что нормативные документы не могут в полной мере регламентировать строительство различных инженерных сооружений, каждый проект является индивидуальным как для строительной организации, так и для геодезической службы.

Геодезическая служба строительно-монтажной организации производит приемку главной геодезической разбивочной основы: надежность ее закрепления в натуре; обеспеченность геодезическими знаками для всех запланированных работ; при необходимости принимает решение о сгущении главной геодезической основы и др. Геодезическая служба осуществляет совместно с техническим отделом приемку от заказчика проектной документации, дает по ней замечания, касающиеся несоответствий геометрических параметров запроектированного сооружения, принимает участие в выносе и закреплении главных и основных осей сооружения, выполняет детальные разбивки в процессе строительства, производит периодический геодезический контроль за неизменностью положения геодезических пунктов разбивочной основы, выполняет восстановление геодезических знаков при их утрате, либо установку дублирующих знаков для обеспечения сохранности главных или основных осей.

Геодезические работы в строительстве выполняются в несколько последовательных этапов.

При выборе площадки под строительство геодезическая служба собирает, анализирует и обобщает материал, касающийся обеспечения строительства геодезической основой: наличие и состояние геодезических пунктов и реперов нивелирной сети: необходимое количество пунктов и т.п. На этапе *строительного проектирования* проводятся топографо-геодезические изыс-

кания и геодезическое обеспечение других видов изысканий. На *подготовительном этапе строительства* производится построение геодезической разбивочной основы, инженерная подготовка территории (планировочные работы, прокладка подъездных дорог и подземных коммуникаций), вынос в натуру главных и основных осей. На этапе *основного периода строительства* производится вынос в натуру осей конструктивных элементов, геометрическое обеспечение строительно-монтажного производства, исполнительная съемка законченных строительством элементов и составление соответствующей документации. При *окончании строительства* составляется и сдается технический отчет о результатах выполненных геодезических работ, составляется исполнительный генплан, специальные исполнительные инженерные планы, профили и разрезы.

## **§ 105. Краткие сведения об объектах строительства**

К основным объектам строительства относятся: промышленные сооружения; гражданские здания; территории населенных пунктов, на которых производится планировка и застройка; подземные коммуникации; дороги и мостовые сооружения; гидротехнические сооружения; тоннели; линии электропередач и магистральные трубопроводы и др.

*Промышленные предприятия* представляют собой комплекс сооружений, которые обеспечивают производство и выпуск определенной продукции. Эти сооружения предприятий и называют промышленными: здания, в которых осуществляется технологический процесс; здания энергообеспечения и других установок; склады; коммуникации и др.

Промышленные здания делятся на одноэтажные, многоэтажные, однопролетные и многопролетные. По конструкции в большинстве – это каркасные здания с перекрытиями в виде ферм или крупноразмерных балок. Большинство промышленных сооружений оборудовано мостовыми или козловыми кранами для перемещения грузов. Вертикальными несущими элементами каркасных здания являются *колонны*, которые устанавливают на фундаменты. Расстояние между колоннами, расположенными по продольным осям, называется *пролетом*, а вдоль продольной оси – *шагом*. Связь колонн по продольной оси осуществляется с помощью *подстропильных ферм* и *фундаментных балок*. Поперечная связь обеспечивается *стропильными фермами*. Перекрытия и стены закрывают *панелями*.

*Гражданские здания* могут быть по своим конструктивным признакам каменно-кирпичными, монолитными, крупноблочными, крупнопанельными, каркасными, объемно-блочными. По этажности они подразделяются на малоэтажные (1-2 этажа), среднеэтажные (3-5 этажей), многоэтажные (6-12 этажей), повышенной этажности (13-22 этажа), высотные (выше 22 этажей). По конфигурации они могут быть односекционными (с 1 подъездом), удлиненные (более двух секций) и сложные (круглые, с разворотом и смещением секций, многогранники и т.п.).

Сложные конструктивные построения представляют собой *мостовые сооружения*, которые возводят в местах многоярусных автомобильных развязок, эстакадные сооружения линий метро и др. Основными их конструктивными элементами являются мостовые опоры и пролетные части.

*Гидротехнические сооружения* условно делят на три вида: водонапорные (дамбы и плотины), водопроводящие (каналы, тоннели, трубопроводы) и регуляционные (волнобой, льдозащитные стенки, системы углубления дна и берега).

К *подземным коммуникациям* относятся сети водопровода, канализации, газоснабжения, теплоснабжения, водостока, дренажа, электро- и телефонные линии связи и др.

*Объектами планировки и застройки* являются функциональные зоны: *селитебная* (жилые районы, общественные центры, зоны зеленых насаждений); *промышленная*; *коммунально-складская* (базы, гаражи, автобусные и троллейбусные парки, таксопарки, трамвайные депо); *внешнего транспорта* (пассажирские и грузовые станции, порты, пристани и др.). В основной состав геодезических работ в указанных зонах входит: составление и расчеты проекта *красных линий* (границ между всеми видами улиц и проездов и основными градообразующими элементами – функциональными зонами); составление плана организации рельефа и вынесение в натуру проекта организации рельефа; вынесение в натуру осей проездов, зданий и сооружений.

*Линии электропередач и связи* делятся на кабельные (подземные) и воздушные. *Магистральные трубопроводы* предназначены для транспортировки на дальние расстояния нефти, нефтяных продуктов, газа, воды. Они бывают подземными и наземными.

## **§ 106. Геодезические работы при строительстве промышленных сооружений**

Особое место при строительстве сооружений промышленного предприятия, кроме разбивочных работ, занимают геодезические работы по установке и контролю установки конструктивных строительных элементов здания. Наиболее важными из них являются колонны, которые воспринимают на себя нагрузки от строительных конструкций, а также грузоподъемных машин и механизмов. Кроме того, во многих случаях из-за работы технологического оборудования в процессе производства возникают вибрационные воздействия на несущие элементы.

Предварительно устанавливают фундаментные стаканы. Разбивочные оси фундамента выносят на контур опалубки и используют в дальнейшем для установки закладных деталей, которыми являются анкерные болты, опорные плиты и др. На проектную высоту анкерные болты устанавливают с помощью нивелира.

Колонны у основания имеют осевые метки, которые при установке совмещают с осями, вынесенными на поверхность фундамента.

В вертикальное положение колонны устанавливают с помощью нитяного отвеса, теодолита, либо способом бокового нивелирования.

Определены следующие требования по монтажу колонн:

- для колонн высотой менее 15 м допускается смещение нижней ее части от проектного положения до 5 мм, в верхней части – до 15 мм;
- для колонн высотой более 15 м допускается смещение в нижней части до 5 мм, в верхней части до 0,001 Н мм;
- отклонение опорной поверхности колонн по высоте может быть не более 5 мм.

Установка ферм, подкрановых балок или ригелей производится по их осевым меткам и меткам на колоннах. Для горизонтирования указанных элементов предварительно нивелируют опорные поверхности колонн и подбирают соответствующие металлические подкладки.

Установка подкрановых балок выполняется по отвесу, подвешенному на горизонтально натянутой вдоль колонн проволоке. Проволоку устанавливают на кронштейнах крайних колонн в известном проектном положении.

Каждая нитка рельсов подкрановых путей должна быть прямолинейной и горизонтальной, параллельной другой нитке и находиться с ней в одной горизонтальной плоскости. При укладке отклонение рельса от прямой линии не должно превышать 15 мм (при эксплуатации – 20 мм). Такие же требования и на разность отметок головок рельсов в поперечном сечении. Разность отметок головок рельса на соседних колоннах при укладке должна быть не более 10 мм (при эксплуатации – не более 15 мм). Колебание расстояния между осями рельсов при укладке – не более 10 мм (при эксплуатации – не более 15 мм).

Монтаж рельсов выполняют от осей колонн или пролетов. Эти оси выносят на специальные кронштейны, либо непосредственно на боковую поверхность колонн. Разбивка точек осей рельсов выполняется через каждые 30-40 м (не более 50 м) до конца подкранового пути.

При эксплуатации мостовых кранов ведут постоянные геодезические наблюдения за состоянием подкрановых путей. Чаще всего для этого используют метод геометрического нивелирования (рис. 11.1 а). На конструкциях мостового крана в двух (или отдельно – одной) точках подвешивают отвес с прикрепленной к нему шкалой (реечкой) с миллиметровыми делениями. При прокатке крана берут отсчеты по реечкам и составляют профили, по которым судят о высотном положении головок рельсов. В тех случаях, когда невозможно использовать способ геометрического нивелирования, используют тригонометрическое нивелирование (рис. 11.1 б).

Расстояние между рельсами чаще определяют непосредственно, с помощью компарированной рулетки с учетом поправок за температуру и провес ленты. Существуют и другие способы измерения расстояний между рельсами, например, основанные на построении линейно-угловых геодезических систем (прямой угловой засечки в сочетании с линейной засечкой, либо раздельно каждый из них).

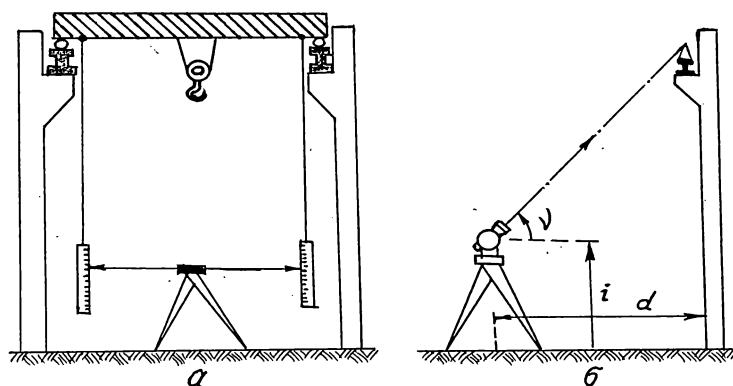


Рис. 11.1. Нивелирование подкрановых путей  
а) геометрическое нивелирование; б) тригонометрическое нивелирование

В настоящее время проверку прямолинейности рельсов производят с помощью лазерных приборов (метод оптического створа или оптической струны). Лазер устанавливают на одном из концов рельсового пути и наводят световое пятно на центр экрана с делениями, установленного на другом конце. При прокатке экрана отклонение рельса в горизонтальном направлении фиксируется непосредственно на экране.

Следует отметить, что геодезическое обеспечение монтажных работ, а также и эксплуатационного периода, требует применения разнообразного оборудования и приборов, которые по конструкции не относятся к рассмотренному выше геодезическому оборудованию и приборам. Наряду с теодолитами, нивелирами, мерными приборами разных классов точности используются специальные приборы для выверки прямолинейности, кренов малого порядка, перекосов и т.п. Чаще всего эти приборы относятся к оптическим и оптико-электронным с автоматизированным съемом информации. Зачастую при строительстве уникальных сооружений, а также строительстве особых прецизионных технологических систем и линий требуется разработка новых приборов и методов. Осуществляется переход к автоматической сигнализации отклонений геометрических параметров оборудования за пределы допуска. Применение, например, лазерных систем для контроля положения рельсового пути обеспечивает точность порядка 2-3 мм на расстояниях до 300 м. Лазерные приборы используются при выполнении разметок на высотных сооружениях и сооружениях башенного типа, при выверке вращающихся печей, контроле работы конвейеров, прокатных станков и мн.др.

К сооружениям башенного типа относятся дымовые трубы, радио-телевизионные башни, ректификационные колонны и грануляционные башни, градирни, водонапорные башни, копры. Их особенность заключается в том, что при сравнительно малой опорной площади они имеют большую высоту. Дымовые трубы достигают высоты 320 м (металлические) и 400 м (железобетонные), градирни – до 160 м, башенные копры – до 110 м.

*Градирня* – сооружение, предназначенное для охлаждения воды. *Копер* сооружают над стволом шахты; он служит для подъема на поверхность и спуска в шахту механизмов и оборудования, руды и породы, людей.

Строительство сооружений башенного типа требует выполнения специальных геодезических работ:

- создание специального геодезического обоснования, с пунктов которого должны быть выполнены как все разбивочные работы, так и контроль за возведением сооружения;
- контроль за сборкой и установкой монтажного оборудования;
- обеспечение вертикальности установки оси сооружения, соблюдения его геометрических форм в различных частях и на разных высотах;
- изучение характера возможных деформаций сооружения, которые могут повлиять на качество строительно-монтажных работ; в некоторых случаях – организация геодезического мониторинга еще на стадии строительства за деформациями сооружения.

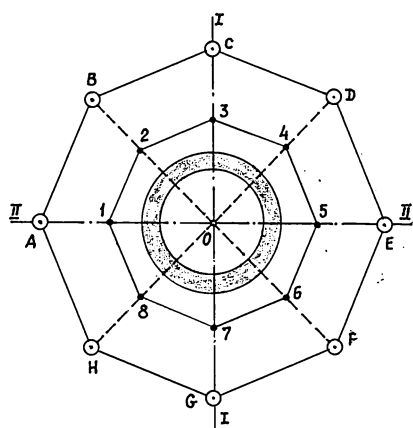


Рис. 11.2. Геодезическая разбивочная основа для строительства башенных сооружений

Высокие требования предъявляются к созданию планового геодезического обоснования. Чаще всего оно строится в виде двух ступеней: опорная сеть (А, В, С, D, E, F, G) и рабочая технологическая основа (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) - рис. 11.2. Опорную внешнюю сеть строят до начала строительства, а рабочую технологическую основу – после завершения нулевого цикла. С опорной сети выносят центр сооружения, его основные оси, выполняют наблюдения за деформациями и производят исполнительную съемку.

Для создания высотной основы вблизи сооружения закладывают не менее трех грунтовых реперов, исходные высоты которых используют для строительно-монтажных работ, а также при наблюдениях за деформациями в в системе *наблюдательной станции*.

Особенности выполнения геодезических работ при строительстве сооружений башенного типа зависят от назначения сооружения, его вида и типа применяемой при возведении опалубки. При этом общие приемы исполнения работ применимы практически для любых сооружений. К таким приемам относится построение вертикальных осей с горизонта на горизонт с помощью приборов вертикального проектирования, либо с помощью тяжелых отвесов. Построение и перенос осей выполняют ночью или утром, в безветренную погоду, для исключения влияния солнечного нагрева и ветровой нагрузки.

Передачу высот с одного мон-

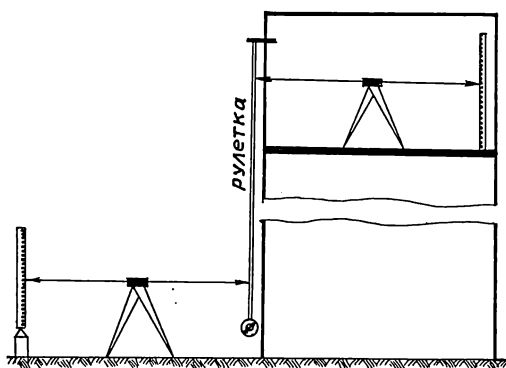


Рис. 11.3. Передача высот с одного монтажного горизонта на другой

тажного горизонта на другой выполняют способом геометрического нивелирования по схеме, приведенной на рис. 11.3. Положение щита опалубки относительно вертикальной оси башни определяют способом вертикального проектирования с нижнего монтажного горизонта, либо способом бокового нивелирования. Тем же способом вертикального проектирования контролируют отклонение оси сооружения от вертикали.

## § 107. Геодезические работы при строительстве гражданских зданий

В большинстве случаев технология строительства гражданских зданий сводится к следующим основным этапам: подготовка котлована; установка свай; возведение фундамента и перекрытий подвала; возведение стен; установка технологического оборудования.

Первые три вида работ относятся к т.н. *нулевому циклу*, или подземному циклу, заканчивающемуся на этапе возведения здания до *нулевой отметки*, т.е. отметки *чистого пола* (1-й этаж).

Строительство котлована включает в себя геодезическую разбивку его границы, рытье котлована, геодезический контроль за соблюдением геометрических параметров, передача осей и высот в котлован, исполнительная съемка подготовленного котлована и подсчет объемов земляных работ.

В связи с тем, что грунты, слагающие дно котлована, будут нести на себе нагрузку от сооружения, не допускается излишняя углубка, поскольку при переборе глубины нарушается естественная структура грунта. При геодезическом контроле вручную зачищают последние 10-15 см грунта.

При установке свай выполняют разбивку их положения от осей здания и маркируют эти точки на торце колышка, забиваемого в уровень с землей.

Каждую сваю размечают на метры от ее острия (номером метра) яркой краской и буквами ПГ (проектная глубина погружения). Контроль за вертикальностью погружения осуществляют с помощью теодолита или тяжелого отвеса. Отклонения сваи от вертикальности должны быть не более 0,2 - 0,4 ее поперечного размера.

После установки свай производят исполнительную их съемку и производят сопоставление с проектом.

Для установки фундаментов без свай на дно котлована переносят и закрепляют все продольные и поперечные оси.

Готовые фундаментные блоки устанавливают в проектное положение в соответствии с разбивкой с непосредственным контролем геометрических размеров рулеткой. Створ центров фундаментных блоков задают теодолитом

(удобно работать одновременно двумя теодолитами в перпендикулярных створах).

Если фундамент возводят в скользящей опалубке, то геодезическими методами контролируют положение опалубки в плане и по вертикали. При деформациях опалубки на недопустимую величину работы приостанавливают и переводят опалубку в проектное положение.

При исполнительной съемке фундаментов в плане и по высоте одновременно на боковые и верхние части фундаментов переносят оси. Это позволяет проконтролировать возможные отступления от проекта.

Значительный объем геодезических работ производится при построении базисных осевых систем и разбивке осей на исходном горизонте, которым называют горизонт монтажной площадки по завершении нулевого цикла. Базисные фигуры осевой системы по своей форме повторяют конфигурацию здания и представляют собой геометрически правильные фигуры со сторонами, параллельными осям здания. Очевидно, что базисные фигуры получаются меньших размеров, чем габариты здания. Последующая разбивка от базисных фигур выполняется промерами по проектной разнице расстояний между осью и стороной базисной фигуры. Точность построения плановой сети на монтажном горизонте довольно высокая, 1-2 мм. Для обеспечения указанной точности применяют точные теодолиты и компарированные рулетки. При измерениях рулетками обеспечивают необходимое натяжение (10 кг) и учитывают поправку за температуру.

Для вычисления координат точек базисных осевых систем результаты измерений в геодезических построениях предварительно уравнивают, полученные уравненные значения сравнивают с проектными и при необходимости выполняют редуцирование.

Чаще всего базисными фигурами являются прямоугольники с диагоналями и центральные системы, реже – прямые или ломаные линии. При построениях преимущественно используют метод трилатерации короткими сторонами (микротрилатерация), что связано с большими погрешностями при использовании угломерных приборов из-за значительной погрешности центрирования на коротких сторонах. При построении прямых или ломаных линий их точки привязывают способом угловой засечки к исходной геодезической основе стройплощадки в сочетании с линейными промерами на исходном и монтажном горизонтах, т.е. выполняют линейно-угловые построения.

Передача осей на монтажный горизонт при строительстве зданий малой и средней этажности чаще всего выполняется способом наклонного проектирования (рис. 11.4) с двух станций, располагаемых в створах соответствующих осей. Вынос направлений на монтажный горизонт выполняют при двух положениях, КП и КЛ, и определяют среднее из них. При строительстве зданий повышенной этажности целесообразно использовать способ вертикального проектирования (рис. 11.5) через специальные технологические отверстия. При этом возможно проектирование как с исходного на монтажные горизонты (сквозное проектирование), так и поэтапное проектирование с



горизонта на горизонт (шаговое). Для наклонного проектирования используют теодолиты Т2, а для вертикального проектирования приборы типа ПОВП и PZL (Карл Цейс).

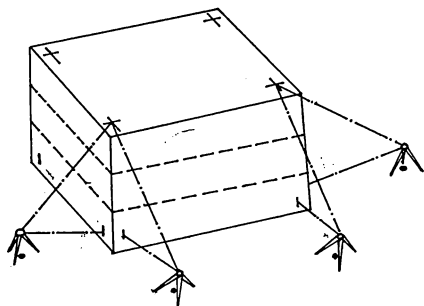


Рис. 11.4. Передача осей на монтажный горизонт наклонным лучом

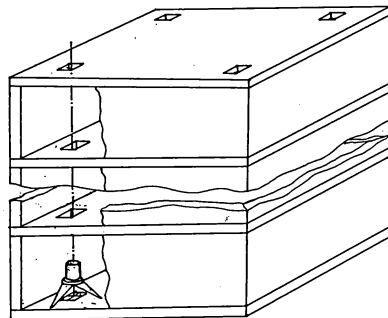


Рис. 11.5. Передача осей на монтажный горизонт способом вертикального проектирования

Высотные сети передают на монтажные горизонты способом геометрического нивелирования с использованием нивелиров НЗ. В некоторых случаях отметку на монтажный горизонт передают непосредственно линейными промерами с фиксацией на конструкциях условного монтажного горизонта, отличающегося от проектного на некоторую *большую* величину.

Геодезические работы при возведении крупнопанельных, каркасных, блочных, кирпичных зданий и зданий из монолитного железобетона регламентируются специальными инструкциями, рекомендациями, наставлениями, в которых отражаются некоторые особенности и технологические требования по установке тех или иных элементов при обеспечении заданной точности их установки. В любом случае необходимо обеспечивать установку элементов в их проектном положении по соответствующим осям, вертикальности, по высоте и взаимному расположению.

## § 108. Геодезические работы при строительстве дорог и мостовых сооружений

Геодезические работы при строительстве дорог начинают с детальной разбивки ее оси по материалам предыдущего трассирования. При этом восстанавливают утраченные пикеты, углы поворота и главные точки круговых кривых. Выполняют детальную разбивку кривых одним из известных способов. Кроме того, производят контрольное нивелирование по пикетажу и плюсовым точкам, разбивают, при необходимости, дополнительные поперечные профили. После выполнения указанных работ трассу окончательно закрепляют на местности знаками, располагаемыми вне зоны земляных работ, и сгущают сеть рабочих реперов из расчета : 1 репер на 4-5 пикетов трассы.

В зависимости от условий местности и положения проектной линии трассы выполняют разбивку земляного полотна дороги для различных слу-

чаев положения проектного и поперечного профилей трассы. Разбивка земельного полотна производится с учетом обустройства проезжей части, обочин, откосов и кюветов, соблюдением проектных уклонов в продольном и поперечном направлениях. Поперечные уклоны необходимы для обеспечения отвода воды в том и другом направлениях от оси дороги, либо в одном каком-либо направлении, а также для обеспечения необходимой устойчивости движущегося на закруглениях транспорта. Поперечные уклоны не должны отличаться от проектных не более, чем на 0,030.

Исполнительная геодезическая съемка выполняется после возведения земельного полотна и после окончательного строительства дороги.

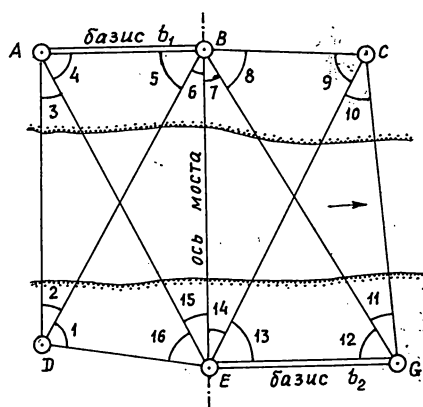


Рис. 11.6. Триангуляция. Сдвоенный геодезический четырехугольник

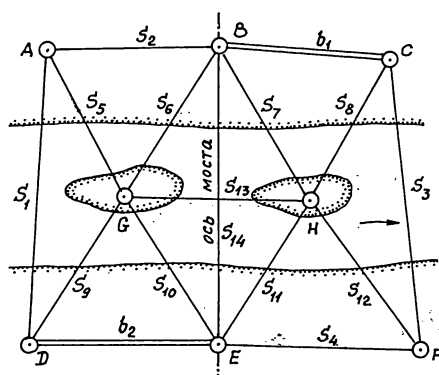


Рис. 11.7. Трилатерация. Сдвоенная центральная система

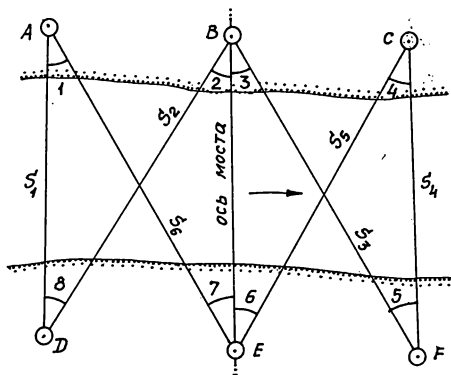


Рис. 11.8. Линейно-угловые построения

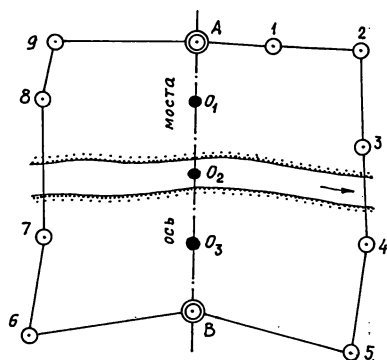


Рис. 11.9. Система полигонометрических ходов

Для разбивки под строительство мостовых сооружений создают плановую разбивочную сеть в виде триангуляции, трилатерации, полигонометрии, а также линейно-угловых построений с погрешностью в определении координат пунктов не более 10 мм. Указанные сети уравнивают строгими

способами. Разбивочная сеть создается в частной или условной системе координат. Осью абсцисс является ось мостового сооружения.

В *мостовых триангуляционных сетях* углы измеряют с погрешностью не более  $1''$ - $2''$ , с точностью 2-3 мм измеряют контрольные базисные стороны (не менее двух сторон). На рис. 11.6 представлена схема триангуляционной сети в виде сдвоенных геодезических четырехугольников. Может быть использована схема и в виде одного геодезического четырехугольника с измерением двух базисов на противоположных берегах, например,  $AB$  и  $DE$ .

При построении *трилатерационных сетей* основной фигурой часто является сдвоенный геодезический четырехугольник или сдвоенные центральные системы (рис. 11.7). Стороны в указанных построениях и их диагонали измеряют светодальномером высокой точности.

*Линейно-угловые сети* (рис. 11.8) на мостовых сооружениях позволяют обеспечить большую точность, чем триангуляционные или трилатерационные сети, поскольку в них отсутствуют направления вдоль берегов, что создает одинаковые условия для измерений горизонтальных углов (ослабляется влияние боковой рефракции атмосферы). Кроме того, в линейно-угловых сетях появляется большое число избыточных измерений, что обеспечивает надежный контроль в построениях. Вообще говоря, и при построениях сетей триангуляции и трилатерации, если имеется возможность измерения хотя бы части сторон или углов, то такие измерения целесообразно выполнять.

*Полигонометрические сети* строят в виде системы ходов в продольном по оси моста направлении (рис. 11.9). Углы в такой сети измеряют с погрешностью  $2''$ - $3''$ , а стороны – с погрешностью 5 мм. Полигонометрические сети чаще всего строят на суходольных реках в меженный период, когда береговые линии максимально приближаются друг к другу. В систему полигонометрического хода включают точки  $A$  и  $B$  оси моста. В результате образуется замкнутый полигонометрический ход, состоящий из разомкнутого основного хода  $A-1-2-3-4-5-B$  и контрольного  $B-6-7-8-9-A$ . В таком построении измеряют горизонтальные углы в узловых точках  $A$  и  $B$  между линиями полигонометрического хода и осью моста. Кроме того, рекомендуется измерить светодальномером и расстояние  $AB$  и сравнить его с вычисленным по координатам точек  $A$  и  $B$  расстоянием.

Возможны и другие геодезические построения в виде сдвоенных *центральных систем*, а также сочетания линейно-угловых построений с полигонометрическими ходами. Вид построения зависит как от необходимой точности разбивочных работ, так и от условий работ.

При строительстве мостовых сооружений и виадуков через ущелья и коньоны, когда опоры на берегах устанавливают уступами, строят линейно-угловые сети в вертикальной плоскости. При этом расстояния измеряют светодальномером, а вертикальные углы – теодолитом, либо используют для этих целей электронный тахеометр. Здесь следует иметь в виду, что вертикальные углы измеряются с несколько меньшей точностью, чем горизонтальные, поэтому число измерений следует увеличивать до достижения необходимой точности.

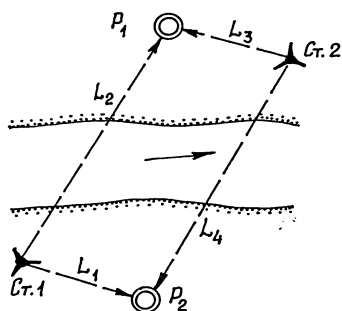


Рис. 11.10. Передача высот через водное препятствие

Высотная геодезическая сеть представляет собой систему реперов, высоты которых определяют с погрешностью 3-5 мм нивелированием III класса. Особенности построения высотной сети является передача отметки через водное препятствие, что часто выполняют по схеме, представленной на рис. 11.10. Применяют точное геометрическое и тригонометрическое нивелирование. В зимнее время нивелирование выполняют по льду по заранее вмороженным пикетам. На двух станциях необходимо обеспечить строгую симметрию неравных плеч:  $L_1 = L_3$ ,  $L_2 = L_4$ .

Створ оси моста при разбивке задают теодолитом или лазерным визиром и выносят по нему центры опор с помощью компарированных рулеток или светодальномером. На больших суходольных реках центры опор выносят способами прямой или обратной угловой засечки с пунктов разбивочной сети. Прямую угловую засечку выполняют с трех пунктов, причем одно из направлений обязательно должно совпадать с осью моста. При обратной угловой засечке решение задачи выполняют по четырем исходным пунктам сети. Центр мостовой опоры может быть смещен относительно оси не более, чем на 20 мм.

Детальная разбивка опоры осуществляется от ее центра относительно оси опор и перпендикулярного к ней направления – оси опоры.

По окончании строительства опор, а затем – после монтажа пролетных строений, производят исполнительную съемку.

## § 109. Геодезические работы при планировании и застройке населенных пунктов

В данном разделе будут рассмотрены некоторые вопросы, касающиеся строительства городов, отличающихся большим числом зон различного назначения.

Основным градостроительным документом является *генеральный план города*, который составляется примерно на 25-30 лет. Генеральный план города – это комплект документов, включающий в себя: план существующего города по состоянию на год выпуска генерального плана; основной чертеж генерального плана; материалы по предполагаемой архитектурно-пространственной композиции, включая макеты отдельных архитектурных решений; схемы городского и внутреннего транспорта; проект первоочередного строительства; схемы размещения предприятий и учреждений культурно-бытового обслуживания; схемы природных условий, инженерного оборудования, подготовки территории; пояснительную записку.

Генеральные планы составляют в масштабе 1:10000 с численностью населения города более 500 тыс. человек и в масштабах 1:5000 и 1:2000 – в городах с меньшим числом жителей.

*Проект застройки города* составляется на основе *проекта детальной планировки и эскизов застройки*, составляемого на ближайшие 5 лет. Он содержит графические материалы в масштабах 1:500 и 1:1000, а также в масштабах 1:2000 и 1:5000 – для ситуационных чертежей. В него входят чертежи генерального плана застройки локальной территории, макет застройки, чертежи организации рельефа, озеленения территории, инженерных сетей, чертежи индивидуальных проектов зданий и др.

Геодезической подготовкой для всей градостроительной документации является составление топографических планов и карт соответствующего масштаба, в том числе – топографического плана масштаба 1:500, составляемого для *строительного паспорта* конкретного земельного участка.

Геодезические разбивочные работы на застраиваемой территории заключаются в вынесении в натуру красных линий, осей проездов, зданий и сооружений.

Красные линии и оси проездов на незастроенную территорию выносят с погрешностью не более 10 см, на участках малоэтажной застройки – с погрешностью не более 8 см и на участках многоэтажной застройки – с погрешностью не более 5 см. Полевые работы выполняют с помощью теодолита и рулетки, либо с помощью электронного тахеометра (с отражателем). Оси проездов и точки красных линий закрепляют временными знаками, либо откраской на стенах имеющихся зданий и сооружений. Закрепленные знаки привязывают к существующей ситуации и составляют на них абрис. Кроме этого, производят исполнительную съемку и составляют исполнительный чертеж, на который наносят все необходимые результаты измерений.

Основные и главные оси зданий и сооружений выносят в натуру различными способами с пунктов городского геодезического обоснования или пунктов разбивочной основы. Вынесенные оси зданий по акту сдают застройщику с приложением материалов исполнительной съемки.

Одним из документов проекта является *схема организации рельефа*, которая составляется в масштабах 1:5000 или 1:2000, а в некоторых случаях и в более крупных масштабах. Организация рельефа определяет высотное положение площадей, улиц, размещение зданий и сооружений, подземных коммуникаций, обеспечение стока ливневых и талых вод и канализации. На схеме организации рельефа указывают: значения проектных отметок в точках пересечения разнородных склонов (разных уклонов поверхностей); значения уклонов по направлениям и расстояния, на которых действует данный уклон; направления стоков воды. К схеме прилагают проекты поперечных профилей улиц, выполненные в масштабе 1:200 или 1:100.

Чаще всего рабочий проект организации рельефа составляют методом проектных горизонталей, представляющих собой прямые линии. Сечение горизонталей выбирают в пределах 0,1 – 0,5 м, однако это зависит от харак-

тера застраиваемой территории и архитектурных решений. При больших уклонах сечение может быть увеличено.

Вынос в натуру проекта организации рельефа выполняют методом геометрического нивелирования, либо с помощью электронного тахеометра в соответствии со схемами выноса проектных отметок и уклонов, рассмотренными в гл. 10. При выносе проектных (высотных) точек на поверхностях с однородным уклоном удобно использовать наклонный луч геодезического прибора (теодолита, нивелира, тахеометра). Вынесенную точку (колышек) забивают в грунт до проектной высоты его верха. Часто верх колышка оставляют на произвольной высоте, большей, чем проектная, а на самом колышке выполняют откраску на проектном уровне.

Вынос на местность проекта организации рельефа производится с точностью технического нивелирования.

### **§ 110. Геодезические работы при строительстве подземных коммуникаций**

Подземные коммуникации прокладывают открытым и закрытым (подземным) способом.

При открытом способе коммуникации укладываются в траншеи, при закрытом – в коллекторы различной глубины заложения и диаметров, строительство которых чаще всего ведут способами щитовой проходки, либо способом продавливания грунта (проколов) специальным горным оборудованием.

Оси траншей выносят с геодезической основы, либо с точек съемочного обоснования удобными способами. При необходимости задания уклонов дно траншей зачищают с контролем зачисток с помощью нивелира или визирок. Визирки могут обеспечить точность установки коммуникаций до 2-3 см. При уклонах 0,003 и менее используют нивелир.

В настоящее время при строительстве трубопроводов используют лазерные приборы, с помощью которых задают линии проектных уклонов, створы осей коммуникаций. При рытье траншеи с помощью задающей направление лазерной системы сигнал от последней поступает на управляющий механизм режущей части землеройной машины.

Перед засыпкой траншеи производят исполнительную съемку, в графических материалах которой содержится топографический план масштаба 1:500 с плановым положением коммуникаций и профиль по верху труб с указанием глубины их заложения в различных частях и уклонов на однородных отрезках.

При закрытых способах строительства подземных коммуникаций основным является строительство коллектора, в котором затем выполняют укладку самих коммуникаций различного назначения.

В настоящее время используются автоматизированные горнопроходческие комплексы щитовой проходки, оснащенные навигационными системами ведения щита, разрабатывающего грунт в проектом направлении в

плане и по высоте. Программное обеспечение навигационных систем, в которое вводятся проектные параметры движения режущего органа, автоматически задают его работу в нужном направлении. За исполнением проекта следят участковые маркшейдеры (или геодезисты) прокладкой за щитом подземного полигонометрического и высотного хода. Фактическое положение щита в плане и по высоте определяется по координатам фиксированных на щите точек. При использовании для этих целей электронных тахеометров в фиксированных точках размещают специальные пленочные отражатели, либо закрепляют или используют съемные стандартные уголковые отражатели

Для закрепления стенок тоннеля используют металлические или железобетонные сборные секции, которые скрепляют между собой и стыки герметизируют от проникновения воды внутрь коллектора.

Съемка ранее построенных подземных коммуникаций выполняется известными методами и способами с точек съемочного геодезического обоснования. Поскольку коммуникации закрыты землей, то предварительно производят их поиск, а затем, в удобных местах и на углах их поворота выполняют шурфование для вскрытия коммуникаций и регистрации их определенных точек геодезическими методами. Горизонтальную съемку часто выполняют линейными засечками от точек капитальной застройки. Линейные засечки должны быть выполнены с трех точек, при этом углы в определяемой точке не должны быть менее  $30^\circ$  и более  $150^\circ$ . При съемке способом перпендикуляров длина перпендикуляра, построенного «на глаз», не должна быть более 4 м. При полярном способе углы измеряют одним полуприемом при расстоянии от теодолита до съемочной точки не более 30 м. Углы поворотов коммуникаций целесообразно снимать с двух точек съемочного обоснования, либо в сочетании с привязкой к твердым контурам имеющейся капитальной застройки.

## **§ 111. Геодезические работы при строительстве гидротехнических сооружений**

Для выполнения комплекса работ при строительстве гидротехнических сооружений разбивают плановое и высотное геодезическое обоснование. При проектировании водохранилищ съемочное обоснование строят по его периметру для выполнения разбивки по границе зоны затопления. Содержание геодезических работ определяется в основном видом гидротехнического сооружения.

Основными документами при проектировании данных сооружений являются топографические планы и гидрографические продольные профили рек и др.

Проектные горизонталы контура водохранилища выносят на местность способом геометрического нивелирования с нивелирных ходов высотного геодезического обоснования. На крутых склонах применяют метод тригонометрического нивелирования, который легко может быть реализован при

использовании электронных тахеометров. Проектные линии закрепляют деревянными столбами, либо другим способом, обеспечивающим длительную сохранность точки.

При строительстве гидроузлов создают специальные плановую и высотную разбивочные сети, которые служат как для разбивочных работ, так и последующих исполнительных съемок, а также для наблюдений за деформациями построенного сооружения и берегов реки. Плановые сети строят в виде триангуляции, полигонометрии и линейно-угловых построений. Заданную точность построения сетей определяют расчетным путем, исходя из необходимой точности конечных результатов. Сети строят способом последовательного сгущения в две или три ступени. Сеть строят не на поверхность референц-эллипсоида (как это выполняют при построении Государственной геодезической сети), а на поверхность относимости

$$H_0 = 0,5 (H_1 + H_2), \quad (12.1)$$

где  $H_1$  и  $H_2$  – соответственно высоты основания и гребня плотины.

**Редуцирование на поверхность относимости рассматривается в курсе *высшей геодезии*.**

Уравнивание сетей выполняют строгими способами.

Сети для детальной разбивки сооружений гидроузла строят с точностью планового положения их точек не хуже 3 – 5 мм. Данные сети являются т.н. микролокальными: микротриангуляции; микротрилатерации; короткобазисной полигонометрии. При строительстве геодезической разбивочной сети за ось абсцисс принимают ось плотины, а начало координат помещают в один из пунктов этой оси. Пункты сети являются долговременными, поэтому их закрепляют вне зоны производства строительных работ. Закрепляют пункты трубчатыми знаками, бетонными тумбами и др. Поскольку требования к точности построения геодезической основы для строительства гидросооружений высокие, то геодезические знаки снабжают приспособлениями для принудительного центрирования на них геодезических приборов.

Дальнейшее сгущение сетей, если это необходимо, выполняют такими же способами в сочетании с засечками, створными и другими построениями.

Высотные сети строят способом геометрического нивелирования в несколько ступеней: 1-я ступень – нивелирование I или II класса; сгущение (2-я ступень) – нивелирование III или IV класса. Сеть 1-й ступени часто представляет собой отдельные нивелирные ходы или системы ходов. Ходы 2-й ступени сравнительно равномерно заполняют всю территорию. Обычно это системы нивелирных ходов с несколькими узловыми точками, либо полигоны.

Геодезические разбивочные работы заключаются в построении главных и основных осей сооружения. При монтаже – установка основных элементов сооружения и технологического оборудования. Монтажные оси разбивают чаще всего створным способом и способом створно-линейной засечки.

Особые требования к геодезическим работам предъявляются при установке гидроагрегатов. Достаточно сказать, что отклонение оси вала турбины и генератора от вертикали не должно быть более 0,02 мм на 1 м длины, ось



фундаментного кольца должна совпадать с осью агрегата с точностью до 2 мм и др.

Особое место в процессе строительства и при эксплуатации гидротехнических сооружений занимают инженерно-геодезические работы по наблюдениям за деформациями. Указанные наблюдения выполняют как с использованием стационарных систем (гидронивелиров), так и производством натуральных измерений, связанных с определением полных координат точек сооружения.

## **§ 112. Геодезические работы при строительстве линий электропередач и магистральных трубопроводов**

При изысканиях указанных сооружений геодезические работы заключаются в полевом трассировании, которое выполняется так же, как и при изысканиях под дорожное строительство. Производят топографическую съемку в местах расположения подстанций, монтерских пунктов, ремонтных баз и др., в местах сооружения *дюкеров* для трубопроводов в местах пересечения рек и оврагов и *эстакад* – в местах пересечения с горными дорогами и ущельями.

*Дюкер* – сооружение в местах заглубления трубопровода ниже дна препятствия. *Эстакада* – несущая конструкция в виде фермы, располагаемая над препятствием.

Нивелирование трассы для воздушных линий выполняют с целью составления продольного профиля, на котором проектируют положение и высоту опор. Точность нивелирования здесь невысокая, до 0,3 м. Используется безпикетный способ трассирования, т.к. опоры устанавливают в местах, не совпадающих с пикетами. В горных районах и сильнопересеченной местности по трассе допускается прокладывать тахеометрические ходы.

Разбивочные работы заключаются в выносе центров опор с относительной погрешностью не более 1:200 от проектного их положения и в разбивке фундаментов и анкерных устройств.

Нивелирование трассы для трубопровода техническое, как и для изысканий под строительство дорог. При этом пикетаж разбивают по рельефу местности с целью определения длины трубопровода. Это связано с тем, что трубопровод укладывают параллельно рельефу. Профиль нивелирования составляют также для наклонных расстояний.

Перед строительством трубопровода восстанавливают пикетаж, углы поворота, выполняют детальную разбивку кривых, сгущают сеть рабочих реперов (через 1 км хода), производят повторное нивелирование. Дальнейшие работы связаны с разбивкой траншеи и ее съемкой, контролем установки труб и т.п., аналогично строительству подземных или открытых коммуникаций. На участках вертикальных кривых установку труб выполняют с помощью нивелира, т.к. использование визирок в этом случае невозможно.

## Глава 12

### ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАБОТЫ В ПОДЗЕМНОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ

#### § 113 . Горные выработки. Основные понятия и определения

Залежь полезного ископаемого характеризуется следующими элементами (рис. 12.1):

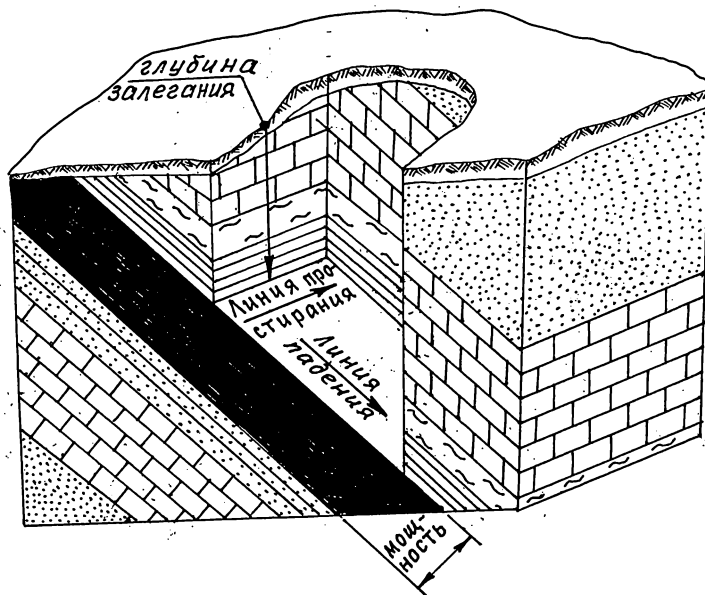


Рис. 12.1. Главные элементы залежи полезного ископаемого

- *поверхность висячего бока (кровля залежи)* – поверхность, которая отделяет залежь от покрывающих ее пород;
- *поверхность лежачего бока (почва залежи)* – поверхность, которая отделяет залежь от нижележащих ее пород;
- *линия простирания* – горизонтальная линия, лежащая в плоскости висячего или лежачего бока залежи;
- *простирание* в указанной точке залежи определяется дирекционным углом или азимутом направления линии простирания;
- *падение* залежи определяется вертикальным углом, составленным линией падения с горизонтальной плоскостью; азимут линии падения перпендикулярен простиранию залежи в указанной точке;
- *мощность* залежи определяется расстоянием между поверхностями висячего и лежачего боков (расстояние между кровлей и почвой залежи) в направлении, перпендикулярном этим поверхностям;
- *глубина залегания* является расстоянием от земной поверхности в данной ее точке до висячего бока залежи по отвесной линии.

Горные выработки (искусственные обнажения), открытые или подземные, позволяют открыть доступ к полезному ископаемому, а также изучить полезное ископаемое в качественном и количественном отношении.

По пространственному положению различают вертикальные, горизонтальные и наклонные горные выработки (рис. 12.2).

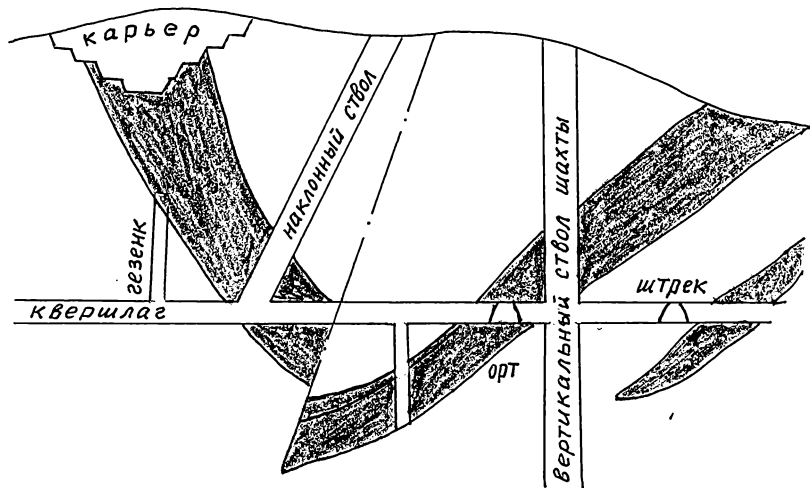


Рис. 12.2. Виды горных выработок

К вертикальным горным выработкам относят: шурфы, стволы шахт, гезенки.

*Шурф* представляет собой горную выработку малого сечения и небольшой глубины. Они проходятся с поверхности земли. Шурфы круглого сечения называют дудками.

*Стол шахты* имеет непосредственный выход на поверхность земли. Он используется для детального изучения полезного ископаемого с помощью других выработок, транспортировки людей и оборудования в шахту, а также транспортировки пустой породы и руды.

*Гезенк* не имеет выход на поверхность земли. Он служит для транспортировки грузов внутри шахты с одного горизонта на другой (грузоподъемные, грузоспускные, вентиляционные и др.).

К группе горизонтальных горных выработок относят штольни, штреки, орты и квершлаг.

*Штольня* представляет собой горизонтальную или наклонную горную выработку, которая выходит на поверхность земли. Обычно их проходят со склона внутрь горы по простиранию или вкрест простирания полезного ископаемого. Если штольня имеет два выхода, то она называется тоннелем.

*Штрек* – выработка, не имеющая выхода на поверхность земли. При наклонном залегании горных пород штрек проходят по их простиранию, а при горизонтальном залегании пород – в любом направлении.

*Орт* проходят в мощных пластах или жилах под углом к простиранию. Орт не выходит за пределы полезного ископаемого. Непосредственного выхода на поверхность земли орты не имеют.

*Квершлаг* проводят под углом к простиранию пород. Он используется для транспортировки людей и грузов, проветривания, водоотвода и т.п. На поверхность квершлаг не выходит.

Наклонные выработки могут иметь выход на поверхность земли (наклонные шурфы и наклонные стволы шахт) и могут его не иметь (бремсберги, скаты, уклоны).

*Бремсберг* используется для транспортировки грузов с помощью механических устройств.

*Уклоны* не имеют непосредственного выхода на поверхность земли. Они предназначены для доставки грузов с помощью механических устройств с горизонта на горизонт.

*Скат* предназначен для спуска полезного ископаемого с верхнего горизонта на нижний под действием силы тяжести.

К открытым горным выработкам относятся карьер, канава и траншея.

*Карьер* – это сравнительно сложная совокупность горных выработок, предназначенных для добычи полезного ископаемого открытыми горными работами.

*Канава и траншея* – горные выработки, которые имеют небольшие глубину и ширину.

#### **§ 114. Общие понятия о маркшейдерских съемках, опорных и съемочных сетях**

Подземная маркшейдерская съемка – это комплекс работ, связанных с определением координат точек объектов подземного строительства на основе угловых и линейных измерений.

Основными объектами съемки являются все без исключения горные выработки различного назначения, буровые скважины различного назначения (технологические, разведочные, технические, водопонижающие и др.), точки геологических и маркшейдерских наблюдений (элементов залегания залежи: угла падения и простирания; мощность залежи; структура и др.); точки документации геологических нарушений, места отбора проб, места расположения стационарного горного оборудования (подъемных машин, насосных камер, складов взрывчатых веществ (ВВ), вентиляционных установок и мн.др.).

В результате выполнения подземных маркшейдерских съемок решают большой круг задач, основными из которых являются:

- составление маркшейдерских планов горных выработок и другой графической документации (проекций горных выработок на вертикальную плоскость; вертикальные и горизонтальные разрезы; проекции аксонометрического вида и др.);
- вынесение проектных решений в натуру и контроль построений;
- задание направлений горным выработкам и ведение указанных работ;

- производство исполнительной съемки (маркшейдерских замеров) для определения фактического положения горных выработок и выполненных объемов горных работ;

- съемка подробностей в горных выработках;

- обеспечение необходимой точности и самих работ по наблюдению за деформациями горных выработок и состоянием массива горных пород и др.

Съемочные маркшейдерские сети делятся на два разряда. Съемочная сеть 1-го разряда развивается от опорной сети, а сеть 2-го разряда развивается как от опорной сети, так и от пунктов сети 1-го разряда. Характеристики указанных сетей представлены в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Вид маркшейдерской сети	Допустимая предельная длина хода, км	Средняя квадратическая погрешность измерения углов	Относительная погрешность в измерениях длин линий
Опорная	2 Не более 20 углов поворота в секции длиной 1 км	20"	1:3000
Съемочная 1-го разряда	2	45"	1:1000
Съемочная 2-го разряда	0,5	3'	1:200

В зависимости от назначения и способов производства работ подземные маркшейдерские съемки подразделяются на четыре вида.

1. *Горизонтальная и вертикальная соединительные съемки.* Служат для установления геометрической взаимосвязи съемок, выполненных на земной поверхности и в подземных горных выработках. Производится передача дирекционных углов и полных координат (плановых X и Y и высоты Z) с земной поверхности в горные выработки.

2. *Горизонтальные и вертикальные съемки основных подземных выработок.* Предназначены для создания плановых и высотных опорных маркшейдерских сетей. Являются основой для составления маркшейдерских планов.

3. *Горизонтальные и вертикальные съемки подготовительных выработок.* Предусматривают прокладку в указанных выработках теодолитных ходов в виде съемочных маркшейдерских метей 1-го разряда, которые опираются на пункты опорной маркшейдерской сети.

4. *Съемки нарезных и очистных выработок.* Предусматривают создание съемочных маркшейдерских сетей 2 разряда, опирающихся на пункты опорной съемочной сети и сети 1-го разряда.

Высотное положение пунктов подземных маркшейдерских сетей определяют следующими способами:

- вертикальной соединительной съемки путем передачи высоты с земной поверхности от реперов III или IV классов на исходную точку подземной опорной маркшейдерской сети;

- в выработках:
- - способом геометрического нивелирования при углах наклона выработок до  $8^\circ$ ;
- - способом тригонометрического нивелирования при углах наклона выработок более  $8^\circ$ .

Высоты пунктов съемочных маркшейдерских сетей 1 и 2 разрядов чаще всего определяют способом тригонометрического нивелирования одновременно с построением сетей.

Для построения подземных маркшейдерских сетей производят ориентирование и центрирование.

*Ориентирование сети* заключается в процессе передачи дирекционного угла с земной поверхности на исходную сторону опорной подземной сети, находящуюся в горной выработке. Эта задача решается геометрическим способом, либо гироскопическим ориентированием.

*Центрирование сети* связано с передачей координат  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  с поверхности земли на исходный пункт опорной маркшейдерской сети, находящийся в горной выработке.

## § 115. Горизонтальная соединительная съемка

Горизонтальная соединительная съемка позволяет решить задачу ориентирования подземных съемок, а также центрирования только для плановых координат  $X$  и  $Y$ .

В зависимости от условий, назначения и др. горизонтальные соединительные съемки могут быть нескольких видов:

- через штольную или наклонную горную выработку;
- через один вертикальный шахтный ствол;
- через два вертикальных шахтных ствола.

### 115.1. Горизонтальная соединительная съемка через штольную или наклонную горную выработку.

Данный способ соединительной съемки предусматривает прокладку полигонометрического хода при вскрытии месторождения полезного ископаемого штольной или наклонной горной выработкой (например, наклонной шахтой).

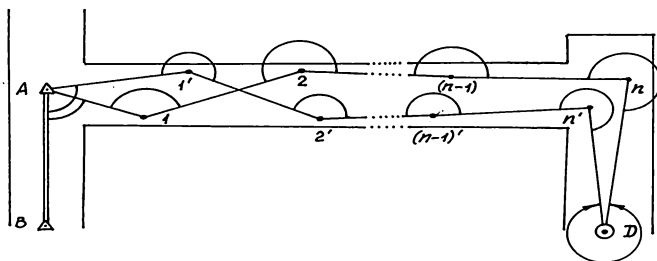


Рис. 12.3. Полигонометрический ход в наклонной горной выработке

В связи с тем, что ход  $B-1-2-...-n-D$  (рис.12.3) является висячим, то его прокладывают в прямом и обратном направлениях, причем в обратном направлении – по другим точкам. В результате получается узкий замкнутый теодолитный ход, обработка которого аналогична приведенной в гл. 7, но с другими допусками для невязок, определяемыми маркшейдерскими инструкциями.

Если пройдено две вскрывающих горных выработки, то теодолитный ход обязательно прокладывают замкнутым через обе эти выработки.

#### 115.2. Горизонтальная соединительная съемка через один шахтный ствол

Ориентирование и центрирование в этом способе выполняют по двум отвесам  $O_1$  и  $O_2$ , опущенным в ствол до ориентируемого горизонта (рис.12.4). К отвесам выполняют т.н. примыкание соединительными треугольниками. Один треугольник  $AO_1O_2$  на поверхности включает исходный пункт  $A$  с ориентированием сторон  $AO_1$  и  $AO_2$  по исходному направлению  $AB$ . Второй треугольник  $MO_1'O_2'$  образован в горной выработке ориентируемого горизонта опорным пунктом  $M$  и теми же отвесами  $O_1'$  и  $O_2'$ . Ориентируемой стороной является линия  $MN$ .

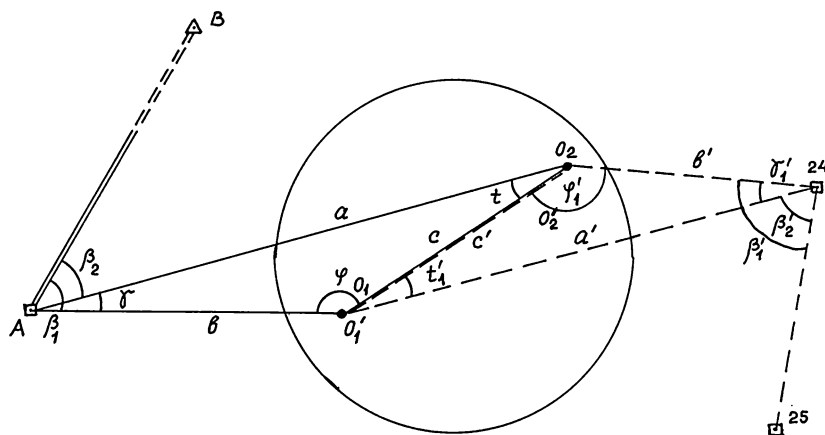


Рис. 12.4. Ориентирование через один вертикальный ствол

При примыкании измеряют:

- стороны  $a, b, c$  и углы  $\beta_1, \beta_2, \gamma$  (на поверхности);
- стороны  $a', b', c'$  и углы  $\beta_1', \beta_2', \gamma'$  (в горной выработке).

Маркшейдерская техническая инструкция устанавливает допустимые величины погрешностей на передачу дирекционного угла с исходного направления  $AB$  на линию  $MN$ , а также допустимые величины погрешностей для результатов измерения сторон  $a, b$  и  $c$  на поверхности и под землей.

Для качественного решения задачи погрешность определения углов  $t$  и  $t'$  не должна превышать более  $20''$ . Оценка точности указанных углов выполняется по формулам:

$$m_t = \frac{b}{c} m_{\gamma} \quad ; \quad m_{t'} = \frac{b'}{c'} m_{\gamma'} \quad (12.1)$$

Необходимо обеспечить измерение углов в точках  $A$  и  $M$  с погрешностью не более  $7''$ , в связи с чем углы в указанных точках измеряют теодолитом типа Т5 двумя полными приемами, либо теодолитом более высокой точности, либо электронным тахеометром. При использовании теодолита Т30М измерение углов выполняют одним приемом из трех повторений. Разности в отдельно измеренных углах не должны превышать  $20''$ . Уравнивание углов производят распределением поправок поровну во все углы.

Измерение сторон выполняют не менее 5 раз компарированной стальной рулеткой с натяжением ленты в 10 кг. Отсчеты по рулетке берут с точностью до 1 мм каждый раз на новых ее частях. Расхождение между отдельными результатами измерений не должны превышать 2 мм, а средняя квадратическая погрешность определения одной стороны должна быть не более 0,5 мм.

Рассмотрим геометрическое решение задачи горизонтальной соединительной съемки через один ствол на примере, соответствующем схеме, представленной на рис. 12.4.

Предварительно уравнивают углы, измеренные на поверхности в точке  $A$ . Для этого вычисляют значение угла  $\gamma$

$$\gamma_{\text{ввпч}} = \beta_1 - \beta_2 \quad (12.2)$$

и получают угловую невязку

$$f_{\gamma} = \gamma_{\text{изм}} - \gamma_{\text{ввпч}} \quad (12.3)$$

Поправка в измеренный угол  $\gamma$  составляет

$$v_{\gamma} = - \frac{f_{\gamma}}{3} \quad (12.4)$$

По теореме синусов из треугольника  $AO_1O_2$  находят значения углов  $\varphi$  и  $t$ :

$$\varphi = \arcsin \frac{a}{c} \sin \gamma \quad ; \quad t = \arcsin \frac{b}{c} \sin \gamma \quad (12.5)$$

с контролем суммы углов треугольника  $AO_1O_2$ . Если получится невязка, то ее делят с обратным знаком поровну на вычисленные по формулам (12.5) углы.

Аналогичная обработка по формулам (12.2)...(12.5) выполняется и для треугольника  $MO_1'O_2'$  в горной выработке.

Дирекционный угол с исходного направления  $AB$  передают в горную выработку по двум ходам:

$$\begin{aligned} \alpha_{AB} &\Rightarrow \alpha_{A-O_1} \Rightarrow \alpha_{O_1-M} \Rightarrow \alpha_{M-N} \\ \alpha_{AB} &\Rightarrow \alpha_{A-O_2} \Rightarrow \alpha_{O_2-M} \Rightarrow \alpha_{M-N} \end{aligned} \quad (12.6)$$

Полученные значения дирекционных углов должны совпадать.

По тем же ходам (12.6) дважды решают прямые геодезические задачи и определяют координаты  $X$  и  $Y$  точки  $M$ . Расхождения в значениях координат не должны превышать 2-3 мм. Если расхождения допустимы, то вычисляют средние значения координат центрируемой точки  $M$ . Дальнейшая передача координат (на точку  $N$  и далее) выполняется в полном соответствии с



обработкой результатов измерений в теодолитных ходах, что подробно рассмотрено в гл. 7.

**Пример 12.1. Горизонтальная соединительная съемка через один вертикальный ствол (по схеме рис. 12.4).**

Исходные данные.

На поверхности:  $X_A = 18233,956$  м,  $Y_A = 5705,144$  м;  $X_B = 18625,347$  м,  $Y_B = 5684,044$  м.

$a = 8,0953$  м,  $b = 5,0846$  м,  $c = 3,1054$  м,  $\beta_1 = 74^\circ 13' 46''$ ,  $\beta_2 = 67^\circ 27' 18''$ ,  $\gamma = 6^\circ 46' 22''$ .

В шахте:  $a' = 8,5674$  м,  $b' = 5,7482$  м,  $c' = 3,1048$  м,  $\beta_1' = 91^\circ 14' 42''$ ,  $\beta_2' = 80^\circ 35' 32''$ ,  $\gamma' = 10^\circ 39' 06''$ .

$d_{MN} = 24,867$  м.

Решение.

$$1. \gamma_{\text{выч}} = 74^\circ 13' 46'' - 67^\circ 27' 18'' = 6^\circ 46' 28''.$$

$$f_\gamma = 6^\circ 46' 22'' - 6^\circ 46' 28'' = -6''.$$

Поправка в угол  $\gamma$  равна  $+2''$ , т.е.  $\gamma = 6^\circ 46' 22'' + 2'' = 6^\circ 46' 24''$ .

2. Из треугольника  $AO_1O_2$

$$\varphi = \arcsin \frac{8,0953}{3,1054} \sin 6^\circ 46' 24'' = 162^\circ 05' 38,4''$$

$$t = \arcsin \frac{5,0846}{3,1054} \sin 6^\circ 46' 24'' = 11^\circ 08' 03,8''$$

Контроль:  $(\varphi + t + \gamma) = 180^\circ 00' 06,2''$ . Невязка  $f = +6,2''$ . Поправки в углы  $\varphi$  и  $t$  по  $-3,1''$ :

$$\varphi = 162^\circ 05' 35,3''; \quad t = 11^\circ 08' 00,7''.$$

3. Из треугольника  $MO_1O_2$  (в шахте):

$$1. \gamma_{\text{выч}} = 91^\circ 14' 42'' - 80^\circ 35' 32'' = 10^\circ 39' 10''.$$

$$f_\gamma = 10^\circ 39' 06'' - 10^\circ 39' 10'' = -4''.$$

Поправка в угол  $\gamma'$  равна  $+1,3''$ , т.е.  $\gamma = 10^\circ 39' 06'' + 1,3'' = 10^\circ 39' 07,3''$ .

2. Из треугольника  $MO_1O_2$

$$\varphi' = \arcsin \frac{8,5674}{3,1048} \sin 10^\circ 39' 07,3'' = 149^\circ 19' 56,1''$$

$$t' = \arcsin \frac{5,7482}{3,1048} \sin 10^\circ 39' 07,3'' = 20^\circ 00' 43,5''$$

Контроль:  $(\varphi' + t' + \gamma') = 179^\circ 59' 46,9''$ . Невязка  $f = +6,2''$ . Поправки в углы  $\varphi$  и  $t$  по  $-3,1''$ :

$$\varphi = 162^\circ 05' 35,3''; \quad t = 11^\circ 08' 00,7''.$$

Дальнейшие вычисления опустим и приведем значения искоемых координат точки 25 (попытайтесь самостоятельно завершить вычисления):

$X_{25} = 18213,405$  м;  $Y_{25} = 5721,337$  м.

**115.3. Горизонтальная соединительная съемка через два вертикальных шахтных ствола.**

Очевидно, что решение задачи ориентирования способом соединительного треугольника требует весьма высокой организации работ. Основным источником погрешностей здесь является погрешность центрирования теодолита, поскольку стороны измеряемых углов весьма короткие (посмотрите в примере 12.1:  $a = 8$  м,  $b = 5$  м). Для обеспечения необходимой точности измерения углов центрирование теодолита следует выполнять с погрешностью не более 1 мм.

Способ ориентирования через два вертикальных ствола является наиболее точным из всех известных до настоящего времени видов ориентирования подземных маркшейдерских сетей.

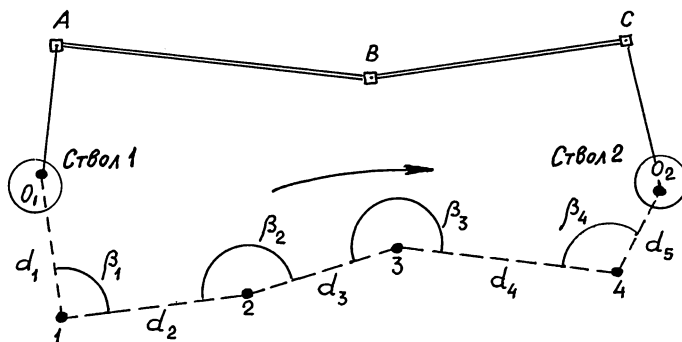


Рис. 12.5. Ориентирование через два вертикальных шахтных ствола

Координаты отвесов  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 12.5) определяют на поверхности привязкой к исходной маркшейдерской сети ( $A, B, C$ ) известными способами, обеспечивающими точность получения координат точек, соответствующую полигонометрическим сетям на поверхности 1 и 2 разрядов. Под землей между отвесами прокладывают полигонометрический (теодолитный) ход, точность которого должна соответствовать точности подземных опорных маркшейдерских сетей (табл. 12.1). Подземный ход должен быть по возможности вытянутым, иметь малое число вершин и минимальную длину.

Технической маркшейдерской инструкцией установлен допуск на определение на поверхности дирекционных углов линий, соединяющих отвесы, не более  $20''$ . Для линий, соединяющих отвесы в подземных выработках, точность определения дирекционных углов не должна превышать  $1'$ .

Рассмотрим геометрическое решение задачи ориентирования через два ствола.

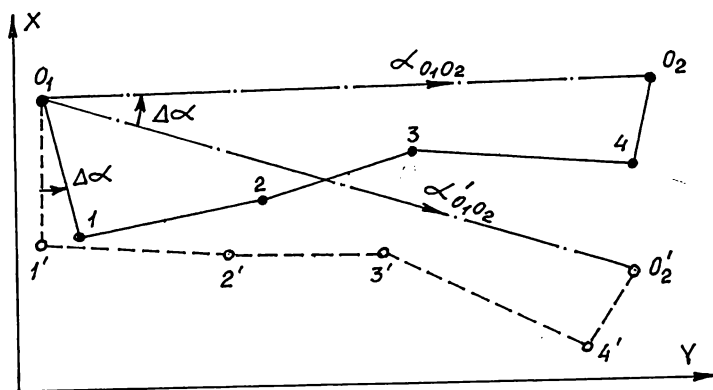


Рис. 12.6. Схема ориентирования через два шахтных ствола

После определения координат отвесов на поверхности такие же значения координат придают отвесам на ориентируемом горизонте в горных выработках в местах примыкания отвесов к точкам подземного полигонометрического хода. Далее направлению  $O_1I$  придают условное значение дирекционного угла  $\alpha'_{O_1I}$  (обычно  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  или  $270^\circ$ ), вычисляют условные значения дирекционных углов линий полигонометрического хода и из последовательного решения прямых геодезических задач определяют условные значения координат второго отвеса ( $O_2$ ):

$$X'_{O_2} = X_{O_1} + \sum d_i \cos \alpha_i; \quad Y'_{O_2} = Y_{O_1} + \sum d_i \sin \alpha_i \quad (12.7)$$

Используя полученные условные значения координат отвеса  $O_2$  и исходные значения координат отвеса  $O_1$ , из решения обратной геодезической задачи находят условное значение дирекционного угла линии, соединяющей отвесы ( $\alpha'_{O_1O_2}$ ). По исходным значениям координат отвесов находят также значение истинного дирекционного угла линии  $O_1O_2$  ( $\alpha_{O_1O_2}$ ). Разница в дирекционных углах

$$\Delta \alpha = (\alpha'_{O_1O_2} - \alpha_{O_1O_2}) \quad (12.8)$$

является поправкой в условный дирекционный угол  $\alpha'_{O_1O_2}$  для вычисления истинного значения дирекционного угла направления  $O_1I$  ( $\alpha_{O_1I}$ ):

$$\alpha_{O_1I} = (\alpha'_{O_1I} - \Delta \alpha) \quad (12.9)$$

Далее выполняют переычисление дирекционных углов линий полигонометрического хода, приращений координат и координат точек полигонометрического хода, заканчивая вычислением координат второго отвеса. Полученные невязки в приращениях координат в виде поправок распределяют с учетом длин линий хода, как это выполняется и при обработке любого теодолитного хода (гл. 7).

Рассмотрим пример ориентирования через два ствола в соответствии со схемой, представленной на рис. 12.5.

**Пример 12.2. Горизонтальная соединительная съемка через два вертикальных ствола (рис. 12.5).**

Исходные данные:

$X_{O_1} = 4656,358 \dots м$	$\beta_1 = 93^\circ 14' 15''$	$d_1 = 49,653 \dots м$
$Y_{O_1} = 8011,233 \dots м$	$\beta_2 = 178^\circ 36' 24''$	$d_2 = 73,211 \dots м$
$X_{O_2} = 4630,561 \dots м$	$\beta_3 = 201^\circ 05' 46''$	$d_3 = 65,342 \dots м$
$Y_{O_2} = 8253,295 \dots м$	$\beta_4 = 100^\circ 42' 05''$	$d_4 = 86,938 \dots м$
		$d_5 = 28,704 \dots м$

**Решение.**

Зададим условное значение дирекционного угла линии  $O_1I$  ( $\alpha'_{O_1I} = 180^\circ 00' 00''$ ).

Обработка условного полигонометрического хода представлена в табл. 12.2.

Из решения обратных геодезических задач по значениям условных координат отвеса  $O_2$  (в таблице 12.2 указаны в скобках) и истинных значений координат отвесов, приведенных в исходных данных, найдем условное ( $\alpha'_{O_1O_2}$ ) и истинное ( $\alpha_{O_1O_2}$ ) значения дирекционных углов линии  $O_1O_2$ :  $\alpha'_{O_1O_2} = 105^\circ 41' 58,7''$ ;  $\alpha_{O_1O_2} = 96^\circ 04' 59,4''$ .

Таблица 12.2

**Ведомость вычисления координат точек условного полигонометрического хода**

Точ- ки	$\beta$	$\alpha'$	$d$ , м	Вычисленные		Исправленные		Координаты	
				$\Delta X_{\text{м}}$	$\Delta Y_{\text{м}}$	$\Delta X_{\text{м}}$	$\Delta Y_{\text{м}}$	$X_{\text{м}}$	$Y_{\text{м}}$
O <sub>1</sub>		180°00'00"	49,653	-49,653	0,000			4656,358	8011,233
1	93°14'15"	93°14'15"	73,211	-4,135	+73,094				
2	178°36'24"	91°50'39"	65,342	-2,103	+65,308				
3	201°05'46"	112°56'16"	86,938	-33,882	+80,064				
4	100°42'05"	33°38'21"	28,704	+23,897	+15,901				
O <sub>2</sub>				$\sum \Delta X$	$\sum \Delta Y$			(4500,482)	(8245,600)
				-65,876	+234,367				

Таблица 12.3

**Ведомость координат исходного полигонометрического хода**

Точ- ки	$\beta$	$\alpha'$	$d$ , м	Вычисленные		Исправленные		Координаты	
				$\Delta X_{\text{м}}$	$\Delta Y_{\text{м}}$	$\Delta X_{\text{м}}$	$\Delta Y_{\text{м}}$	$X_{\text{м}}$	$Y_{\text{м}}$
O <sub>1</sub>		170°23'01"	49,653	+0,001	-0,003			4656,358	8011,233
				-48,955	+8,295	-48,954	+8,292		
1	93°14'15"	83°37'16"	73,211	+0,001	-0,004			4607,404	8019,525
				+8,134	+72,758	+8,135	+72,754		
2	178°36'24"	82°13'40"	65,342	+0,001	-0,004			4615,539	8092,279
				+8,836	+64,742	+8,837	+64,738		
3	201°05'46"	103°19'26"	86,938	+0,002	-0,005			4624,376	8157,017
				-20,035	+84,598	-20,033	+84,593		
4	100°42'05"	24°01'31"	28,704	+0,001	-0,001			4604,343	8241,610
				+26,217	+11,686	+26,218	+11,685		
O <sub>2</sub>				$\sum \Delta X_{\text{ВВФ}}$	$\sum \Delta Y_{\text{ВВФ}}$			4630,561	8253,295
				-25,803	+242,079				
				$\sum \Delta X_{\text{ИСК}}$	$\sum \Delta Y_{\text{ИСК}}$				
				-25,797	+242,062				
				$f_x = -0,006$	$f_y = +0,017$				
				$f_{\text{ИСК}} = 0,018$	$f_{\text{ОПН}} =$	1:16880			

Разница дирекционных углов составляет:  $\Delta\alpha = 105^\circ 41' 58,7'' - 96^\circ 04' 59,4'' = +9^\circ 36' 59''$  (с округлением до одной секунды).

По формуле (12.17) вычисляем истинное значение дирекционного угла направления O<sub>1</sub>1:  $\alpha_{O_1 1} = 180^\circ 00' 00'' - 9^\circ 36' 59'' = 170^\circ 23' 01''$ .

Дальнейшая обработка полигонометрического хода представлена в табл. 12.3.

В результате обработки хода получена относительная невязка 1:16880, что является вполне приемлемой величиной по сравнению с допускаемой невязкой для подземных опорных маркшейдерских сетей.

## § 116. Вертикальная соединительная съемка

Высотные отметки  $Z$  должны передаваться в горные выработки с реперов нивелирной сети по точности не ниже IV класса. Способы передачи высот на исходные горизонты горных выработок в основном зависят от способа вскрытия месторождения. Если выработки имеют малый наклон (до  $8^\circ$ ), то передачу высот выполняют в большинстве случаев способом геометрического нивелирования прокладкой нивелирных ходов с допустимой невязкой, определяемой инструкцией. Если угол наклона более  $8^\circ$ , то применяют способ тригонометрического нивелирования с использованием теодо-

лита, обеспечивающего измерение углов наклона с погрешностью не более 30". В том и другом способах превышения определяют в прямом и обратном направлениях.

При вскрытии месторождения вертикальными стволами для передачи отметок часто используют длиномеры.

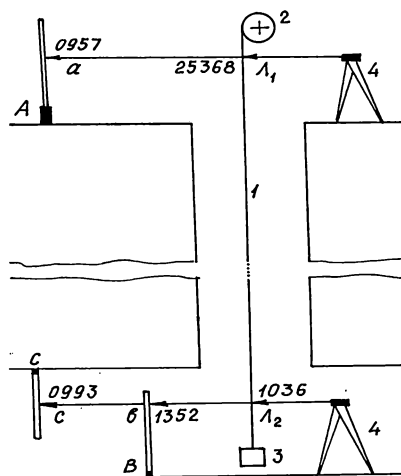


Рис. 12.7. Передача высотной отметки в подземную выработку

Большое распространение для передачи отметок по вертикальному стволу получил способ, в котором используется стальная лента (рис. 12.7). Мерная лента 1 намотана на барабан 2. Свободный конец ленты с грузом 3 опускают в ствол на определяемый горизонт. На поверхности и в горной выработке околоствольного двора устанавливают нивелиры 4 (или один нивелир последовательно) и с помощью них берут отсчеты по шкале ленты  $L_1$  (25368 мм) и  $L_2$  (1036 мм) и по рейкам, установленным в исходной точке  $A$  с известной высотой ( $H_A = 436,244$  м) и в определяемых точках  $B$  и  $C$ :  $a = 0957$  мм;  $b = 1352$  мм;  $c = 0993$  мм).

Высота точки  $B$  равна:

$$H_B = H_A + a - (L_1 - L_2) - b \quad (12.10)$$

Высота точки  $C$  (если ноль рейки установлен в точке  $C$ ) равна:

$$H_C = H_A + a - (L_1 - L_2) + c \quad (12.11)$$

В примере:

$$H_B = 436244 + 957 - (25368 - 1036) - 1352 = 411517 \text{ мм} = 411,517 \text{ м};$$

$$H_C = 436244 + 957 - (25368 - 1036) + 993 = 413862 \text{ мм} = 413,862 \text{ м}.$$

При работе используют компарированную ленту, а в процессе измерений определяют температуру воздуха на поверхности и в пределах околоствольного двора для введения поправки для средней температуры ленты. Помимо этого вводят поправку за удлинение ленты от собственного веса и за разность весов грузов при компарировании и измерениях.

Преышение определяют не менее двух раз с изменением горизонта прибора и смещением отсчетов по ленте. Допустимое отклонение в преышениях не должно быть более

$$\Delta h = (10 + 0,2H) \text{ мм} \quad (12.12)$$

где  $H$  – глубина ствола в м. Например, для  $H = 150$  м погрешность в передаче высоты может составить не более 40 мм.

## § 117. Подземная горизонтальная съемка

Производство горизонтальной съемки основано на построении в горных выработках плановых опорных маркшейдерских сетей и выполнении измерений при съемке подробностей в *основных горных выработках*.

Что касается вопросов построения и обработки теодолитных ходов (замкнутых и разомкнутых), то идентичные схемы решения указанных задач подробно рассмотрены в главе 7. Имеющиеся отличия связаны с условиями измерений, требованиями к точности работ, применением специальных приспособлений и оборудования. Все это рассматривается в специальных курсах *маркшейдерии*.

В подземных выработках используются практически те же способы съемки, что и на поверхности земли при теодолитной съемке. Так, например, габариты горных выработок, в которых проложен теодолитный ход, в плане и по высоте в любом их сечении могут быть определены способом ординат, весьма похожим на способ перпендикуляров (рис. 12.8). Измерения в фиксированных точках выполняют желобчатой рулеткой вправо и влево по ходу, а также вверх и вниз. В последнем случае измерения выполняют в точках и на линиях теодолитных ходов, расположенных и выше почвы выработки. Для производства промеров в настоящее время применяют лазерные рулетки с отражателем в виде небольшого экрана, либо работающие пассивным способом, по отражению от поверхности выработки. Расстояния  $a$  измеряют с точностью до 10 см, а ординаты – до 2-3 см.

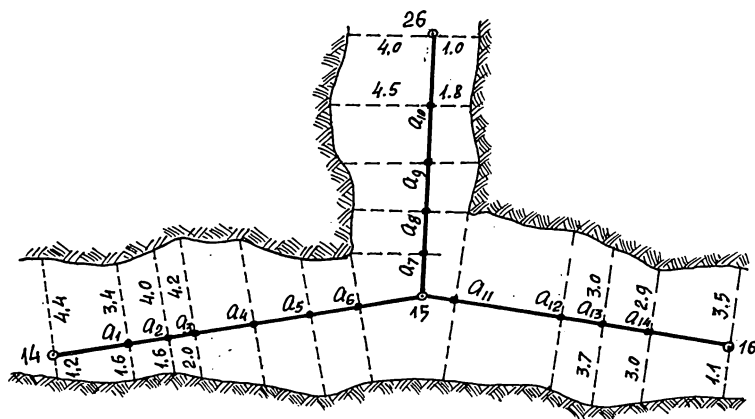


Рис. 12.8. Горизонтальная съемка горных выработок

Реже используют для съемки способ прямой угловой и линейной засечек и др. Наиболее применимы указанные способы при съемке камер и пустот в очистных и нарезных выработках. При съемке очистных и нарезных выработок используют теодолит, специальные угломеры, буссоли и полукруги.

Горизонтальные и наклонные выработки снимают с точек теодолитных ходов с использованием значений дирекционных углов сторон съемочной сети основных или подэтажных горизонтов. Теодолит центрируют с

небольшой точностью ( $\pm 5$  см), отсчеты по горизонтальному кругу берут с округлением до 1'.

Большие трудности вызывает съемка крутых (до  $55^\circ - 65^\circ$ ) нарезных выработок. При углах наклона до  $55^\circ$  используют теодолиты с центральной трубой, при наклонах от  $55^\circ$  до  $65^\circ$  – подвесные теодолиты, при наклонах более  $65^\circ$  – теодолиты с внецентренной трубой, при наклонах от  $75^\circ$  до  $80^\circ$  применяют способ съемки двумя теодолитами, имеющими внецентренные трубы.

Съемка очистных выработок выполняется для определения их размеров, формы и положения выработанного пространства относительно других горных выработок. Кроме того, регистрируется такая важная информация, как знание о структуре и свойствах залежи полезного ископаемого в границах очистной выработки.

Использование того или иного способа съемки очистных выработок зависит от условий съемки. Применяются инструментальные и рулеточные замеры, которые обеспечивают необходимую точность определения основных размеров выработанного пространства за месяц работ не более 1:100. Наиболее распространенными способами съемки выработанного пространства являются способ ординат, линейных засечек, тахеометрический способ, фотограмметрический способ, способ угловой засечки теодолитом или двумя угломерами. Все большее распространение для маркшейдерских съемок получают оптико-электронные приборы, работающие в горных выработках без использования отражателя. В ВИОГЕМе (г. Санкт-Петербург) для съемки пустот камер создан тахеометр в комплекте с лазером ЛГ-56, позволяющий измерять расстояния от 2 до 60 м с погрешностью 1:600 – 1:500. Разработаны и используются при съемках приборы, действие которых основано на звуколокации (профилограф ЗПР-2).

## **§ 118. Подземная вертикальная съемка**

В результате подземной вертикальной съемки получают координаты  $Z$  точек горных выработок. Эти координаты используют затем для решения большого круга задач, основными из которых являются: задание уклонов выработкам; построение профилей и сечений по различным направлениям; определение высот характерных точек залежи (пласта) и др.

Основными методами передачи высот являются геометрическое и тригонометрическое нивелирование.

Геометрическое нивелирование выполняют способом из середины при допуске неравенстве плеч на станции до 8 м. Реперы нивелирных ходов закладывают в почве, боках и кровле выработок (рис. 12.9), в связи с чем для определения превышений используют различные схемы измерений и различные формулы.

Нивелирные ходы замкнутые. В висячих нивелирных ходах измерения выполняют в прямом и обратном направлениях. Невязки в нивелирных ходах не должны превышать

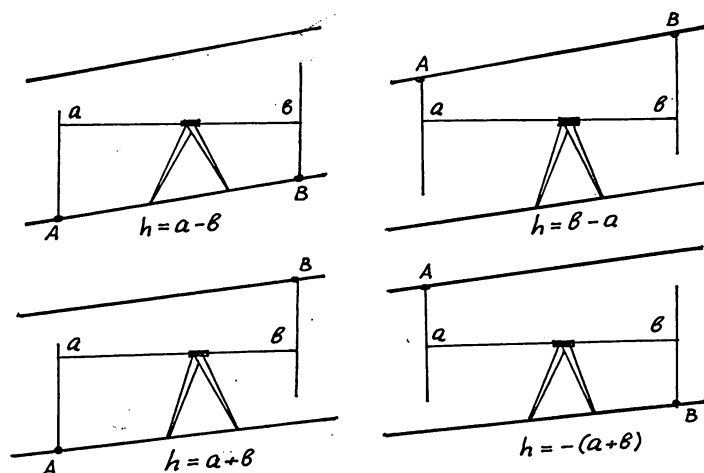


Рис. 12.9. Схемы геометрического нивелирования в подземных горных выработках

$$f_{\text{доп}} = \pm 15 \text{ мм} \sqrt{L(\text{км})} \quad (12.13)$$

Схемы тригонометрического нивелирования приведены на рис. 12.10. На схемах обозначено:  $S$  – наклонное расстояние;  $d$  – горизонтальное проложение;  $\nu$  – угол наклона;  $i$  – высота прибора;  $V$  – высота наведения;  $h$  – превышение.

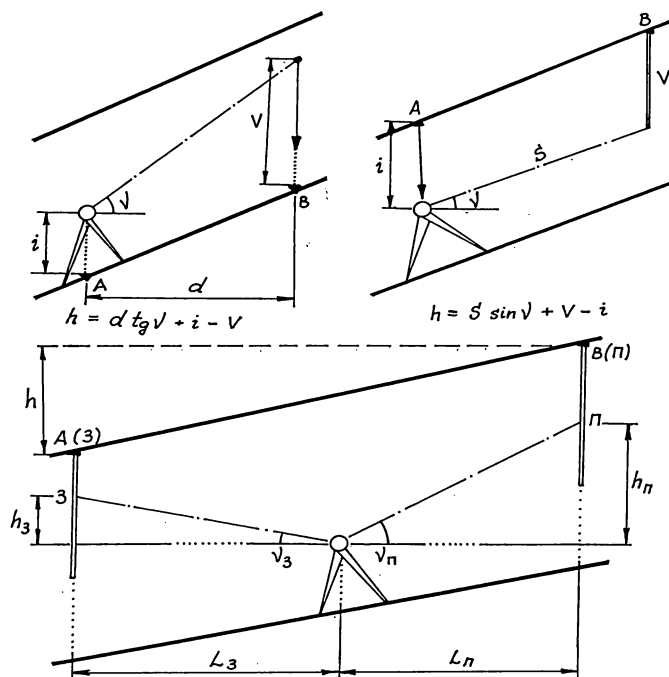


Рис. 12.10. Некоторые схемы тригонометрического нивелирования в подземных горных выработках



В некоторых случаях применяют способ тригонометрического нивелирования из середины, реализация одного из которых представлена в нижней части рис. 12.10. В точках *A* и *B* подвешивают или приставляют к ним нулем две рейки. Превышение

$$h = (П + h_{П}) - (З + h_{З}), \quad (12.14)$$

где *З* и *П* – соответственно отсчеты по задней и передней по ходу рейкам; *h<sub>П</sub>* и *h<sub>З</sub>* – рабочие превышения для передней и задней точек, которые находят по формулам:

$$h_{П} = L_{П} \operatorname{tg} \nu_{П}; \quad h_{З} = L_{З} \operatorname{tg} \nu_{З} \quad (12.15)$$

Разность плеч *L* на станции обеспечивают в пределах 2-3 м, поэтому значения рабочих превышений могут несколько отличаться друг от друга при, например, одинаково установленных углах наклона зрительной трубы на станции. Углы наклона на выбранные отсчеты *З* и *П* измеряют полным приемом. Для повышения точности определение превышений выполняют два раза на других отсчетах *З* и *П*.

## § 119. Геодезические разбивочные работы в подземном строительстве

Здесь будет рассмотрено лишь краткое содержание и состав разбивочных работ при подземном строительстве. Более подробно указанные работы рассматриваются в специальных разделах *маркшейдерии*, а также в специальной литературе по соответствующим видам работ.

При подземном строительстве, в зависимости от вида сооружаемого объекта, разбивочные работы выполняют при строительстве стволов шахт, проведении горных выработок различного назначения (штолен, штреков, квершлагов, вентиляционных выработок и т.п.), тоннелей-путепроводов, наклонных тоннелей для эскалаторов, строительстве станций метро и различных вспомогательных сооружений, при укладке железнодорожных путей и т.п.

Основными видами геодезических (маркшейдерских) работ при этом являются: обеспечение необходимой точности выноса на местность осей и габаритов вертикальных шахтных стволов; обеспечение геометрических размеров при монтаже проходческих механизмов, создание необходимых условий, которые обеспечат проведение проходческих работ с заданной точностью; инструментальный контроль за ведением по заданной трассе проходческого механизма; инструментальный контроль за соблюдением геометрических параметров возводимой крепи; развитие плановой и высотной сети вслед за продвижением горных работ, производство расчетов при решении возникающих задач в процессе проходческих работ, обеспечение сбоек горных выработок, проходимых навстречу друг другу (встречными забоями); контроль за деформациями крепи, за деформациями элементов горных выработок, сооружений на земной поверхности и самой земной поверхности; ведение текущих маркшейдерских замеров с целью оперативного вмешательства в проходческие работы при обнаружении отклонений от проектных данных; замеры объемов горных работ.

Разбивку зданий и сооружений и задание направлений горным выработкам выполняют в строгом соответствии с проектными чертежами и расчетами.

Основные разбивочные работы при шахтном строительстве и на промплощадке заключаются в построении на местности (в натуре) главных осей промплощадки, которыми являются главные оси шахтных стволов, либо стороны разбивочной сети. Осями вертикальных шахтных стволов являются две горизонтальные прямые, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна к основным несущим расстрелам ствола. Точка пересечения осей является центром ствола.

Оси стволов закрепляют не менее, чем четырьмя точками, по две на каждой полуоси.

Для выполнения детальных разбивочных работ при строительстве шахтного комплекса строят разбивочную сеть опорных пунктов. Проект разбивочной сети является основным документом при разбивке и закладке опорных пунктов. Целесообразно строить пункты разбивочной сети на осях главного и вспомогательного стволов, обычно находящихся на значительном расстоянии друг от друга.

Чаще всего разбивочную сеть на промплощадке создают в виде системы прямоугольников со сторонами, ориентированными параллельно осям ствола. При этом основные пункты сети располагают в вершинах прямоугольников, а дополнительные – в створе между ними. При необходимости пункты опорной разбивочной сети могут быть расположены и в других местах, удобных для использования.

Разбивочные работы на промплощадке начинают с центра и осей стволов. Для этого используют проектные координаты центров стволов, проектное значение дирекционного угла одной из главных осей, либо одной из исходных линий разбивочной сети, либо одного из центров ствола и направлением на один или два пункта разбивочной сети, удаленных от центра ствола на расстояние не менее 300 м.

Каждая из осевых линий ствола содержит сравнительно большое число опорных пунктов, которыми пользуются при разбивке и строительстве сооружений и зданий, запроектированных на данной промплощадке. Такими сооружениями могут быть административный корпус, компрессорные, коельные, склады, мастерские и др. Часть опорных пунктов обязательно закрепляют вне границ промплощадки в стороне от подъездных дорог.

При разбивке стволов по всем опорным пунктам, включая дополнительные и вспомогательные, прокладывают полигонометрический ход 2-го разряда с уравниванием и вычислением координат всех пунктов.

Разбивку зданий выполняют по правилам, изложенным в гл. 10 и 11.

Проведение разбивочных работ при сооружениях подземных горных выработок околоствольного двора, а также и других выработок, затруднено тем, что указанные объекты горных работ имеют сложную конфигурацию со множеством сопряжений, закруглений, с переменным сечением и уклонами. Для составления проектов разбивки составляют маркшейдерские планы

масштаба 1:500 и 1:200. При разбивке используют пункты подземной опорной маркшейдерской сети (основы), передача координат и направлений на которую производится с наземной маркшейдерской (геодезической) основы одним из способов, рассмотренных выше в гл. 10.

Трассы тоннелей метрополитенов проектируют на топографических планах масштаба 1:500. Трасса включает два параллельных пути, которые прокладывают в одном, либо каждый в отдельном тоннеле (левый и правый пути). При проектировании разбивочных работ выполняют аналитические вычисления углов поворота, длин линий, элементов круговых кривых и используют их затем как основу для производства детального проектирования и перенесения в подземную часть осей тоннеля и всех сооружений.

На прямых участках ось тоннеля выносят следующими способами:

- откладыванием расстояний от полигонометрического знака подземной маркшейдерской основы до проектной оси;
- выносом от полигонометрических знаков линий, параллельных оси тоннеля;
- выносом полярным способом от полигонометрических знаков осевых отвесов (точка подвеса находится в кровле тоннеля).

Детальная разбивка проектной оси тоннеля на закруглениях чаще всего выполняется от линии тангенсов, либо от стягивающей хорды.

При разбивке наклонных тоннелей (для эскалаторов) первичная разбивка выполняется на поверхности земли. Здесь выносят координаты центра тоннеля и направление его оси в соответствии с проектным значением дирекционного угла. Строят размер большой полуоси тоннеля на вынесенной оси в соответствии с проектным сечением, пересекающем поверхность земли под проектным (заданным) углом наклона или уклоном. По перпендикуляру к большой полуоси строят малую полуось. Если сечение тоннеля представляет собой окружность, то в проекции на поверхность земли, спланированную до плоскости, получается эллипс.

Ось наклонного тоннеля задают теодолитом по аналогии с построением проектного уклона. При этом проектные уклоны являются значительными, поскольку проектные углы наклона эскалатора к плоскости горизонта составляют  $30^\circ$ . Соотношение малой и большой полуосей эллипса в этом случае составляет на горизонтальной поверхности 1:2.

В связи с весьма жесткими требованиями к точности построения разбивочных элементов, определяемой условиями эксплуатации сооружений метрополитена, при работе используют приборы повышенной точности и точные, в том числе электронные тахеометры соответствующих классов, а также и специально разработанные для указанных целей оборудование и приборы.

## Глава 13

# ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАБОТЫ НА ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПРЕДПРИЯТИЯХ

### § 120. Задачи и содержание топографо-геодезических работ

Геологоразведочные работы проводятся в три основных этапа.

На первом этапе (региональная геологическая съемка) выполняют последовательно геологические съемки в масштабах 1:1000000 – 1:500000, 1:200000 – 1:100000, 1:50000 – 1:25000. На втором этапе (поиски месторождений полезных ископаемых) выполняют поисковые работы с целью обнаружения тех или иных полезных ископаемых, выявленных на первом этапе исследований. На этом этапе геологических, геофизических и геохимических исследований работы последовательно ведутся в масштабах 1:50000 – 1:10000 и 1:25000 – 1:1000. На последней стадии выполняют первый подсчет запасов, оценивают прогнозные запасы. Третий этап (разведка месторождений) позволяет наиболее полно оценить запасы и передать их для промышленного планирования и проектирования добычи. Этап разведки делится на три стадии: предварительную, детальную и эксплуатационную разведки. При этом эксплуатационная разведка продолжается и при разработке месторождения.

Каждый из указанных выше этапов и их стадий должны быть обеспечены необходимыми топографическими материалами, а также комплексом геодезических и маркшейдерских работ, связанным с сопровождением геологических и других исследований.

Основной задачей топографо-геодезических работ является получение на исследуемый район геологических поисков топографических карт и планов, а также топографической основы геологической карты, на которую впоследствии наносится геологическая информация.

В процессе геологических поисков и разведки полезных ископаемых выполняется привязка маршрутов и вынос на местность проектного положения искусственных обнажений (горных выработок: шурфов, канав, траншей и т.п.) Для этого на местности выполняют разбивку специальных геологических линий и сеток. Форму и размеры линий и сеток устанавливают при составлении технического проекта работ.

Ответственной задачей топографо-геодезической службы является привязка в плане и по высоте геологических точек как естественного, так и искусственного обнажения. Т.е. определение координат точек в местной или общегосударственной системах координат. Эти работы выполняются с использованием опорной геодезической сети (Государственной геодезической плановой и высотной сети 1 – 4 классов, плановых сетей 1-го и 2-го разрядов, сетей сгущения, теодолитных и тахеометрических ходов и т.п.).

Проходка горных выработок и буровых скважин подземного бурения выполняются с участием геодезиста (маркшейдера). На этапе проходки выработок маркшейдер задает им направление, контролирует проходку, а после

проведения выработок выполняет их съемку и составляет план (топографическую основу), которая используется при решении всех необходимых задач (построение разрезов, геометризация форм залежи, распределение качественных показателей полезного ископаемого и мн.др.).

## § 121. Точность геодезических работ

Весьма важным при выполнении топографо-геодезических работ является обеспечение необходимой их точности. При решении различных задач необходимая точность геодезических работ будет различной.

При геологической съемке детальность исследований определяется изучением одной точки (одного обнажения) на единице площади: при простом геологическом строении – на 2 см<sup>2</sup> карты; при среднем геологическом строении – на 1 см<sup>2</sup> и при сложном строении – на 0,5 см<sup>2</sup>. Определена инструктивными документами и предельная погрешность в установлении геологической границы распространения определенных свойств полезного ископаемого. Геологическая граница проводится посередине между двумя обнажениями: при простом геологическом строении – 10 мм в масштабе картографического материала; при среднем строении – 5 мм; при сложном – 2,5 мм.

Рассмотрим, какими составляющими будет определяться погрешность геологической границы:

- погрешностью положения предметов и контуров на карте, с помощью которой привязывают обнажения ( $m_1, m_2$ ); для наиболее важных контуров принимают  $m_1 = m_2 = 0,4$  мм, для других – 0,6 мм;
- погрешностью привязки обнажений к контурам и предметам, изображенным на карте ( $m_3, m_4$ ); эти погрешности принимают равными 0,2 мм;
- погрешностью интерполяции при проведении геологической границы ( $m_5$ ); при простом геологическом строении  $m_5$  принимают равной 2,5 мм, при среднем – 1,25 мм, при сложном – 0,62 мм.

Используя общую формулу погрешности  $M$  положения геологической границы

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2}, \quad (13.1)$$

вычислим ее значения для различных условий:

- при простом геологическом строении –  $M = 2,6$  мм;
- при среднем геологическом строении –  $M = 1,4$  мм;
- при сложном геологическом строении –  $M = 0,8$  мм.

С учетом сказанного выше составлена табл. 13.1 допустимых средних квадратических погрешностей определения координат геологических обнажений при составлении топографических карт (планов) различных масштабов.

Следует иметь в виду, что приведенные в таблице погрешности относятся к привязке только естественных и искусственных обнажений. При привязке горных выработок и буровых скважин при предварительной и детальной разведках следует ориентироваться на допустимые погрешности

плановой привязки в пределах 0,2 мм в масштабе плана или карты. Эти погрешности приведены для сравнения во второй строке таблицы.

Таблица 13.1

Вид точки	Масштаб топографической карты, плана (топографической основы)					
	1 : 50000	1 : 25000	1 : 10000	1 : 5000	1 : 2000	1 : 1000
Искусственные или естественные обнажения	90/50/25	45/25/12	18/10/5	9/5/2,5	3,5/2,0/1,0	1,8/1,0/0,5
Горные выработки, буровые скважины	10	5	2	1	0,4	0,2

(Геологическое строение: простое / среднее / сложное)

## § 122. Создание топографических карт и планов

Целью топографических съемок при геологоразведочных и геофизических работах является создание топографической основы, на которую впоследствии наносятся результаты соответствующих исследований и решаются специальные задачи: построение контура месторождения, профилей и разрезов, подсчет запасов и мн.др.

Как правило, при геологических съемках и поисках используются государственные топографические карты масштабов 1:100000 – 1:10000. Поисково-разведочные работы и детальная разведка должны быть обеспечены топографическими материалами масштабов, указанных в табл. 13.2.

Таблица 13.2

Стадии геологоразведочных работ	Группы месторождений		
	I	II	III
Поисково-разведочные работы	<u>1:25000</u>	<u>1:10000 – 1:25000</u>	<u>1:10000</u>
	1:25000	1:1000 – 1:25000	1:10000 – 1:5000
Предварительная разведка	<u>1:10000</u>	<u>1:10000</u>	<u>1:10000</u>
	1:10000	1:10000	1:5000
Детальная разведка	<u>1:10000</u>	<u>1:10000 – 1:5000</u>	<u>1:5000</u>
	1:10000 – 1:5000	1:5000	1:2000

1. Группы месторождений полезных ископаемых по сложности строения: I – простое; II – среднее; III – сложное.

2. В числителе – обеспеченность топографическими материалами; в знаменателе – отчетные топографические карты и топоосновы.

В некоторых случаях топографическую основу более крупного масштаба разрешается выполнять увеличением имеющейся карты мелкого масштаба. При этом полученная топооснова должна обеспечивать необходимую точность при ее использовании для решения специальных задач.

Выбор масштаба и содержания нагрузки, точности нанесения ситуации и построения рельефа, а также метода топографической съемки, определяется

следующими основными показателями: категорией и необходимой точностью подсчета запасов полезного ископаемого; размерами тел полезного ископаемого, условиями его залегания и сложностью геологического строения; сроками, способами и очередностью разработки месторождения; топографической сложностью поверхности участка работ.

Топографические карты и планы могут быть созданы с помощью мензульной и тахеометрической съемок, стереофотограмметрическим методом (фототеодолитной съемкой) и методом комбинированной съемки. Метод *комбинированной съемки* предусматривает составление контурных карт и планов по результатам аэрофотосъемки, а рельефа – по результатам наземной съемки.

Плановое и съемочное обоснование строят относительно пунктов Государственной геодезической сети и сетей 1 и 2 разрядов. Высотное обоснование – относительно пунктов Государственной нивелирной сети I-IV классов и технического нивелирования.

В зависимости от условий местности положение пунктов съемочного обоснования определяется построением цепочек и систем триангуляции, прямой, обратной и комбинированной засечек, а также проложением теодолитных (полигонометрических) ходов. Цепочки треугольников и геодезические засечки применяют в открытой и полукрытой местности, а в залесенных районах обычно применяют теодолитные ходы. Погрешность пунктов съемочного обоснования не должна превышать 0,2 мм в масштабе плана, а в залесенных районах – не более 0,4 мм. Формы треугольников должны быть близкими к равносторонним с длинами сторон от 0,2 до 2,0 км. При этом цепочки треугольников должны примыкать к исходным сторонам опорных геодезических сетей. При построении засечек и треугольников углы измеряют с погрешностью не более 15", невязки в треугольниках не должны превышать 1'. При значениях погрешностей за центрирование и редукцию более 5" их вводят в результаты измерения направлений. Длины линий измеряют с относительной погрешностью 1:5000. Уравнивание геодезических построений выполняют нестрогими способами (гл.16).

При редкой сети исходных пунктов в цепочках треугольников выполняют измерение базисов в разных частях цепочки.

Теодолитные ходы прокладывают между пунктами высших классов в виде одиночных ходов и систем ходов с одной или двумя узловыми точками. Длина одиночного хода не должна быть более 5 км, а в системах с узловыми точками – не более 4 км. Относительные невязки в теодолитных ходах не должны превышать 1:200 при благоприятных условиях измерений и 1:1500 – при неблагоприятных условиях. Длины линий в теодолитных ходах измеряют с относительной погрешностью 1:1000 – 1:2000. Допустимая угловая невязка при числе углов  $n$  определяется по формуле  $1' \sqrt{n}$ . Примыкание теодолитных ходов выполняют на два исходных направления. Уравнивание систем теодолитных ходов выполняют нестрогими способами: в одиночных ходах поправки в углы распределяют поровну; в системах ходов с одной или

двумя узловыми точками – поправки вводят с учетом длин ходов и числа точек поворота.

При создании высотного обоснования нивелирные ходы IV класса прокладывают длиной 2-3 км примерно вдоль рамок съемочных планшетов. Если длина параллельных нивелирных ходов превышает четырехкратное расстояние между ними, то выполняют связку в ходах перемычками. В ходах технического нивелирования расстояния от нивелира до реек допускаются до 150 м. Превышения определяют в одном направлении при двух горизонтах прибора, если используется односторонняя рейка, и при одном горизонте – если используется двухшкальная рейка. Невязки в нивелирных ходах не должны превышать  $\pm 50 \text{ мм} \sqrt{L(\text{км})}$ . При использовании тригонометрического нивелирования в горной местности допустимые невязки в ходах должны быть не более  $\pm 200 \text{ мм} \sqrt{L(\text{км})}$ . Системы нивелирных ходов уравнивают нестрогими способами. Если на местности площадью менее 100 км<sup>2</sup> отсутствуют реперы нивелирной сети, то ходы высотного обоснования строят в виде свободных систем полигонов, которые чаще всего в этих случаях прокладывают по точкам планового съемочного обоснования.

### § 123. Разбивка геодезических сеток и профильных линий

В общий комплекс геодезических и маркшейдерских работ входит создание опорной сетки или рабочего обоснования для производства разбивочных и привязочных работ.

Особенности, которые следует учитывать при построении геодезических сеток, заключаются в следующем. Проектный план размещения горных выработок составляют на картах более мелкого масштаба, чем масштаб отчетных геологических карт. В связи с этим и перенесение на местность проектных горных выработок выполняется с невысокой точностью, определяемой точностью графически полученной информации. Привязка же фактически пройденных выработок должна выполняться с точностью, определяемой данной стадией исследования. А эта точность значительно выше, чем точность проектирования и выноса проекта в натуру. Таким образом, опорная геодезическая сетка должна обеспечивать возможность привязки горных выработок с установленной точностью.

Под опорной сеткой понимается система закрепленных на местности точек, координаты которых определены в результате проложения теодолитных (полигонометрических) ходов, выполнения различных геодезических засечек, построения геодезических сетей, специальных разбивок в виде прямых или ломаных линий и др. Вершины опорной сетки стремятся располагать в местах, с которых впоследствии будет удобно выполнять как перенесение в натуру проектных точек, так и последующую привязку после проведения горных выработок. Густоту точек опорной сетки задают с таким расчетом, чтобы все геологические выработки могли быть привязаны, либо перенесены в натуру простейшими геодезическими построениями. Чаще всего в качестве простейших геодезических построений используют способ полярных координат.



нат, линейной засечки, небольшой ход между двумя точками опорной сети, способ перпендикуляров.

Если по каким-либо причинам технического характера затруднено проведение разбивочных работ и не обеспечивается привязка выработок с необходимой точностью, то опорную сетку сгущают в локальных местах известными способами.

За исходные пункты (безошибочные) при построении опорных сеток принимают пункты геодезических сетей, а также пункты аналитических сетей и полигонометрии 1 и 2 разрядов. Поскольку относительные погрешности взаимного положения горных выработок должны быть не более 1:300, то построение точек опорных сеток необходимо выполнять с погрешностью не более 1:600, а магистральные ходы, с которых производится разбивка опорных сеток, должны быть построены с погрешностями 1:1000 – 1:1500. Абсолютные погрешности построения опорных сеток должны удовлетворять требованиям графической точности построения топографической основы отчетных карт и планов.

В табл. 13.3 приведены значения допусков для разбивки и привязки разведочных линий, профилей и отдельных точек относительно пунктов опорной сетки и используемых исходных пунктов для масштабов соответствующих топографических карт.

Таблица 13.3

Виды и этапы геологоразведочных работ	Средние квадратические погрешности	Предельные погрешности	Невязки в ходах
Геологическое картирование	<u>0,5-1,8</u>	<u>1,0-3,6</u>	<u>2,0-7,2</u>
Сейморазведка	<u>0,4</u>	<u>0,8</u>	<u>1:300</u> 1,6
Другие геофизические методы	<u>0,4</u>	<u>0,8</u>	<u>1:100</u> 1,6
Поиски и поисково-разведочные работы	<u>0,20</u> 0,22	<u>0,40</u> 0,45	<u>0,8</u> 0,9
Разведочные работы:			
- буровые скважины	<u>0,10</u> 0,15	<u>0,20</u> 0,30	<u>0,40</u> 0,60
- поверхностные горные выработки	<u>0,18</u> 0,20	<u>0,36</u> 0,40	<u>0,70</u> 0,80

1. Допуски указаны в мм в масштабе соответствующей карты.
2. В числителе – относительно опорной сетки; в знаменателе – относительно исходных пунктов.

Опорная сетка состоит из магистральных ходов и профильных линий (рис. 13.1). На рисунке магистраль 1-2-3-4-5-6-7 привязана к исходным направлениям, I – VII – профильные линии.

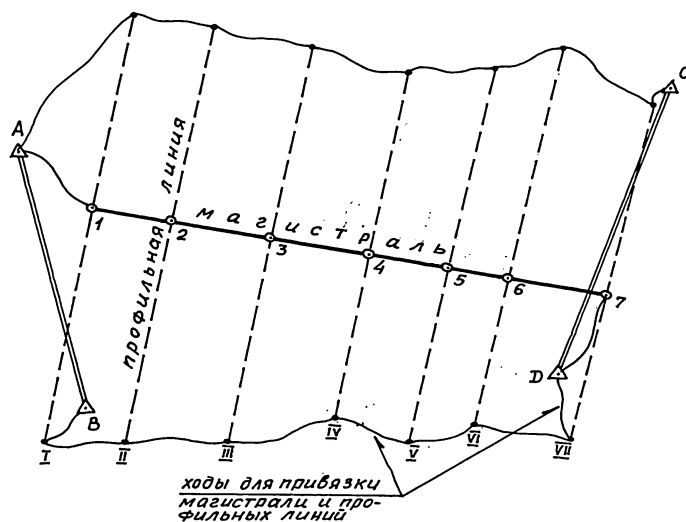


Рис. 13.1. Построение магистральных ходов и профильных линий

Общие требования к точности построения магистральных ходов приведены в табл. 13.4.

Таблица 13.4

Требования по видам работ	Поиски в масштабах 1:50000-1:10000	Поисково-разведочные работы в масштабе 1:25000 и крупнее	Предварительная и детальная разведка
Примерные расстояния между линиями, км	8 - 5	5 - 3	3 - 1
Точность магистрального хода (в относ.ед.)	1:500	1:1000	1:1000-1:1500
Точность разбивки пикетажа профильных линий (в относ.ед.)	1:200	1:500	1:1000
Привязка опорной сетки в плане	По карте более крупного масштаба к имеющимся пунктам геодезической сети (1:500)	1:25000 – по топографической карте того же масштаба; крупнее 1:25000 – к пунктам геодезической сети (1:1000)	Инструментально к пунктам геодезической сети
Передача отметки на опорную сетку	То же	Тригонометрическое нивелирование с точностью $\pm 200 \text{ мм} \sqrt{L(\text{км})}$	Нивелирование IV класса и техническое нивелирование с точностью $\pm 50 \text{ мм} \sqrt{L(\text{км})}$

Магистральные ходы прокладывают преимущественно прямолинейными по установленным направлениям и связываются между собой в единую

систему. Углы в магистральных ходах измеряют одним полным приемом, длины линий – в прямом и обратном направлениях. Основные характеристики магистральных ходов приведены в табл. 13.5.

Таблица 13.5

Требования к магистральным ходам	Поиски в масштабах: А. 1:50000 Б. 1:25000 В. 1:10000	Поисково-разведочные работы в масштабах: А. 1:25000 Б. 1:10000 В. 1:5000 Г. 1:2000	Предварительная и детальная разведка
Максимально допустимая длина магистрального хода, км: - между пунктами геодезической основы или исходными пунктами; - между узловыми точками	А. 15 Б. 12 В. 8  А. 10 Б. 8 В. 6	А. 12 Б. 8 В. 6 Г. 4  А. 8 Б. 6 В. 4 Г. 3	6    4
Допустимая разность двойных измерений длин линий (относ.ед.)	1:500	1:1000	1:1500 (благоприятные условия); 1:1000 (неблагоприятные условия)
Допустимая угловая невязка	$1,5'\sqrt{n}$	$1,5'\sqrt{n}$	$1'\sqrt{n}$

На линиях магистральных ходов через установленные интервалы отмечают на местности точки пересечения с профильными линиями. Направления профильных линий задают теодолитом при двух положениях круга в одну или обе стороны от магистрального хода. Указанное направление фиксируют на местности вехой, устанавливаемой от магистральной линии на расстоянии не менее 100 м. Профильные линии разбивают по их створу с помощью теодолита (при предварительной и детальной разведках), либо «на глаз» с помощью бинокля – в других случаях. Интервалы между пикетами профильных линий задают мерным прибором, дальномером или светодальномером. Конечные точки профильных линий связывают между собой и привязывают к магистральным ходам.

Вынесенная на местность точка профильной линии закрепляется колом длиной 0,5 – 1,0 м с соответствующими на нем записями номера профильной линии и номера пикета. В закрытой местности при больших расстояниях между пикетами на коле отмечают стрелкой направления на соседние пикеты.

## § 124. Разбивочные работы при проведении геологической разведки

В состав работ по перенесению в натуру проектного положения разведочных горных выработок и пунктов геофизических наблюдений входят следующие процессы: рекогносцировка местности с целью нахождения имеющихся пунктов Государственной геодезической и нивелирной сетей; составление рабочего проекта сгущения геодезической сети и проекта разбивочных работ; создание на местности опорной сети или рабочего обоснования для выполнения работ по разбивке и привязке точек и объектов геологических наблюдений; перенесение на местность проектного положения точек геологических наблюдений; привязка пройденных выработок и нанесение их на картографические материалы.

Характер производства разбивочных работ на стадиях их проектирования и исполнения определяется, в основном, расположением на местности (на исследуемой площади) геологоразведочных объектов (разведочных буровых скважин на линиях, шурфов, канав, траншей и др.). Часто точки геологических исследований определяются специалистами геологами по факту, без составления проекта. В этом случае необходимость в производстве разбивочных работ для указанных точек отпадает, а выполняется только привязка уже фактически пройденных выработок.

Из-за сложности условий разведки, определяемых характером местности, фактическое положение геологоразведочной выработки может значительно отличаться от ее проектного положения, зафиксированного на местности на стадии разбивочных работ. Например, из-за невозможности установки бурового станка в запроектированной точке, а также и по другим причинам технического характера.

При перенесении в натуру точек горных выработок и пунктов геофизических наблюдений производят построение точек, ломаных линий, а также системы параллельных линий. В связи с этим на местности отмечают как места постановки геофизического или бурового оборудования, центры Шурфов, шахт, так и оси штолен, канав, траншей и т.п. Оси размечают с частотой 10 м соответствующими пикетными точками.

На рабочий разбивочный чертеж наносят используемые пункты геодезической сети и точки сетей местного значения, разведочные линии и профили с указанием мест заложения разведочных точек и линий, величин дирекционных и, при необходимости, горизонтальных углов и длин линий, используемых при разбивках, а также контуры ситуации, если разбивка производится непосредственно от этих контуров.

На рис. 13.2 показан пример проекта разбивочных работ для выноса на местность двух разведочных линий буровой разведки (*РЛ4* и *РЛ5*), линии разведочных шурфов (*РЛ6<sub>ш</sub>*), а также трех отдельных шурфов вне локализованных разведочных линий: *Ш36*, *Ш37*, *Ш38*.

Разведочные линии *РЛ4*, *РЛ5* и *РЛ6<sub>ш</sub>* выносятся на местность *способом створа* от соответствующей исходной линии теодолитного хода *Т7*, *Т8*, *Т9*, *Т10*, *Т11*.

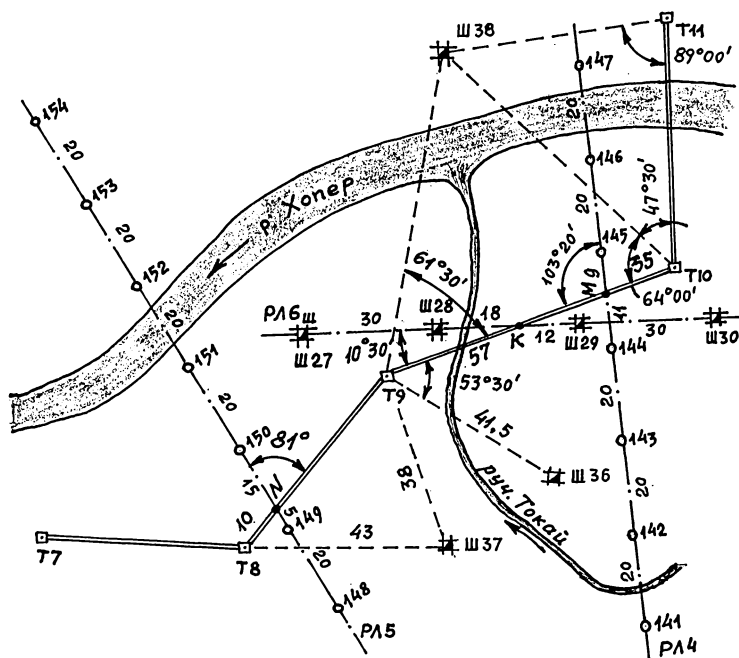


Рис. 13.2. Разбивочный чертеж

Створ линии *РЛ4* задан положением точки *М*, находящейся на пересечении с линией теодолитного хода *Т9-Т10* на расстоянии 35 м от точки *Т10*, и углом  $103^{\circ}20'$  от направления *Т10-Т9*. В точке *М* устанавливают теодолит и строят им створ в разных направлениях. Затем на расстоянии 11 м от точки *М* определяют положение скважины №144 и далее, через 20 м, положение по створу остальных скважин. В другом направлении – на расстоянии 9 м от точки *М* находят положение скважины № 145 и по створу – положение остальных скважин через установленный шаг.

Аналогично выносят *РЛ5* и *РЛ6ш*. *РЛ5* – разбивкой створа от точки *N* находящейся на расстоянии 10 м от точки *T8*, под углом  $81^\circ$  к линии *T8-T9*; *РЛ6ш* – разбивкой створа в точке *K* на линии *T9-T10* под углом к ней в  $10^\circ 30'$ . Расстояние между шурфами по линии – 30 м.

Шурф *Ш36* выносится на местность способом полярных координат от линии *T9-T10* (угол в точке *T9*  $53^{\circ}30'$  и расстояние *T9-Ш36* 41,5 м). Шурф *Ш37* строят способом линейной засечки с точек *T8* и *T9* расстояниями 38 и 43 м. Шурф *Ш38* – способом угловой засечки с двух базисов, *T9-T10* и *T10-T11*, соответствующими углами.

Вынесенная в натуру точка закрепляется на местности колом длиной 0,5 – 1,0 м с записью на нем номера разведочной линии и номера разведочной точки, имеющих единую нумерацию по всей исследуемой территории. Вокруг точки делается окопка и при необходимости устанавливается опознавательный знак.

## **§ 125. Привязка геологоразведочных выработок к опорной геодезической сети**

Привязка объектов геологических и геофизических наблюдений может быть выполнена всеми известными способами, рассмотренными ранее в гл. 7: способы геодезических засечек (прямой угловой и линейной), способ полярных и прямоугольных координат, способ створа др.

Часто с точек профильных линий привязку выполняют методом геодезических засечек, предложенным А.И.Дурневым. Этот метод целесообразно применять в местности, неблагоприятной для непосредственных измерений линий. Он основан на построении на местности по одной из разведочных линий ходовой линии, в вершинах которой измеряют углы между соседними ходовыми линиями и углы, образующиеся направлениями между ходовыми линиями и направлениями на горные выработки или буровые скважины, расположенные на соседних разведочных линиях. Таким образом, в данном методе реализуется способ прямой угловой засечки, при этом, как минимум, производится привязка всех выработок, находящихся на трех разведочных линиях, что значительно сокращает полевые работы. Взаимная видимость должна обеспечиваться только между смежными пунктами ходовой линии, а на точки соседних разведочных линий может быть только односторонняя видимость.

В большинстве случаев опорная сетка создается не произвольно, а в процессе перенесения в натуру проектных точек горных выработок или буровых скважин. Проще обстоит дело с геофизическими профилями, поскольку геофизические приборы устанавливают непосредственно на вынесенную точку, т.е. точку опорной сетки. Следовательно, в этом случае нет необходимости выполнять работы по привязке точек геофизических наблюдений. Эти данные уже имеются в разбивочном чертеже для построения профильных линий.

Для разбивки точек геологических наблюдений вершина опорной сетки находится в непосредственной близости от искомой точки. Следовательно, привязку таких точек просто выполнить непосредственно мерным прибором (способами перпендикуляров и линейной засечки).

В любом случае, с целью сокращения полевых работ, целесообразно вынос проекта в натуру выполнять таким образом, чтобы, по возможности, уменьшить объем привязочных работ. Для каких-то точек вообще исключить необходимость привязки, для других – свести привязку к простейшим измерениям. В таком случае понятие «привязка» теряет свой первоначальный смысл и превращается в понятие «допривязка», характеризующееся фиксацией незначительных изменений в положении точек наблюдений.

## Глава 14

# НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ДЕФОРМАЦИЯМИ ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

### § 126. Виды деформаций инженерных сооружений

Инженерные сооружения и земная поверхность испытывают различные деформации, которые возникают вследствие внешних воздействий при изменении природных условий, а также являются следствием деятельности человека. К деформациям объектов приводят факторы, влияющие на разупрочнение грунтов (обводнение или осушение территории, локальные изменения влажности грунтов на площадке размещения инженерного сооружения, неудовлетворительное состояние отвода атмосферной влаги, влияние морозного пучения увлажненных грунтов и др.). При проведении горных работ, строительстве тоннелей, коллекторов происходят опускания земной поверхности с находящимися на ней сооружениями, происходят и деформации самих горных выработок. Часто деформации вызываются карстовыми явлениями, воздействием вибраций от массивных механизмов, сейсмическими воздействиями от землетрясений. Опыт изучения деформаций, накопленный за несколько десятков лет, показывает, что их величина определяется от единиц миллиметров до десятков метров.

Под деформацией понимают изменение формы объекта (здесь – инженерного сооружения или земной поверхности). В результате постоянного давления массивного сооружения на грунт происходит сжатие грунта и смещение объекта в вертикальном направлении. Такое смещение называют *осадкой*. Обычно осадка носит затухающий характер и для вновь построенного сооружения достигает через некоторое время предельной величины. В результате воздействия различных факторов природного и искусственного происхождения может произойти коренное изменение структуры грунтов основания. В связи с этим возникает быстропротекающие во времени деформации, которые называют *просадками*. Как осадка сооружения, так и его просадка могут проявляться неравномерно по площади. Это положение возникает при неравномерных нагрузках на грунт, а также из-за значительно различающихся его свойств даже при равномерной нагрузке. Неравномерные деформации приводят к *кренам* сооружений, *сдвигам*, *перекосам*, *прогибам*, *горизонтальным смещениям*. Чаще всего такие деформации проявляются в виде трещин, разломов, призм откола на углах сооружений, в ослаблении несущих конструкций. Горизонтальные смещения сооружений часто наблюдаются в тех случаях, когда объект находится на склоне, либо вблизи него. В этом случае решающим может оказаться боковое давление грунта. Подобные деформации испытывают гидротехнические сооружения из-за бокового давления воды. Объекты башенного типа испытывают воздействия неравномерного солнечного нагрева и ветра, что приводит к их *изгибам*, *кручению* и *наклону*. Наклон в направлении продольной оси сооружения называют *завалом*, а в направлении поперечной оси – *перекосом*. Участок

земной поверхности, который подвергся сдвигению под влиянием горных работ, называют *мульдой сдвижения*. В общем случае точки земной поверхности в мульде сдвижения перемещаются в вертикальном и горизонтальном направлениях. Вертикальная составляющая вектора сдвижения точки в мульде называется *оседанием* (земной поверхности). Участок мульды сдвижения, в котором изгиб слоев грунта происходит без разрывов сплошности массива, называют *зоной прогиба*. Горизонтальная составляющая вектора сдвижения точки в мульде определяет процессы *растяжения* или *сжатия*. Растяжение приводит к разрывам сплошности массива горных пород (грунта), сжатие чаще способствует вспучиваниям грунтов. Откосы часто подвержены *оползням* – медленным смещениям масс горных пород. Это смещение происходит в виде скользящего движения между сдвигающимися породами и неподвижным массивом. При быстром смещении породных масс или блоков и пачек пород, слагающих откос, возникает *обрушение*. Оно сопровождается дроблением смещающейся части массива. Некоторые разновидности песчано-глинистых пород, насыщенные водой, способны перейти в текучее состояние при углах наклонов  $4^{\circ} - 6^{\circ}$ . Перемещение таких масс называют *оплы-виной*. *Опływанием* (как процессом) называют фильтрационные деформации, которые вызываются переносом и переотложением грунтовых частиц подземными водами. Оплывание происходит в откосах в местах высачивания подземных вод. Приповерхностная часть откоса может разрушаться и смещаться в основном под действием силы тяжести грунтов и при значительных углах откоса. Такие разрушения называют *осыпями*.

## § 127. Задачи наблюдений и организация работ

Деформации инженерных сооружений, их частей, а также земной поверхности с расположенными на ней сооружениями в период производства строительных работ и в период эксплуатации могут привести к нарушению работы строительных конструкций, к перенапряжениям в них и, как показывает практика, даже разрушениям не только эксплуатируемых, но и строящихся зданий.

Натурные наблюдения за деформациями инженерных сооружений и земной поверхности позволяют решить целый ряд основных задач на различных этапах возведения и существования инженерного сооружения.

Во-первых, результаты исследований деформаций зданий, построенных на разных грунтах, в различных природных условиях позволяют вносить коррективы в методику строительных работ и расчетов прочности конструкций.

Во-вторых, аналогичные наблюдения в период строительства зданий позволяют оперативно вмешаться в технологию строительства, выполнить анализ прогнозных и фактических деформаций.

В-третьих, стационарные наблюдения за объектами, на которые постоянно воздействуют внешние нагрузки (гидротехнические объекты, элеваторы и др.) позволяют оперативно оценивать напряженно-деформируемое состояние в целом сооружения и отдельных его конструкций с целью принятия



возможных мер по снижению уровня негативного воздействия на состояние сооружения.

Кроме того, необходимость в проведении наблюдений за деформациями обычно возникает при реконструкциях сооружений. В процессе реконструкции зачастую режим нагрузок изменяется, что приводит и к изменению режима работы несущих элементов здания.

Наблюдения за деформациями строительных конструкций ведут в период строительства и часто в период эксплуатации до достижения уровня стабилизации деформаций. В период строительства геодезические наблюдения обеспечивает заказчик строительства, он же и оплачивает эти работы. В период эксплуатации заказчиком инженерно-геодезических работ является предприятие, организация, либо частное лицо, в ведении которого находится данный объект. Наблюдения за деформациями специальных и уникальных сооружений, исторических архитектурных памятников организуют проектные и научно-исследовательские организации, и оплачиваются указанные работы из государственного бюджета.

Работы по наблюдениям за деформациями сооружений организуются по примерно одинаковой схеме для любых исследуемых объектов: разработка технического задания (с участием исполнителя работ), в котором, в частности, обязательно указывается необходимая точность измерения тех или иных деформаций, периодичность наблюдений и др.; рекогносцировка объекта с целью обозначения мест закладки исходных геодезических знаков, деформационных точек на объекте и мест установки оборудования для наблюдений; составление схем измерений и оценка их качественных характеристик; разработка конструкции геодезических знаков и их установка на наблюдаемом объекте (устройство наблюдательной станции); разработка методики и программы работ; производство наблюдений; обработка результатов наблюдений с оценкой фактической точности измерения деформаций.

## § 128. Геодезические знаки и их конструкции

**Репер.** Представляет собой геодезический знак с фиксированной точкой в плане и по высоте, закрепленный в грунте, сооружении или горной выработке. *Глубинный репер* своим основанием закреплен в скальных породах, либо других практически несжимаемых коренных породах. *Грунтовый репер* основанием устанавливают на 0,5 м ниже глубины промерзания грунта в данном районе, либо ниже глубины протаивания грунта в районах вечной мерзлоты, а также ниже глубины возможного перемещения грунта. Исходный репер закладывают в зонах, не подверженных смещениям. Он служит для передачи исходной отметки на опорные и рабочие реперы. *Опорный репер* является исходным репером для какой-либо профильной линии, либо для какого-либо отдельного сооружения или его части. Опорный репер должен находиться в зоне, не подверженной смещениям. Исходный репер и реперы, устанавливаемые в грунт, могут иметь различные конструкции, выбор которых зависит от назначения репера, характеристик грунтов и др.

Часто репер представляет собой штангу, хвостовик которой цементируется на определенной глубине в скважине. Защита штанги репера от грунта обеспечивается обсадной трубой большего диаметра.

*Рабочий репер* устанавливают непосредственно в исследуемых точках земной поверхности или сооружения. Он служит для определения величины той или иной деформации. *Стенной репер* устанавливают на несущих конструкциях зданий и сооружений, а также в почве, боках или кровле горных выработок. Часто стенной репер также называют рабочим репером.

**Деформационная марка.** Геодезический знак, который жестко закрепляют на конструкции здания или сооружения, изменяющей свое положение вследствие осадки, просадки, сдвига, крена, горизонтального смещения и т.п. объекта. В зависимости от назначения деформационная марка может иметь специальное отверстие для установки визирной цели при измерении горизонтальных смещений, при этом марка устанавливается непосредственно на конструкцию, либо размещается на специальном кронштейне. Марки, служащие для измерения осадок, имеют выступающую сферическую головку для установки на нее нивелирной рейки. В некоторых случаях используют совмещенные марки для измерения горизонтальных и вертикальных перемещений.

**Ориентирный знак.** Служит для обеспечения исходного ориентирного направления. Используется при измерении сдвигов, горизонтальных смещений и крена сооружений. Ориентирный знак представляет собой визирную цель, которую устанавливают на штатив, кронштейн и т.п. часто с приспособлением для принудительного центрирования

**Маяк.** Приспособление, предназначенное для наблюдений за развитием трещин. Часто это гипсовые или алебастровые пластины (плитки), перекрывающие трещину (работают на разрыв). В других случаях маяки располагают по разные стороны трещины с устройством приспособлений, позволяющих производить измерение раскрытия трещины (с помощью миллиметровой линейки, штангенциркуля, микрометра, индикатора часового типа и др.). Можно на маяк нанести риски и раскрытие трещины измерять линейкой по изменению расстояния между рисками. *Щелемер* – устройство для измерения раскрытия трещины по двум или трем направлениям. Для определения линейных величин раскрытия трещин щелемер снабжается шкалами и отсчетным индексом. Шкала и отсчетный индекс закрепляются по разным сторонам трещины.

## § 129. Размещение геодезических знаков на инженерных сооружениях

Инструментальные наблюдения за деформациями сооружений проводятся на *наблюдательных станциях*, которые включают в себя систему исходных геодезических знаков, закрепляемых в местах, обеспечивающих их сохранность и неподвижность в период наблюдений, а также систему рабочих геодезических знаков, смещения которых наблюдаются периодически теми или иными методами. Закладка наблюдательной станции производится по

специальному проекту, который согласовывается заказчиком работ и их исполнителем.

Количество исходных реперов при измерениях вертикальных перемещений на наблюдаемом объекте должно быть не менее трех, чем обеспечивается возможность выявления относительных перемещений исходных точек. Кроме того, если объект состоит из нескольких наблюдаемых сооружений, то около каждого из них целесообразно разместить (метрах в 2 – 5 от объекта) отдельный грунтовый репер (опорный репер). При строительстве наблюдательной станции для наблюдений за сдвигами земной поверхности положение рабочих геодезических знаков выносят на местность инструментально с помощью теодолита, нивелира и мерных приборов.

При наблюдениях за зданиями необходимо устанавливать возможную неравномерность оседания фундамента, фиксировать трещины и повреждения конструкций, наличие и состояние технологических швов и шарнирных соединений в конструкциях. В промышленных зданиях необходимо определять крены колонн, крены фундаментов технологического оборудования, состояние подкрановых путей.

Рабочие реперы в бескаркасных зданиях закладывают в несущие стены и пилястры непрерывно по всему периметру. Расстояния между рабочими реперами должны находиться в пределах 6-12 м, однако каждая сторона здания должна быть обеспечена тремя реперами. На деформационных и температурных швах следует закладывать реперы на каждой из сторон шва. По два репера следует устанавливать в местах возможного появления трещин.

В зависимости от конструкции здания реперы должны быть установлены на каждом из его углов, а также в местах непосредственного примыкания различных конструктивных элементов (по одному реперу на каждой из конструкций в месте их стыка).

Для отдельных зданий, имеющих более одного этажа, часто рабочие реперы устанавливают на каждом этаже с целью определения взаимного смещения межэтажных конструкций, деформаций пролетов и т.п.

Конструкция рабочих реперов и способ их закладки должны обеспечивать легкий доступ к ним наблюдателя, а также возможность длительного существования геодезического знака.

Размещение геодезических знаков на исследуемых объектах должно обеспечивать получение качественной информации о состоянии сооружения. Так, при исследованиях фундаментов технологического оборудования рабочие реперы должны обеспечивать регистрацию смещений точек фундамента в двух взаимоперпендикулярных направлениях. При наблюдениях за транспортерными галереями и надземными трубопроводами эстакадной прокладки необходимо обеспечить регистрацию неравномерности оседаний и горизонтальных перемещений фундаментов опор вдоль оси эстакады, при наблюдениях за подземными трубопроводами и коммуникационными тоннелями необходимо определять их напряженно-деформированное состояние, для определения крена высоких сооружений необходимо выбрать равномерно

по всему периметру не менее четырех мест установки ственных рабочих реперов при наблюдениях методом геометрического нивелирования, либо не менее двух плановых грунтовых знаков при наблюдениях с помощью теодолита и др.

### § 130. Точность измерения деформаций

Требуемая точность измерения деформаций является весьма важным показателем для организации инженерно-геодезических измерений. С одной стороны, требуемая точность является показателем достоверности получаемых результатов. С другой стороны, она в целом определяет методику работ и выбор необходимых средств измерений. Завышение точности приводит к необоснованным материальным затратам на производство работ. Занижение точности не позволит качественно решить основную задачу наблюдений.

Точность измерений указывается в техническом задании. Она может быть получена расчетным путем, назначена по нормативным показателям, а также принята в качестве исходной на основе предшествующих работ на объектах-аналогах.

Если исходят из нормативных показателей, то значение необходимой точности часто определяют по величине ожидаемых перемещений, что устанавливается в проекте работ. В табл. 14.1 приведены нормативные показатели необходимой точности измерения горизонтальных и вертикальных смещений.

Таблица 14.1

Расчетная величина горизонтальных или вертикальных перемещений, мм	Допустимая погрешность измерений между циклами, мм			
	Строительный период		Эксплуатационный период	
	Грунты			
	песчаные	глинистые	песчаные	глинистые
до 50	1	1	1	1
50 – 100	2	1	1	1
100 – 250	5	2	1	2
250 – 500	10	5	2	5
свыше 500	15	10	5	10

Указанные диапазоны точности измерений характеризуются различными методиками производства работ и классами измерений – от высокоточных и точных измерений до технических. Для измерения деформаций приняты классы точности измерений (табл. 14.2), которые нельзя отождествлять с классами построения плановых и высотных геодезических сетей.

Если при составлении проекта инженерно-геодезических работ невозможно установить требуемую точность измерений по нормативным показателям, то выбор того или иного класса измерений предварительно определяется по другим показателям.

Таблица 14.2

Классы точности измерений	Допускаемая точность измерения перемещений, мм	
	вертикальных	горизонтальных
I	1	2
II	2	5
III	5	10
IV	10	15

Класс I: для уникальных сооружений; для памятников архитектуры; для сооружений, находящихся более 50 лет в эксплуатации; для сооружений, возводимых на скальных и полускальных грунтах.

Класс II: для сооружений, возводимых на песчаных и глинистых и других сжимаемых грунтах.

Класс III: для сооружений, возводимых на насыпных, просадочных, заторфованных и других значительно сжимаемых грунтах.

Класс IV: для всех земляных сооружений.

Кроме указанных требований точности измерения горизонтальных и вертикальных перемещений установлены требования к точности измерения кренов (в мм) в зависимости от высоты  $H$ (мм) объекта:  $0,0001H$  (для гражданских зданий и сооружений);  $0,00001H$  (для фундаментов под машины и агрегаты;  $0,0005H$  (для промышленных зданий и сооружений, мачт, дымовых труб, башен и др.).

При выборе метода измерений и технических средств необходимо учитывать, что показатели точности измерений в цикле должны быть меньше на  $\sqrt{2}$  при условии равноточности измерений, поскольку величина деформации является косвенной – разностью координат искомых точек в сопоставляемых циклах наблюдений.

### § 131. Периодичность наблюдений

Периодичность наблюдений характеризуется числом циклов измерений в единицу времени. Единицей времени могут быть сутки, недели, месяцы и т.п.

Частота наблюдений должна обеспечивать получение надежной картины поведения объекта. Несомненно, при большой частоте наблюдений картина деформаций получится достоверной, но при этом значительно возрастают материальные затраты, причем, возможно, и необоснованно.

Наблюдения за деформациями строящихся зданий ведут с начала возведения фундамента. Обычно частота первоначальных наблюдений сравнительно высокая. Это часто объясняется необходимостью отработки схем измерений, установления их фактических качественных характеристик.

Частота наблюдений зависит от физического состояния грунтов и типа возводимого сооружения, периода строительства, типа исследуемых деформаций и др. Часто периодичность наблюдений согласуют с параметрами изменения нагрузки на фундаменты. Например, обязательными являются наблюдения в периоды достижения нагрузки в 25, 50, 75 и 100% от

расчетной. Для сооружений, завершенных строительством, наблюдения в период эксплуатации проводят 1 – 2 раза в год до тех пор, пока не будут установлена стабилизация деформаций.

Периодичность наблюдений часто устанавливают в зависимости от степени приближения деформаций к критическим их значениям, установленным для разных грунтов и типов сооружений. При оценках можно пользоваться следующими значениями критических (относительных) деформаций при наблюдениях за оползневыми процессами: для горизонтальных смещений – 0,001 – 0,005; для вертикальных смещений – 0,01 – 0,02.

Другим показателем, определяющим необходимую периодичность наблюдений, является скорость изменения вертикальных смещений (табл. 14.3).

Таблица 14.3

Скорость вертикальных смещений, мм/сутки	1	2	5	10	20
Периодичность наблюдений, дни	75	40	15	7	ежедневно

При изучении уникальных сооружений и памятников архитектуры часто периодичность наблюдений определяют на основе поставленных научно-исследовательских задач. Например, исследование влияния морозного пучения на характер деформационных процессов сооружения. В этом случае необходимо получить информацию за период промерзания и оттаивания грунтов, а также в межлетний период.

Помимо установленной периодичности наблюдений могут быть и промежуточные (внеплановые) наблюдения, которые проводят после неожиданного воздействия природных и техногенных факторов.

### § 132. Наблюдения за вертикальными перемещениями

При наблюдении за вертикальными перемещениями используют различные способы, среди которых следует выделить наиболее употребляемые в практике работ: геометрическое и тригонометрическое нивелирование, микро nivelирование, гидронивелирование, а также фото- и стереофотограмметрические способы.

Большими преимуществами обладает способ *геометрического нивелирования* (см. гл. 9). В первую очередь достоинства этого способа заключаются в возможности определения вертикальных перемещений с высокой точностью на сравнительно больших расстояниях между точками. Так, например, при расстояниях между точками 5 – 20 м возможно обеспечение точности измерения перемещений до 0,05 – 0,10 мм, при расстояниях до 1 км измерение вертикальных перемещений можно выполнить с точностью 0,5 – 1,0 мм.

Из других преимуществ данного способа следует отметить быстроту измерений, возможность поведения работ в стесненных условиях, при наличии помех, использование в работе стандартного оборудования, а также использование большого опыта проведения подобных измерений. Для высокоточного нивелирования используют нивелиры типа Н 05 с микрометром в комплекте с инварными рейками, для точного – нивелиры типа Н1 и Н2 с инварными рейками, для работ сравнительно меньшей точности – нивелиры типа Н2 (без микрометра), Н3 с рейками соответствующего класса (цельные нескладные с делениями 5 и 10 мм).

*Тригонометрическое нивелирование* используют в тех случаях, когда наблюдаемая точка находится на большой высоте и в случаях, когда по каким-либо причинам невозможно выполнить работы способом геометрического нивелирования (высокие здания, башни, наличие непреодолимых препятствий, в горных выработках большой высоты для установленных в кровле реперов и др.). Высокая точность при тригонометрическом нивелировании достигается при коротких лучах визирования (до 100 м) и при использовании высокоточных (Т1) и точных (Т2) теодолитов. Расстояния до точки от станции определяют стальными рулетками, обеспечивающими точность 1:20000 – 1:30000 (3 – 5 мм на 100 м). Для тригонометрического нивелирования оборудуется специальная станция, на которой предусмотрено принудительное центрирование теодолита. Указанное нивелирование может выполняться как по непосредственному наблюдению рабочего репера, так и с использованием подвесной или постановочной нивелирной рейки, по шкале которой берут отсчет вместе со значением отсчета по вертикальному кругу теодолита. Наибольшая точность обеспечивается при тригонометрическом нивелировании из середины, поскольку в этом способе практически исключается погрешность из-за влияния кривизны Земли и рефракции атмосферы.

*Гидронивелирование* (гидростатическое, гидродинамическое) практически обеспечивает такую же точность, которая достигается и при геометрическом нивелировании. Однако расстояния между наблюдаемыми точками сравнительно небольшие, что ограничивается длиной шланга между колбами гидронивелира. Преимуществом данного способа может считаться возможность оборудования стационарной станции наблюдений, что во многих случаях является весьма важным. Тем более, что сравнительно просто обеспечивается и автоматизация регистрации измерительной информации с дистанционным управлением процессом измерений. Отсчеты положения уровня жидкости получают не визуально, а по регистрации контакта жидкости с иглой измерительной системы. Точность измерений обеспечивается в пределах 0,1 – 0,2 мм.

В системах гидростатического нивелирования рабочая жидкость находится в поле свободной силы тяжести, т.е. устанавливается на одном уровне во всех колбах. В системе *гидродинамического нивелирования* жидкость перемещается в сосудах под действием поршневого устройства. Поршневое устройство нагнетает жидкость в систему. Жидкость, перемещаясь, достигает контактной иглы, закрепленной в колбе. Устанавливается зависимость между

перемещением поршня и моментом контакта жидкости с иглой. При изменениях положения колбы, что будет связано с вертикальным перемещением рабочего репера, контакт может наступить позже или раньше относительно исходного измерения. Такие системы позволяют использовать их и при больших перепадах высот между рабочими реперами, т.е. позволяют расширить диапазон измерений.

*Микронивелирование* используют на весьма малых базах – 1,0 – 2,0 м. В основном такие измерения выполняют для определения наклонов отдельных конструкций инженерных сооружений, технологического оборудования и т.п. Микронивелиры выпускаются только по заказу предприятия серийно от одного до нескольких экземпляров. В конструкции микронивелира используют высокоточные цилиндрические или электронные уровни, а также приспособления с микрометрами и индикаторами часового типа.

Фото- и стереофотограмметрические способы заключаются в использовании для получения информации о деформировании объекта фотоснимков, получаемых с помощью специального фототеодолита в различных циклах наблюдений. Деформации могут определяться как в одной (вертикальной) плоскости (фотограмметрический способ), так и по трем координатам (стереофотографический способ). При деформациях объекта на снимках двух последовательных циклов фотографирования определяются взаимные смещения точек либо в вертикальной плоскости, либо в пространстве. Измерение смещений точек на снимках выполняют на специальных приборах – стереокомпараторах. Наивысшая точность измерения деформаций при тщательном выполнении измерений составляет 1,0 – 2,0 мм.

### **§ 133. Наблюдения за горизонтальными смещениями**

Организация наблюдений за горизонтальными смещениями объектов намного сложнее, чем при наблюдении за вертикальными перемещениями. Чаще всего используют линейно-угловой, створный и стереофотограмметрические способы, прямые и обратные отвесы.

Стереофотограмметрический способ подобен рассмотренному способу при наблюдении за вертикальными смещениями.

Линейно-угловые построения используются для определения смещений по двум координатам (рис. 14.1): микролокальные сети триангуляции и трилатерации, комбинированные сети, сети полигонометрии, угловые и линейные засечки и др. Использование тех или иных сетей и способов определяется условиями измерений, характеристикой объекта и его сложностью, а также заданной точностью измерений. На рис. 14.1а показана схема линейно-угловых построений для регистрации оползневых процессов на карьере с некоторых базисов. При этом следует иметь в виду, что базисы сами могут смещаться, в связи с чем они должны входить в систему построений, опирающуюся на неподвижные исходные пункты. На рис. 14.1б показана схема микротриангуляции, в которой измеряют дополнительно расстояния, либо схема микротрилатерации, в которой дополнительно измеряют



углы. При небольших расстояниях между наблюдаемыми объектами обычно используют метод микротриангуляции.

В сетях *микротриангуляции* и *полигонометрических ходах* горизонтальные углы измеряют с точностью  $0,5'' - 2,0''$ , расстояния – с относительной погрешностью менее 1:20000. Полигонометрические ходы должны опираться на неподвижные точки с известными координатами. Если имеется возможность выполнения азимутальной привязки, то ее выполняют. Азимутальная привязка обеспечивает надежный контроль измерений, а также позволяет повысить точность исходных построений.

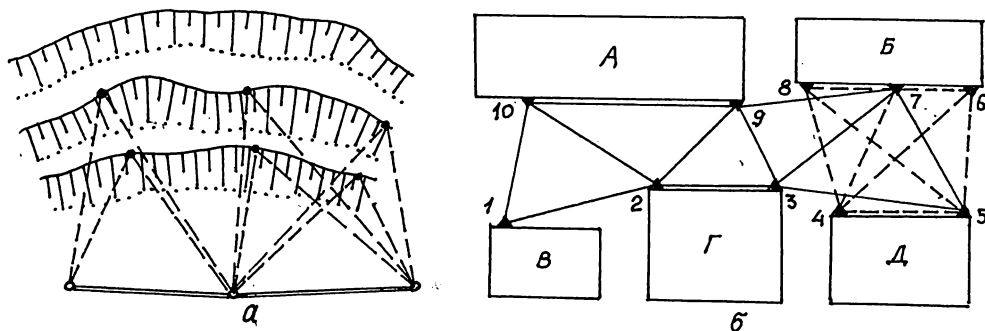


Рис. 14.1. Линейно-угловые построения

*Створные* наблюдения используют при определении горизонтальных смещений точек профильной линии склона, или горизонтальных смещений объектов, имеющих прямолинейную форму. Смещения в этом случае определяют только по одному направлению, перпендикулярному линии створа.

Разность значений текущего и исходного положения точки сооружения называют *нестворностью*. Нестворность может быть определена как по отношению к начальному (исходному) циклу наблюдений, так и при сравнении положения точки в двух любых циклах.

Створную линию задают либо *стальной струной*, концы которой закрепляют на неподвижных опорных реперах, либо *оптическим способом*, используя в качестве линии створа визирную ось зрительной трубы теодолита, нивелира и др. При оптическом задании створа прибор центрируют над неподвижным опорным репером, а на другом конце линии, также над опорным репером, центрируют визирную марку (цель).

Чаще всего при измерениях используют способы подвижной марки и малых углов.

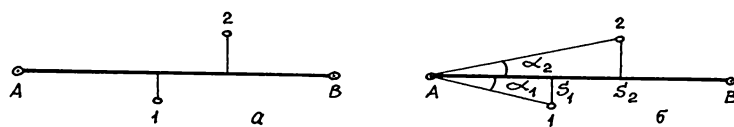


Рис. 14.2. Створные способы  
а) способ подвижной марки; б) способ малых углов

*Способ подвижной марки* сравнительно легко реализуется струнным или оптическим методом. В исходной точке  $A$  (рис. 14.2  $a$ ) центрируют прибор (теодолит, нивелир и др.), имеющий зрительную трубу большого увеличения (более  $30^{\times}$ ), и визируют им на точку  $B$  другого конца створа. В исследуемой точках  $1$  и  $2$  устанавливают подвижную марку с горизонтальным отсчетным устройством (шкалой). В разных циклах наблюдений исследуемая точка будет смещаться относительно неподвижной линии створа, в результате чего по шкале марки будут наблюдаться отсчеты, разность которых в сопоставляемых циклах наблюдений определит величину нестворности.

Малые углы  $\alpha$  (рис. 14.2  $b$ ) характеризуют положение исследуемой точки относительно линии створа. Зная величину угла и расстояние от прибора до наблюдаемой точки, можно вычислить значение  $f$ , определяющее отклонение точки от створа:

$$f = Sg \alpha \quad (14.1)$$

или для малых углов –

$$f = S\alpha_{\text{рад}} \quad (14.2)$$

где  $\alpha_{\text{рад}}$  – значение малого угла в радианах.

В этом случае горизонтальное перемещение  $\Delta_f$  точки в разных циклах  $1$  и  $2$  определится по формуле

$$\Delta_f = S\Delta\alpha = S(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (14.3)$$

В зависимости от длины створной линии, условий измерений и др. наблюдения за горизонтальными смещениями выполняют по различным схемам: общего, частного и последовательного створов (рис. 14.3).

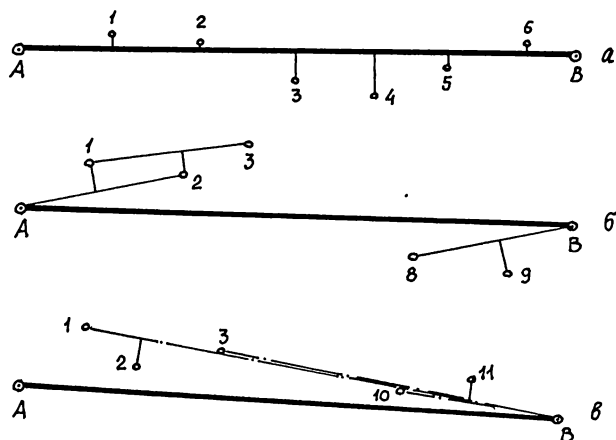


Рис. 14.3. Схемы определения нестворности точек

$a$ ) общий створ;  $b$ ) частные створы;  $в$ ) последовательные створы

В схеме *общего створа* нестворности всех точек определяют относительно одной исходной линии  $AB$ . В схемах *частных створов* может использоваться следующая программа измерений: нестворность точки  $1$  определяется относительно створа  $A-2$ , точки  $2$  – относительно створа  $1-3$ , точки  $3$  – относительно створа  $2-4$ , точки  $n$  – относительно створа  $(n-1) - B$ . В схеме

последовательных створов нестворность точек 1 и 3, например, определяется относительно створа  $AB$ , а точки 2 – уже от створа  $1-B$ , далее, точки 10 – от створа  $A-B$ , а точки 11 – относительно створа  $10-B$ .

### § 134. Наблюдения за кренами

Крен относят к деформациям сооружений башенного типа, у которых линейный размер основания значительно меньше высоты сооружения.

Практически крен здания можно определить по значениям неравномерных вертикальных перемещений его точек, выбранных по углам. Число точек должно быть не меньше трех. Предположим (рис. 14.4), что в двух соседних циклах наблюдений произошли неравномерные вертикальные перемещения точек 1, 2, 3 и 4 (знак «минус» указывает направление перемещения вниз). Т.е. общая осадка отрицательная, при этом перемещения точек 1 и 2 больше, чем точек 3 и 4 примерно на 1,5 - 2,0 мм. Построим в изолиниях перемещения точек с сечением через 0,5 мм. Структура изолиний показывает, что крен здания происходит практически в направлении поперечной оси. Если получить максимальную разность осадок ( - 1,9 мм), то

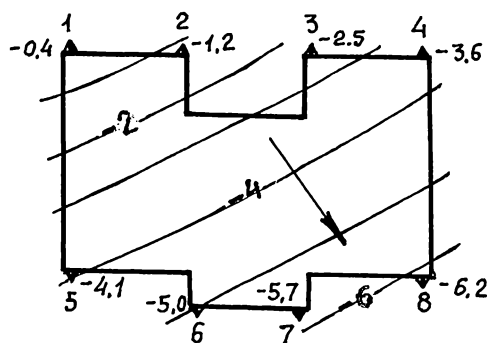


Рис. 14.4. Определение крена фундамента

можно вычислить и угол наклона  $v$  сооружения в межцикловый период

$$\operatorname{tg} v = \frac{\Delta_{\text{МАКС}}}{a} \quad (14.4)$$

где  $\Delta_{\text{МАКС}}$  – максимальная разность осадок;  $a$  – размер сооружения в направлении максимального крена.

Можно вычислить также и линейное отклонение  $t$  верха здания от вертикали, зная высоту  $H$  сооружения, по формуле

$$t = H \operatorname{tg} v \quad (14.5)$$

Для малых значений углов в формулах (14.4) и (14.5) тангенс угла можно заменить на угол, выраженный в радианной мере.

Для других сооружений, не относящихся к башенным, подобные расчеты могут быть применены при определении завалов и перекосов.

Большое применение для определения крена сооружений находят способы *вертикального проектирования* (рис. 14.5). В простейшем случае могут использоваться *нитяные отвесы* с регистрацией их перемещений (острия отвеса) по линейной шкале или квадратной палетке. В последнем случае значение крена может быть определено по отношению к выбранным осям сооружения.

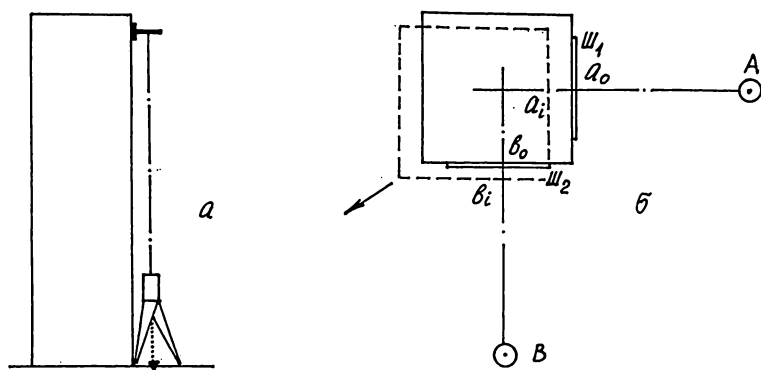


Рис. 14.5. Определение крена башенных сооружений  
а) способ вертикального проектирования; б) с помощью теодолита

Вертикальная нить отвеса может быть воспроизведена *оптическим способом* с помощью специального *прибора вертикального проектирования* (рис. 14.5.а), визирная ось которого устанавливается принудительно или автоматически в вертикальное положение. Прибор центрируют непосредственно у основания сооружения, либо внутри него, если позволяют условия наблюдений, и отклонение верха сооружения от вертикали в двух направлениях регистрируют по квадратной палетке с миллиметровыми или двухмиллиметровыми делениями, наблюдаемой в зрительную трубу прибора. Палетка размещается в верхней части сооружения.

Вертикальное проектирование может быть осуществлено по схеме, изображенной на рис. 14.5 б. На местности в точках *A* и *B* оборудуют станции, на которых центрируют теодолит. Визирные оси теодолита практически перпендикулярны друг другу и направлены вдоль осей сооружения. Расстояния от теодолита до сооружения выбирают с учетом высоты башни – примерно 1,5 – 2,0 высоты. На стене сооружения на его основании закрепляют шкалы  $\text{Ш}_1$  и  $\text{Ш}_2$  с миллиметровыми делениями, а в верхней части отмечают или устанавливают точки, на которые выполняют визирование. В процессе измерений получают отсчеты  $a_0$  и  $b_0$  в начальном и  $a_i$  и  $b_i$  в текущем циклах. Разности отсчетов  $\Delta a$  и  $\Delta b$  и их знаки указывают величину отклонения верха сооружения и направление этого отклонения.

Часто сооружение бывает недоступно для непосредственной работы у его основания. В таких случаях используют *способ горизонтальных углов*, который заключается в разбивке двух опорных пунктов на взаимно перпендикулярных осях сооружения и измерении горизонтального угла между направлениями на опорные пункты и направлениями на точки 1 и 2, находящиеся в верхней части сооружения (рис. 14.6). При известных расстояниях  $S$  разности горизонтальных углов для каждой из точек характеризуют перемещение исследуемых точек в направлениях, перпендикулярных соответствующей визирной оси. По формулам малых углов можно определить линейные

величины смещений, полное смещение и его направление, а также определить величину крена сооружения.

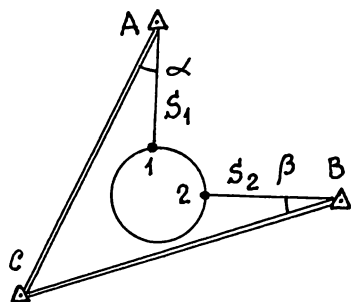


Рис. 14.6. Способ горизонтальных углов

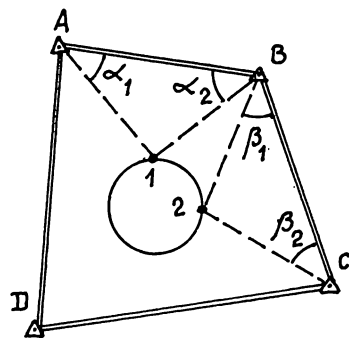


Рис. 14.7. Способ координат

Аналогичную схему сравнительно легко применить и в *способе координат* (рис. 14.7). Вокруг сооружения прокладывают замкнутый полигонометрический ход  $A-B-C-D$  и с его пунктов угловой засечкой получают координаты исследуемых точек 1 и 2. Разности значений координат в сопоставляемых циклах наблюдений укажут направление крена и его величину.

На небольших базах крен измеряют с помощью *клинометров* с цилиндрическим уровнем, имеющем точность не более  $5''$ , либо с помощью *микронивелиров*.

### § 135. Наблюдения за деформациями земной поверхности

Здесь имеются в виду наблюдения за *оползнями* и деформациями в *мульдах сдвижения*.

Оползневые явления и деформации земной поверхности в мульдах сдвижения происходят как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях. В связи с этим наблюдательные станции чаще должны обеспечивать возможность определения плановых координат точек и их высот, т.е. обеспечивать *пространственные* (трехмерные) измерения.

В некоторых случаях задача определения трех координат не ставится, а проектируются только, например, *осевые* (одномерные), *плановые* (двумерные) и *высотные* смещения.

Для определения смещений точек земной поверхности используют различные методы, краткие пояснения по которым приведены ниже.

*Осевые* методы используют в тех случаях, когда направление движения грунтов известно. Они могут быть реализованы тремя способами: *расстояний* (рис. 14.8 а), *створов* (рис. 14.8 б), *горизонтальных углов* (рис. 14.8 в).

В первом способе измеряют расстояния  $S$  между точками на линии створа последовательно, начиная от неподвижной точки  $A$  и заканчивая на неподвижной точке  $B$  створа.

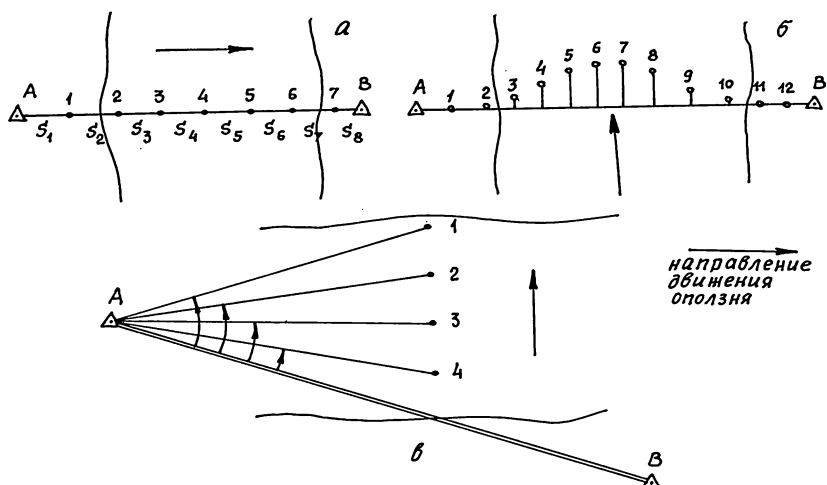


Рис. 14.8. Осевые методы наблюдений за оползнями  
а) способ расстояний; б) способ створов; в) способ горизонтальных углов

В *способе створов* линию створа располагают перпендикулярно к направлению движения грунтов. Измерения здесь выполняют различными известными методами, рассмотренными выше.

*Способ горизонтальных углов* используется в тех случаях, когда существует опасность нахождения человека непосредственно в зоне сдвижения грунтов и горных пород. Горизонтальные углы на исследуемые рабочие реперы измеряют относительно исходного направления. При известных линейных расстояниях от станции до точки определяют перемещения последних вдоль оси оползня.

Пространственные смещения определяют чаще в мульдах сдвижения с использованием плановых и высотных способов. Для измерения вертикальных перемещений применяют способы геометрического и тригонометрического нивелирования, для определения плановых смещений – методы *триангуляции*, *трилатерации*, *полигонометрии*, *засечек* и т.п., рассмотренные выше в этом и других разделах учебника. Для определения пространственного смещения точек земной поверхности используют *стереофотограмметрический способ*.

### § 136. Разработка методики наблюдений

Под методикой инженерно-геодезических измерений понимается полная и последовательная совокупность действий, соблюдение которых при измерениях и обработке данных позволяет обеспечить необходимую (заданную) точность измерений.

В связи с этим в понятие «методика» входят требования ко всем элементам, участвующим в измерениях: к опытности наблюдателя; типу используемых приборов; к конструкциям геодезических знаков (исходных и рабо-

чих); к условиям производства работ; к способам обработки результатов измерений и мн.др.

Все указанные требования определяются, в первую очередь, качественной характеристикой схемы измерений. Качественным показателем для каждого элемента схемы измерений является единица веса, либо вес  $p$  данного элемента (обратный вес  $q=1/p$  данного элемента). Элементом схемы измерений может явиться отдельная ее точка, секция (ход между двумя точками), полигон и т.п.

Указанные в техническом задании требования к точности измерений относятся ко всем точкам системы, независимо от их расположения на объекте, а также независимо от используемой схемы измерений. В связи с этим, для выбора класса измерений необходимо определить качественную характеристику для слабой точки  $E$  схемы измерений. При этом очевидно, что для остальных точек схемы обеспечение необходимой точности измерений будет реализовано.

Рассмотрим пример определения качественных характеристик схемы измерений на основе измерения вертикальных перемещений двух зданий (рис. 14.9 а).

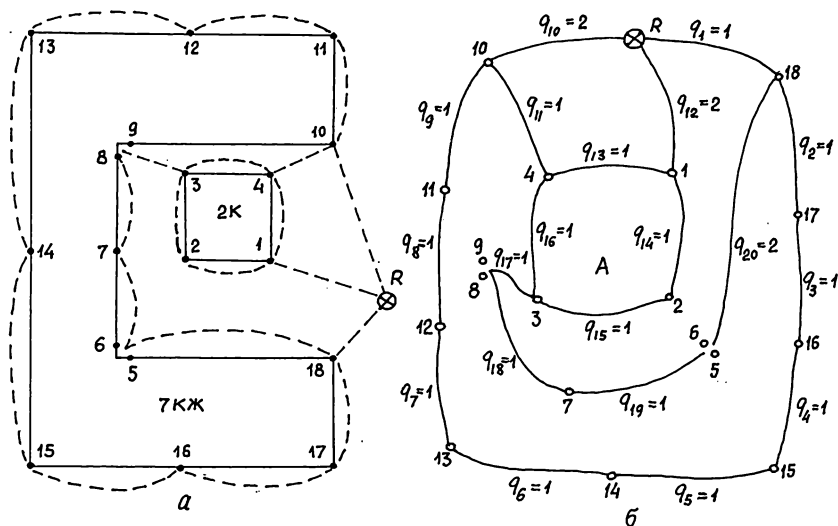


Рис. 14.9. Схема измерения вертикальных перемещений  
а) размещение рабочих реперов на сооружениях; б) схема нивелирных ходов

На здании 7КЖ запроектировано наблюдение 14 точек, причем, точки 5, 6 и 8, 9 – двойные, находятся в местах стыка конструкций здания. На здании 2К размещено 4 точки. Привязка выполнена к исходному реперу  $R$ . На рис. 14.9 б показана запроектированная схема нивелирных ходов, проложенных с учетом условий измерений. На схеме нивелирных ходов указаны качественные характеристики превышений в секциях (обратные веса превышений), определяемые числом штативов (станций), необходимых для измерения данного превышения. Так,  $q=1$  – одна станция,  $q=2$  – две станции. Т.е. еди-

ницей веса здесь, например, является превышение, измеренное в ходе одного направления при одном горизонте прибора по двум шкалам нивелирной рейки на одной станции.

Для определения наиболее слабой точки в приведенной схеме измерений (точки, имеющей наибольшее значение  $q$ ), необходимо выполнить преобразования (эквивалентную замену) до установления непосредственной связи исходного репера со слабоопределяемой точкой. Схемы возможных преобразований представлены на рис. 14.10.

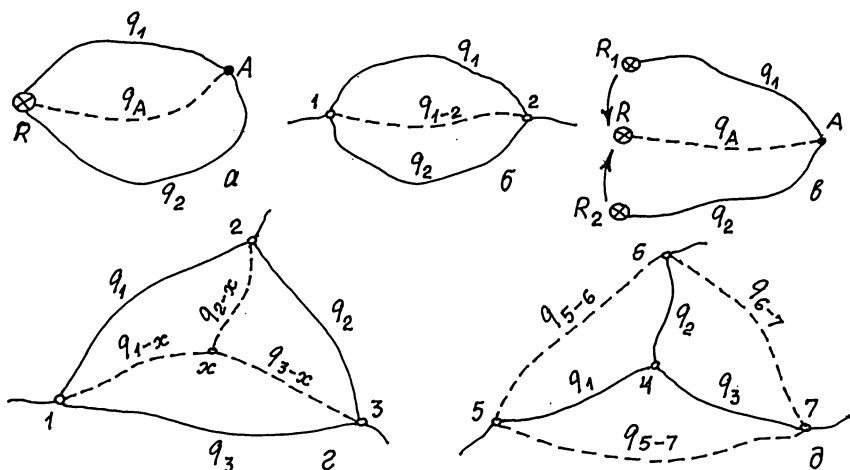


Рис. 14.10. Преобразования схем способом эквивалентной замены а) в полигоне; б) между узловыми точками; в) для точки, находящейся в секции между исходными пунктами; г) преобразование «треугольник-звезда»; д) преобразование «звезда-треугольник»

Для любой точки  $A$  полигона (рис. 14.10 а), включающего исходный репер, либо опирающегося на узловую точку, значение качественной характеристики  $q_A$  определяется по формуле

$$q_A = \frac{q_1 \times q_2}{q_1 + q_2} . \quad (14.6)$$

В частности, если  $q_1 = q_2 = q$ , т.е. точка  $A$  находится по весовым характеристикам посередине полигона (является наиболее слабой точкой  $E$ ), то

$$q_{A(E)} = \frac{q}{4} = \frac{\Pi}{4} , \quad (14.7)$$

где  $\Pi$  – периметр полигона ( $\Pi = \sum q_i$ ).

Если замкнутый полигон имеет две узловые точки (рис. 14.10 б), то значение качественной характеристики  $q_{1-2}$  определяется также по формуле (14.6). По той же формуле (14.6) определяется и качественная характеристика эквивалентной секции  $R-A$  (рис. 14.10 в). В этом случае полагают ничтожное влияние погрешностей исходных данных того и другого реперов и объединяют их в один, т.е. образуют схему рис. 14.10 а.



При преобразованиях «треугольник-звезда» (рис. 14.10 з) образуется условная точка  $X$  (узловая точка), относительно которой получают качественные характеристики для соответствующих условных секций:

$$q_{1-X} = \frac{q_1 \times q_3}{\Pi_1}; \quad q_{2-X} = \frac{q_1 \times q_2}{\Pi_1}; \quad q_{3-X} = \frac{q_2 \times q_3}{\Pi_1}, \quad (14.8)$$

где  $\Pi_1 = q_1 + q_2 + q_3$  – периметр треугольника.

При преобразованиях «звезда-треугольник» (рис. 14.10 д) условными секциями являются стороны образовавшегося треугольника с их качественными характеристиками:

$$q_{5-6} = \frac{\Pi_2}{q_3}; \quad q_{6-7} = \frac{\Pi_2}{q_1}; \quad q_{5-7} = \frac{\Pi_2}{q_2}, \quad (14.9)$$

где  $\Pi_2 = q_1 \cdot q_2 + q_3 \cdot q_1 + q_2 \cdot q_3$ .

Обратите внимание на то, что при преобразованиях «звезда-треугольник» исключается узловая точка 4.

Решим теперь задачу поиска наиболее слабой точки  $E$  системы нивелирных ходов (рис. 14.9) и ее качественной характеристики  $q_E$ . Здесь логично предположить, что указанная точка  $E$  находится в секции 10-18. При затруднениях в поисках слабой точки задача решается подбором для нескольких точек по нескольким вероятным направлениям до получения максимального значения  $q_E$ .

Предварительно выделим замкнутый контур  $A$  (рис. 14.11) и выполним в нем преобразование «треугольник-звезда». При этом секция 3-1 будет иметь качественную характеристику  $q_{3-1} = q_{14} + q_{15} = 1 + 1 = 2$ .

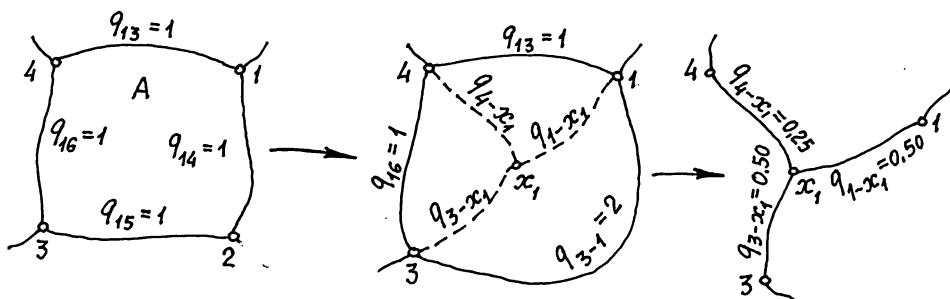


Рис. 14.11. Преобразование фрагмента А

Используя формулы (14.8), найдем качественные характеристики получившихся секций звезды:

$$q_{1-X_1} = \frac{q_{13} \times q_{3-1}}{q_{13} + q_{3-1} + q_{16}} = \frac{1 \times 2}{4} = 0,50;$$

$$q_{3-X_1} = \frac{q_{16} \times q_{3-1}}{q_{13} + q_{3-1} + q_{16}} = \frac{1 \times 2}{4} = 0,50;$$

$$q_{4-X_1} = \frac{q_{13} \times q_{16}}{q_{13} + q_{3-1} + q_{16}} = \frac{1 \times 1}{4} = 0,25.$$

С учетом полученных значений  $q$ , а также схемы нивелирных ходов, составим новую схему (рис. 14.12 а – сплошные линии), в которой образуем секции между узловыми точками:

$$q_{10-18} = q_9 + q_8 + q_7 + q_6 + q_5 + q_4 + q_3 + q_2 = 8;$$

$$q_{R-X_1} = q_{12} + q_{1-X_1} = 2,5;$$

$$q_{10-X_1} = q_{11} + q_{4-X_1} = 1,25;$$

$$q_{18-X_1} = q_{20} + q_{19} + q_{18} + q_{17} + q_{3-X_1} = 5,50.$$

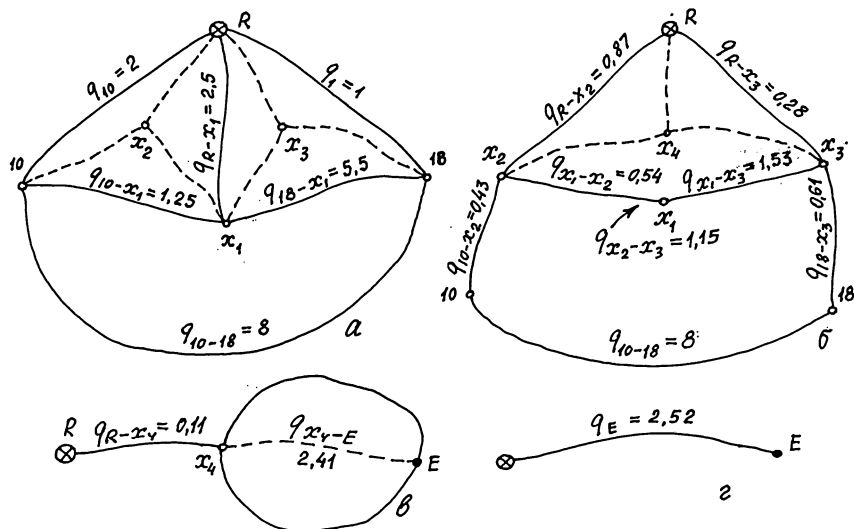


Рис. 14.12. Преобразование схемы нивелирных ходов

Далее выполним преобразования «треугольник-звезда» в двух треугольниках ( $R10X_1$  и  $R18X_1$ ). В результате получим схему рис. 14.12б. В этой схеме из треугольника  $RX_2X_3$  образуем звезду с узловой точкой  $X_4$ . В результате получим схему рис. 14.12в, которая состоит из секции  $RX_4$  и замкнутого полигона, включающего слабую точку  $E$  в ходе  $X_4-X_2-10-11-12-13-14-15-16-17-18-X_3-X_4$ . Периметр этого полигона составит:

$$P = q_{X_2-X_4} + q_{10-X_2} + q_9 + q_8 + q_7 + q_6 + q_5 + q_4 + q_3 + q_2 + q_{18-X_3} + q_{X_3-X_4} = 9,62.$$

С учетом формулы (14.7)  $q_{X_4-E} = \frac{9,62}{4} = 2,41$ , а качественная характеристика слабой точки  $E$ , с учетом  $q_{R-X_4} = 0,11$ , составит 2,52 (рис. 14.12з).

Требования к точности измерения превышений между отдельными точками в секциях по принятому ходу определяются выражением:

$$m_h = \frac{M_{\Delta}}{\sqrt{2q_E}}, \quad (14.10)$$

где  $m_h$  – требуемая средняя квадратическая погрешность измерения превышений;  $M_{\Delta}$  – требуемая точность измерения деформации отдельной точки;  $q_E$  – качественная характеристика слабой точки схемы.

Так, для рассматриваемого примера, полагая значение  $M_{\Delta} = 1$  мм, получим  $m_h = 0,45$  мм.

На основании полученного значения  $m_h$  производят выбор необходимых технических средств, проектируют (уточняют) схемы измерений, устанавливают методику измерения превышений на станции и т.д.

### § 137. Обработка и анализ результатов наблюдений

Величина любой деформации  $\Delta$  в двух сопоставляемых циклах наблюдений характеризуется разностью координат положения точки во времени между циклами 1 и 2:

$$\Delta = F_2 - F_1, \quad (14.11)$$

где  $F$  – координата точки (плановая, высотная, угловое положение, отсчет по шкале подвижной марки, ширина трещины и др.).

Погрешность  $m_{\Delta}$  результата измерений определяется погрешностями получения координат  $F (m_{F1}; m_{F2})$  по формуле

$$m_{\Delta} = \sqrt{m_{F1}^2 + m_{F2}^2} \quad (14.12)$$

При равнооточных измерениях в циклах, что всегда стремятся обеспечить при практической реализации схем измерений,  $m_{F1} = m_{F2} = m_F$ ,

$$m_{\Delta} = \sqrt{2} m_F \quad (14.13)$$

При неравнооточных измерениях (т.е. при вынужденном изменении схемы измерений, вызванном отличающимися условиями измерений) необходимо учитывать весовые характеристики в каждом из сопоставляемых циклов.

В качестве единицы веса при наблюдениях за вертикальными перемещениями часто принимают превышение, полученное в ходе одного направления при одном горизонте прибора по двум шкалам реек при установленной в схеме измерений длине плеча  $D$  (расстояния от нивелира до реек). При определении горизонтальных смещений (в случае измерения расстояний между рабочими реперами) единицей веса может быть пролет, измеренный в ходе двух направлений при одном уложении мерного прибора. При измерении горизонтальных углов единицей веса может явиться, например, угол, измеренный на станции одним полным приемом при установленных сторонах  $D$  угла.

Уравнивание геодезических построений при наблюдениях за деформациями, выполненных по методикам I и II класса, производят строгими способами, при наблюдениях III и IV класса – чаще всего нестрогими способами (гл.16).

Результаты вычисления деформаций представляют различными способами. В таблицах – когда последовательно по циклам указывают значения деформаций для каждой из точек. На графиках, которые строят в шкалах вре-

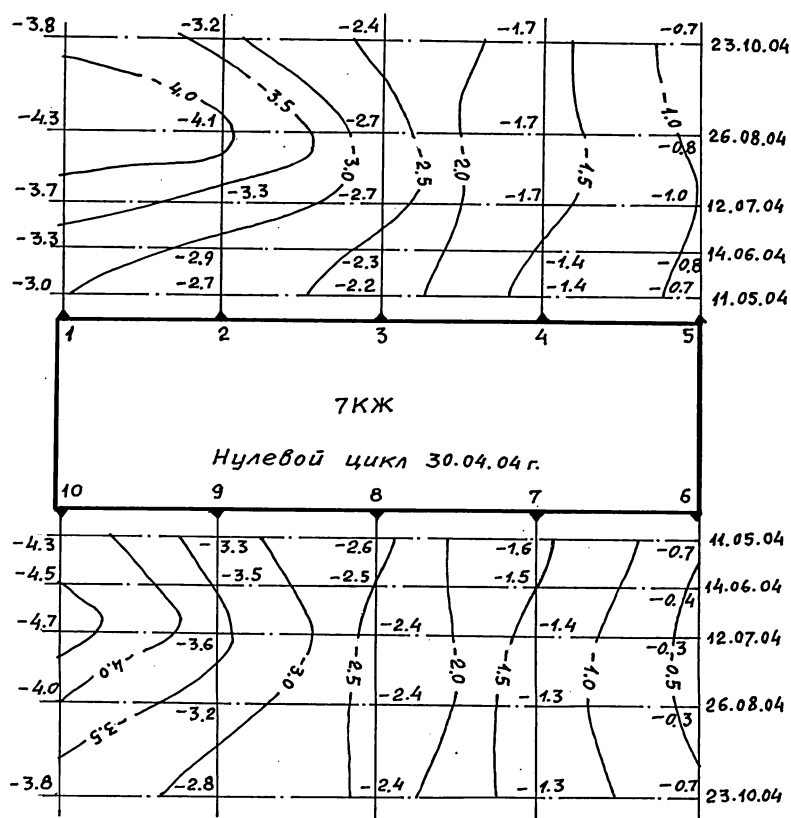


Рис. 14.13. Пространственно-временной график деформаций

мени (номеров циклов) и величин деформаций. Для некоторых объектов целесообразно для хорошей наглядности строить пространственно-временные графики деформаций (рис. 14.13). Указанные графики представляют собой чертеж, выполненный в принятом масштабе, на который наносят в шкале времени циклы наблюдений, а в пересечениях с ними – значения деформаций для каждой из точек. Затем интерполированием строят изолинии деформаций и выполняют анализ поведения объекта и его частей. Если на таких графиках изолинии деформаций будут параллельны горизонтальным линиям циклов, то это говорит о систематической равномерной деформации объекта. Если изолинии будут перпендикулярны линиям циклов, то это говорит о неравномерной деформации.

Другой вид графиков – пространственный (рис. 14.14). Он отражает фиксированную картину деформаций по отношению к предыдущему циклу,

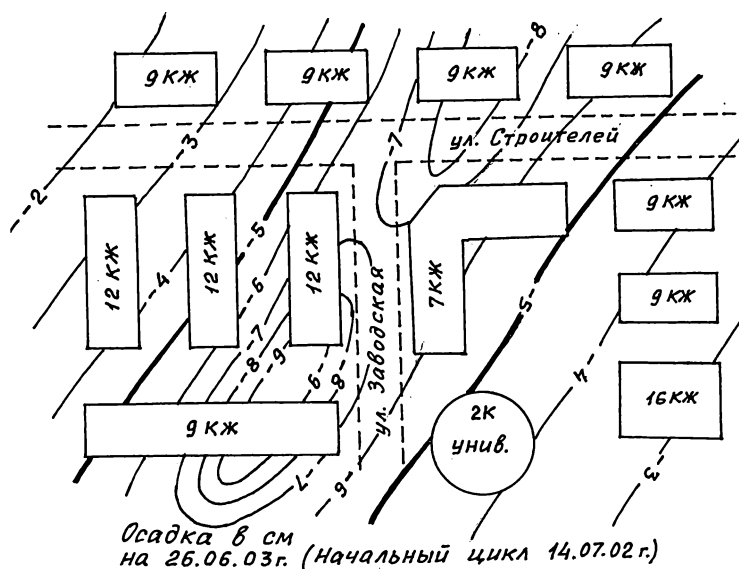


Рис. 14.14. Пространственный график деформаций

обычно – к начальному циклу, на сравнительно большой площади. Такой график также рисуется в изолиниях деформаций.

Способ интерпретации данных измерений, представленный на рис. 14.14, более применим при исследованиях значительных по площади объектов, но может быть использован для локальных областей объектов, либо для объектов в целом, если сеть наблюдаемых точек более-менее равномерно охватывает весь исследуемый объект. К недостаткам этого способа следует отнести необходимость представления динамики процесса деформирования на нескольких подобных графиках, максимально – по числу проведенных циклов измерений, за исключением первого (начального) цикла.

Способ интерпретации данных измерений, представленный на рис. 14.13, применим, вообще говоря, для объектов сравнительно простой формы и только для ограниченного числа наблюдаемых точек. Например, точек, расположенных по контуру объекта. В связи с этим способ графического отображения информации подбирается исключительно возможностями полной графической передачи информации о процессе деформирования. Во многих случаях приходится обходиться только простыми графиками деформаций по каждой из наблюдаемых точек.

## Глава 15

### ОСОБЕННОСТИ ТОЧНЫХ И ВЫСОКОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

#### § 138. Основные группы погрешностей измерений

Угловые измерения и геометрическое нивелирование являются наиболее массовыми видами геодезических работ при создании плановых и высотных Государственных геодезических сетей, а также при работах по созданию опорных сетей сгущения, которые выполняются разнообразными способами и методами от исходных пунктов высших классов. Кроме того, с появлением более совершенных и точных приборов для измерения расстояний значительный объем геодезических измерений выполняется светодальномерами в линейно-угловых построениях и при создании сетей сгущения методом трилатерации. В процессе выполнения геодезических работ измеряют горизонтальные углы, углы наклона, зенитные расстояния, производится определение геодезических и астрономических широт, долгот и азимутов как при привязке исходных направлений, так и при ориентировании других направлений. Большой объем работ связан с передачей абсолютных высот на большие расстояния и пункты опорных сетей и сетей сгущения, высокоточным и точным определением горизонтальных и вертикальных смещений земной поверхности и инженерных сооружений, в том числе и подземных горных выработок.

Практически все из перечисленных задач требуют высокой точности измерений, которая определяет качество их решения и надежную интерпретацию данных. Точность измерений в конечном счете определяется характеристиками используемых приборов, а также особенностями методик производства работ. Специалист должен знать особенности геодезических приборов, правильно пользоваться ими, иметь представление об источниках возможных погрешностей и принимать своевременные меры по учету и ослаблению влияния этих погрешностей на результаты измерений.

Погрешности измерений подразделяют на три основные группы: личные, приборные (инструментальные) и погрешности, связанные с влиянием внешней среды. Кроме того, во всех указанных группах погрешности могут иметь не только закономерную случайную, но и систематическую составляющие.

Как указывалось выше (гл. 3), в большинстве случаев систематические погрешности устраняются весьма трудно, поэтому их необходимо исследовать и стремиться свести к минимальным значениям, либо, используя соответствующие методики и программы работ, перевести в группу случайных погрешностей. Например, сведение систематических погрешностей измерения горизонтальных углов или направлений из-за влияния центрирования теодолита и визирных целей может быть выполнено многократными измерениями угла (направлений) полными приемами с пересцентрировкой прибора и визирных целей в каждом приеме.

Влияние случайных погрешностей ослабляется путем увеличения числа измерений одной и той же величины, конечно, с учетом минимизации затрат на производство работ при обеспечении их требуемого качества.

Личные погрешности возникают из-за несовершенства измерительной системы, в которую входит как само измерительное средство, так и сам наблюдатель. К этим погрешностям можно отнести погрешности визирования, погрешности совмещения делений лимба при различных освещенностях шкал, такие же погрешности отсчитывания по шкалам отсчетных микроскопов и др. В этой связи следует отметить, что совершенствование автоматизации процесса наведения, получения отсчетов направлений, по шкалам нивелирных реек и т.п. значительно могут снизить, а во многих случаях и исключить полностью влияние личных погрешностей. Существуют приборы, работу которых организует оператор (а не наблюдатель, как указывалось выше), который задает положение прибора на станции, а непосредственные измерения выполняются в автоматическом режиме: измерение углов, направлений, расстояний, превышений и т.п.

Приборные погрешности измерений определяются технологическими погрешностями сборки и установки отдельных деталей и узлов. К ним относятся погрешности хода фокусирующей линзы или фокусирующей системы зрительной трубы, коллимационная погрешность, люфты подъемных и наводящих устройств и отсчетных микроскопов, неравномерность нанесения штрихов лимбов и шкал, в том числе и шкал нивелирных реек, погрешности недокомпенсации визирной оси в приборах с компенсаторами, погрешности в изготовлении ампул цилиндрических установочных уровней, люфты в осевых системах и мн.др.

Влияние внешней среды определяется возможными температурными воздействиями на узлы и детали приборов и штативов, горизонтальными и вертикальными перемещениями приборов, штативов, визирных целей, исходных (опорных) пунктов и промежуточных точек, вибрационными воздействиями на средства измерений, погрешностями смещения пузырька уровня в сторону Солнца, воздействиями ветровых нагрузок на приборы, цели и другие наблюдаемые объекты, воздействием боковой (горизонтальной) и вертикальной рефракции атмосферы, состоянием освещенности визирных целей и др.

Рассмотрим влияние основных погрешностей на результаты измерений горизонтальных углов, зенитных расстояний и превышений и, в первую очередь, воздействие атмосферной рефракции.

### **§ 139. Учет влияния рефракции атмосферы**

Показатель преломления атмосферы ( $n$ ) зависит от ее состояния: температуры, влажности, давления, скорости ветра, облачности, прозрачности и др. Эти показатели непрерывно изменяются во времени и пространстве, что приводит к флуктуациям показателя преломления атмосферы в каждой точке

на пути распространения светового луча или пучка световых лучей. Для оценки среднего показателя преломления атмосферы используется формула

$$n = 1 + 110,8 \times 10^{-6} \left( \frac{P}{T^2} - 0,14 \frac{e}{T} \right), \quad (15.1)$$

где  $T$  – абсолютная температура воздуха:  $T = (273,16^\circ + t^\circ C)$ ;  $P$  – давление в мм рт.ст. (1 мм рт.ст. = 133,3 Па);  $e$  – давление водяных паров, мм рт.ст.

Колебания изображения цели в основном являются следствием Турбулентности воздуха различной температуры. Эти колебания возрастают при приближении визирного луча к поверхности земли, а также при увеличении разности температур земли (почвы) и воздуха.

Под рефракцией света понимают искривление световых лучей в одной и той же среде, определяемое неодинаковой оптической плотностью среды, т.е. различным показателем преломления на различных участках атмосферного слоя.

Существует несколько видов рефракции: астрономическая, спутниковая и земная. При астрономической рефракции цель находится в бесконечности, при этом визирный луч проходит всю толщу атмосферы. При спутниковой рефракции цель находится в околоземном пространстве, при земной рефракции – на земной поверхности.

При астрономической рефракции искажаются (уменьшаются) зенитные расстояния светил. При расчетах величины угла рефракции учитывается вся толща атмосферы. Угол астрономической рефракции зависит от зенитного расстояния. Для зенитных расстояний, например, до  $50^\circ - 60^\circ$  угол астрономической рефракции изменяется от  $0''$  до  $1,5'$ , т.е. составляет весьма большую величину при точных и высокоточных измерениях зенитных расстояний.

Спутниковая рефракция определяется изменениями показателя преломления атмосферы для электромагнитного излучения соответствующей длины волны (длина волны несущей частоты примерно равна 20 см) и, кроме того, сравнительно быстрым перемещением спутника относительно приемников излучения. При этом разные части атмосферы (тропосфера, стратосфера, ионосфера, магнитосфера и др.) оказывают различное влияние на прохождение тех или иных волн, которое весьма сложным способом учитывается при определении координат точек местности.

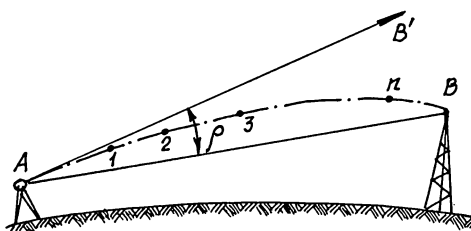


Рис. 15.1. Атмосферная рефракция

Атмосфера является оптически неоднородной средой. Луч из точки  $A$  в точку  $B$  (рис. 15.1) проходит не по прямой линии, а по сложной кривой  $A-1-2-...-n-B$ , в результате чего точка  $B$  наблюдается по касательной  $AB'$  к кривой рефракции. Мерой рефракции является угол  $\rho$ . Проекция  $r$  полного угла рефракции на вертикальную плоскость называется *углом вертикаль-*



ной рефракции или вертикальной рефракцией, а проекция  $\delta$  полного угла рефракции на горизонтальную плоскость называется *углом боковой* (горизонтальной) *рефракции* или *боковой рефракцией*. Величина вертикальной рефракции на 1-2 порядка больше, чем величина боковой рефракции. При расстояниях, например, между точками в 10-20 км вертикальная рефракция может составлять 2'-3', а боковая – примерно 10".

Рефракция света значительно осложняет высокоточные и точные измерения и в настоящее время, при существующих точных и высокоточных приборах, практически и определяет точность измерений. Вертикальная рефракция оказывает влияние при измерениях зенитных расстояний, при нивелировании с разностями плеч, а также и в разных неоднородных средах для двух направлений на рейки даже при абсолютно одинаковых плечах на станции. Боковая рефракция влияет на точность измерения направлений и горизонтальных углов.

Для оценки угла рефракции разработаны специальные приборы, рефрактометры. В основу принципа их работы заложена идея Нэбауера: измерение малого угла дисперсии между двумя лучами различных длин волн и использование этого значения для вычисления по установленным функциональным зависимостям угла рефракции. Однако испытания рефрактометров показали, что уже при расстояниях более 2 км они дают неприемлемо большие погрешности из-за значительных флуктуаций атмосферы. На долю рефракции при измерениях в сетях 1 и 2 класса (расстояния от 7 до 25 км) приходится 0,4"-0,5" при точностях измерений 0,6"-0,8". Т.е. угол рефракции следовало бы определять в нескольких точках по каждому из направлений, что, вообще говоря, практически осуществить не представляется возможным.

Разработан другой путь учета и ослабления действия атмосферной рефракции. Основные положения методики измерений состоят в следующем.

1. Выполнять измерения направлений, углов и превышений при хорошей и удовлетворительной видимости на спокойные, либо слегка колеблющиеся изображения визирных целей и реек.

2. В солнечные дни не использовать время, близкое к заходу и восходу Солнца.

3. Наблюдения выполнять в разные дни в утренние и вечерние часы.

4. Наблюдения строить по строго симметричной программе во времени относительно точек *изотермии* (см. далее) и выводить средние значения измеренных величин по вечерним и утренним наблюдениям.

Установлено т.н. «выгоднейшее время наблюдений», когда колебания изображений (целей) незначительны, либо вообще практически отсутствуют. Такое явление наступает утром и вечером, когда в слое воздуха на определенной высоте визирного луча над поверхностью земли создается состояние, наиболее близкое к изотермии.

Момент *изотермии* характеризуется практически одновременным переходом через ноль радиационного баланса и вертикальных градиентов температуры воздуха (рис. 15.2). Радиационный баланс определяется разностью между поглощенной поверхностью земли (почвой) и излученной ею радиа-

цией. На рисунке приведена примерная схема изменения для летнего периода радиационного баланса и градиентов температуры для широты 52°-55°.

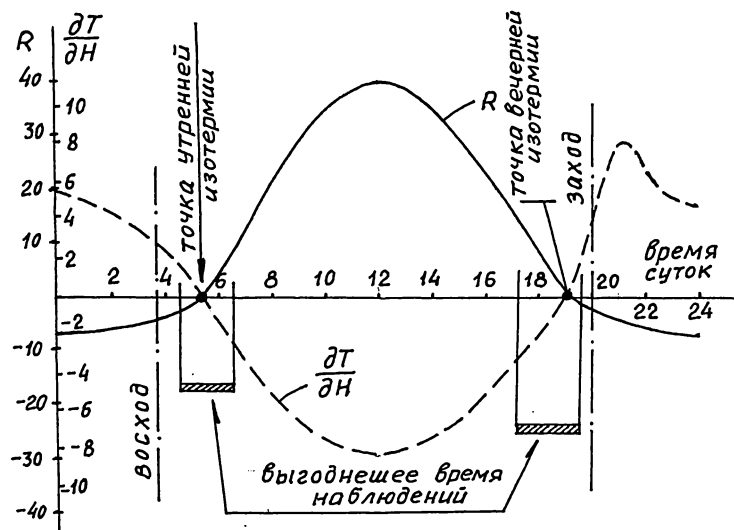


Рис. 15.2. Графики радиационного баланса и градиентов температуры

Отрезок времени, в котором наблюдается изотермия воздуха, сравнительно короткий. Например, летом, в ясную и жаркую погоду, он равен примерно 0,5 часа. В холодную и пасмурную погоду, а также в северных широтах и в горной местности, он может достигать даже нескольких часов.

Для ослабления действия рефракции утренние измерения углов следует начинать через час после восхода Солнца и продолжать их не более 1,5 часов. Вечерние измерения необходимо заканчивать за час до захода, а начинать их — за 2-2,5 часа до захода, т.е. продолжительность измерений составляет всего 1-1,5 часа. Геометрическое нивелирование рекомендуется начинать через 0,5 часа после восхода Солнца и продолжать примерно 2 часа до появления заметных колебаний изображения реек, а вечерние (летом) начинать примерно в 17 часов местного времени и заканчивать за 0,5 часа до захода. В пасмурную погоду период наблюдений «после восхода» и «до захода» может быть увеличен, но в любом случае наблюдения следует прекращать при ухудшении видимости и появлении заметных колебаний целей.

Когда на высоте визирного луча наступает изотермия воздуха, то боковая рефракция практически становится равной нулю.

Суточное вращение Земли и движение ее вокруг Солнца вызывает непрерывное изменение метеорологических параметров. В связи с этим рефракция также испытывает суточный и годовой ход, а следовательно суточный и годовой ход испытывают и зенитные расстояния, горизонтальные направления и углы, азимуты, длины сторон, измеренные свето- и радиодальномерами, превышения.

## § 140. Высоточное и точное геометрическое нивелирование

Высоточное и точное геометрическое нивелирование применяется при нивелировании в высотных сетях I, II, III и IV классов, при сгущении этих сетей, создании специального высотного обоснования, при решении большого круга инженерных научно-технических задач, связанных с изучением деформаций земной поверхности и инженерных сооружений, монтаже технологического оборудования и др.

Деление на высоточное и точное геометрическое нивелирование несколько условное и относительное. Так, нивелирование в сетях I и II классов относят к высоточному, а в сетях III и IV классов – к точному. При разработке специальных методик по наблюдениям за деформациями, например, вообще некорректно делать такое деление, поскольку в каждом конкретном случае устанавливается необходимая точность измерений, что, в частности, обуславливает использование лишь приборов, относящихся к тому или иному классу точности.

При рассмотрении способов геометрического нивелирования (гл. 9) поверхность Земли принимали за шар, т.е. уровенные поверхности принимали за концентрические сферы. В действительности, из-за того, что Земля представляет собой сложную фигуру с неравномерным распределением масс, уровенные поверхности в общем случае не параллельны друг другу. При этом даже для Земли-сфероида на полюсах уровенные поверхности сближаются, а на экваторе – растягиваются (рис. 15.3). Непарallelность уровенных поверхностей вызывает два основных следствия.

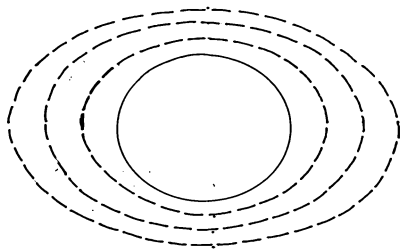


Рис. 15.3. Непараллельность уровенных поверхностей

Первое следствие определяет, что результат нивелирования зависит от пути нивелирования между пунктами. Предположим, что выполняется нивелирование между пунктами  $A$  и  $B$  (рис. 15.4). Пройдем путь от точки  $A$  до точки  $C$ , а затем – по уровенной поверхности до точки  $B$ . Второй путь нивелирования образуем от точки  $A$  по уровенной поверхности до точки  $B_o$ , а затем – от точки  $B_o$  до точки  $B$ .

Очевидно, что при движении по первому пути получим превышение точки  $B$ , равное  $AC$ , а по второму пути – превышение, равное  $B_oB$ , поскольку движение по уровенной поверхности не изменяет высоты точки. Из рисунка видно, что при непараллельных уровенных поверхностях  $AC \neq B_oB$ . Далее, при нивелировании по физической поверхности, что практически и делается, получится третий результат:

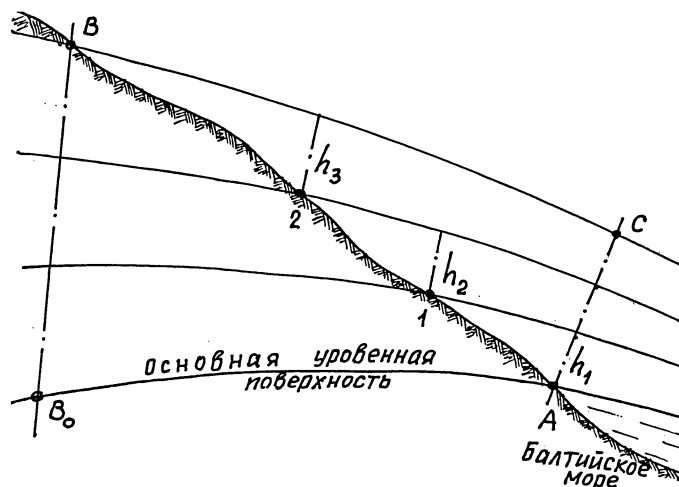


Рис. 15.4. Иллюстрация влияния непараллельности уровенных поверхностей на результат нивелирования

$$h_B = h_1 + h_2 + \dots + h_n = \sum h_i, \quad (15.2)$$

не равный первым двум. Следовательно, в результате нивелирования необходимо вводить поправку за непараллельность уровенных поверхностей.

Второе следствие устанавливает, что высоты точек, расположенных на одной уровенной поверхности, в общем случае не равны друг другу. Это связано с неравномерным распределением плотных масс внутри Земли, что приводит к искривлению линий силы тяжести, отвесных линий, кривизна которых становится двойкой, а уровенные поверхности становятся сложными по форме. Хотя изменение уровенных поверхностей и остается плавным, а сами они остаются выпуклыми. В связи с этим высоты уреза воды по границе водоема будут изменяться. Например, для озера Севан на расстоянии более 60 км между северной и южной его частями разность высот урезом воды составляет около 90 мм.

Учет уклонений линий силы тяжести довольно сложный, но он необходим для вычисления поправок в превышения  $h_i$  за непараллельность уровенных поверхностей, вызванную неравномерностью распределения масс в теле Земли. Указанные поправки примерно на порядок меньше, чем первые, однако во многих случаях обе они могут оказаться весьма большими. Например, для высоких гор (Эверест) первая поправка составляет 20 м, вторая – 2 м.

В настоящее время в России применяется т.н. *система нормальных высот* (предложена М.С.Молоденским). В этой системе высот точно учитывают обе поправки за непараллельность уровенных поверхностей. Геометрически нормальная высота – это расстояние по нормали от точки до отсчетной уровенной поверхности. Но высоты эти имеют особенности, указанные выше.

В *системе динамических высот* для точек одной и той же уровенной поверхности высоты одинаковые, даже если эти точки находятся на разных

широтах. Название *динамические высоты* говорит не о геометрическом смысле высот, а о физическом, о работе, которую следует совершить в гравитационном поле Земли при переходе от исходной уровенной поверхности к уровенной поверхности искомой точки.

Ранее применялась *система ортометрических высот*, в которой отсчет высот выполняли от поверхности геоида. Точно такие высоты вычислить невозможно, поскольку остается неизвестной плотность вещества Земли в каждой точке.

Частично источники погрешностей при геометрическом нивелировании рассмотрены в гл. 9. В полной мере они действуют и при высокоточном и точном нивелировании.

Наиболее существенной приборной погрешностью нивелиров является невыполнение главного условия. Установленное допустимое невыполнение главного условия для точных и высокоточных нивелиров может составлять 10". Однако даже при небольших изменениях температуры прибора отступление от главного условия может измениться. Например, при изменении температуры на 1°C угол между визирной осью зрительной трубы и осью контактного уровня может измениться на 0,5". При разностях плеч в 10 м погрешность в превышении может из-за этого увеличиться на величину, сопоставимую с точностью измерений.

Здесь и далее необходимо иметь в виду, что изменение главного условия может произойти в лучшую сторону, однако это остается неизвестным наблюдателю. Как показывает практика, ожидать в таких случаях всегда следует худшего.

В некоторых случаях требуется выполнять защиту прибора от температурных воздействий использованием специального термозащитного кожуха. Измерения необходимо организовывать по симметричной программе, перед началом работ, а также при переходах из помещения на улицу и с улицы в помещение прибор следует выдерживать в условиях измерений не менее 45 минут. В некоторых случаях поверку главного условия выполняют отдельно на улице и в помещении, если схема измерений предусматривает такие переходы.

Из-за прилипания жидкости ампулы контактного уровня наблюдается преждевременная остановка пузырька при горизонтировании прибора. То же самое может произойти и с компенсатором. Преждевременная остановка движения чувствительного элемента компенсатора называется погрешностью недокомпенсации. Для ослабления действия указанного фактора совмещение концов пузырька уровня следует всегда выполнять движением элевационного винта на ввинчивание. Кроме того, такой прием позволяет ослабить действие люфта в системе элевационного винта. В нивелирах с компенсаторами необходимо контролировать значения отсчетов при механическом слабом воздействии на корпус прибора. Если отсчет не изменяется, то недокомпенсация практически отсутствует.

Такой же прием работы только на ввинчивание позволяет частично устранить погрешность из-за люфта в механической части системы отсчетного микроскопа.

У нивелиров, у которых точка поворота зрительной трубы элевационным винтом несколько смещена относительно вертикальной оси вращения зрительной трубы, следует весьма тщательно приводить вертикальную ось в отвесное положение. В противном случае будет наблюдаться разворот визирной оси, что может привести к неизвестной погрешности в отсчете.

Погрешности делений инварных нивелирных реек определяют на специальных компараторах. Затем эти погрешности, как систематические, вводят со своими знаками в средний метр комплекта нивелирных реек. При работе особой точности указанные погрешности вводят в отсчет.

Полностью устраняются погрешности из-за неравенства высот нулей реек и несовпадения основных шкал с плоскостью пяток, если измерения в ходе нивелирования выполнять с четным числом станций и при перестановке реек на соседних станциях по схеме: станция  $i$  (задняя  $A$ ; передняя  $B$ ); станция  $(i+1)$  (задняя  $B$ ; передняя  $A$ ).

Несмотря на малый коэффициент линейного расширения инвара, при высокоточных измерениях для каждой из реек определяют значение этого коэффициента. При измерениях в солнечную погоду датчиками измеряют температуру инварной полосы и вводят систематические поправки в отсчеты или превышения, измеренные на станции.

## § 141. Нивелирование I класса

Нивелирование I класса выполняют в Государственных нивелирных сетях с наивысшей точностью, которая может быть обеспечена приборами и соответствующими методиками измерений. В настоящее время нивелирование I класса выполняют нивелирами Н05 (увеличение зрительной трубы не менее  $45\times$ , цена деления контактного уровня не более  $12''$ , цена деления отсчетного микрометра  $0,05$  мм) с штриховыми двушкальными инварными рейками, имеющими погрешность метровых интервалов не более  $0,15$  мм.

Нивелирование проводят по двум отдельным параллельным линиям (по двум парам костылей), по правой и левой сторонам хода (рис. 15.5).

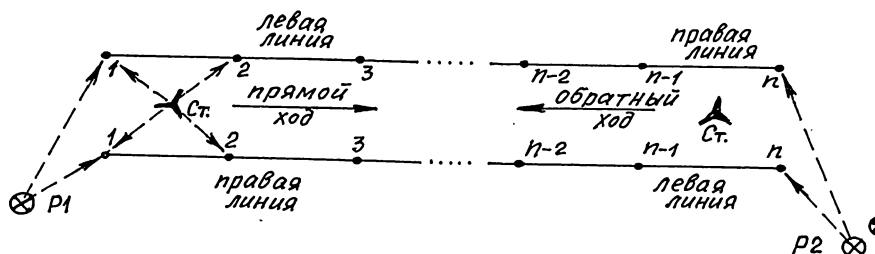


Рис. 15.5. Схема нивелирования I класса

Последовательность отсчетов на станциях определена следующей схемой:

- при прямом ходе на нечетных станциях наблюдение начинают с задней рейки правой линии нивелирования:

Правая линия	Левая линия
1. Основная шкала задней рейки	5. Основная шкала задней рейки
2. Основная шкала передней рейки	6. Основная шкала передней рейки
3. Дополнительная шкала передней рейки	7. Дополнительная шкала передней рейки
4. Дополнительная шкала задней рейки	8. Дополнительная шкала задней рейки

- при прямом ходе на четных станциях наблюдения начинают с передней рейки правой линии нивелирования:

Правая линия	Левая линия
1. Основная шкала передней рейки	5. Основная шкала передней рейки
2. Основная шкала задней рейки	6. Основная шкала задней рейки
3. Дополнительная шкала задней рейки	7. Дополнительная шкала задней рейки
4. Дополнительная шкала передней рейки	8. Дополнительная шкала передней рейки

- при обратном ходе на нечетных станциях наблюдения начинают с передней рейки правой линии, а на четных станциях – с задней рейки правой линии (при обратном ходе правая линия нивелирования становится левой и наоборот).

Прямой и обратный ходы прокладывают по одной и той же трассе и по переходным точкам того же типа. В одной секции следует устраивать четное число станций (одна секция имеет длину 25 – 30 км). При переходе от прямого хода к обратному рейки меняют местами.

Прямой и обратный ходы в каждой секции следует прокладывать в разные половины дня в установленное для наблюдений время (утром и вечером в периоды изотермии воздуха).

Расстояния от нивелира до реек измеряют рулетками. Разность плеч на станции не должна быть больше 0,5 м, а накопление разности плеч в одной секции не должно превышать 1 м.

Длина визирного луча на станции не должна превышать 50 м, а высота визирного луча над поверхностью земли быть не менее 0,8 м. При длинах визирного луча до 25 м допускается высоту визирного луча выдерживать до 0,5 м.

Штатив на станции устанавливают без перекосов и напряжений, ножки штатива следует располагать в одинаковых условиях. Костыли забивают в плотный грунт, в асфальт забивают специальные гвозди с полусферической головкой.

При измерениях и переходах со станции на станцию нивелир должен быть защищен от действия прямых солнечных лучей (зонтом или белой материей). Через каждые две станции необходимо измерять температуру воздуха вблизи нивелира.

Работа на станции выполняется в приводимой ниже последовательности.

1. Устанавливают нивелир в рабочее положение (сначала устанавливают штатив, затем на штатив ставят нивелир).

2. Устанавливают рейки на костыли правой линии (отсчет по рейкам можно брать спустя 0,5 минуты после постановки рейки на костыль).

3. Наводят на основную шкалу задней (передней) рейки, ставят отсчет 50 по барабану микрометра, элевационным винтом устанавливают грубо контактный уровень и берут отсчеты по дальномерным нитям.

4. Точно совмещают концы пузырька контактного уровня, вводят в биссектор штрих основной шкалы рейки и берут отсчет.

5. Наводят зрительную трубу на основную шкалу передней (задней) рейки и выполняют действия по пп. 3 и 4.

6. Выполняют наведение на дополнительную шкалу передней (задней) рейки, смещают уровень на 1/4 оборота элевационного винта, снова устанавливают контактный уровень и берут отсчет по дополнительной шкале.

7. Выполняют действия по п. 6 по дополнительной шкале задней (передней) рейки.

8. Переставляют рейки на костыли левой линии и выполняют все действия по пп. 3-7.

Расхождения между превышениями в секции правой и левой нивелировок, а также между превышениями прямого и обратного ходов, полученные как средние значения правых и левых нивелировок, не должны превышать  $3\text{ мм} \sqrt{L(\text{км})}$  (длина секции определяется по фактическим длинам лучей). Такой допуск применяется в тех случаях, когда число станций в секции на 1 км хода меньше 15. Если это число больше 15, то допустимое расхождение в превышениях определяют по формуле  $4\text{ мм} \sqrt{L(\text{км})}$ .

При передаче высот через водные препятствия шириной до 200 м используют строго симметричную схему, приведенную на рис. 11.10. Если водное препятствие имеет ширину более 200 м, то составляют специальные технические условия производства работ, следование которым позволит обеспечить необходимую точность передачи высоты.

## § 142. Нивелирование II класса

Нивелирование II класса выполняется теми же приборами, что используются при нивелировании I класса, но увеличение зрительной трубы нивелира может быть несколько меньше, порядка  $40^{\times}$ , а погрешности метровых интервалов шкал инварных реек могут быть допущены до 0,3 мм. Другие предосторожности и условия нивелирования те же, что и при нивелировании I класса. Отличия состоят в следующем.

Нивелирование II класса выполняют в одну линию по одной паре костылей в прямом и обратном направлениях по программе, соответствующей программе измерений для одной из линий нивелирования I класса.

Длина визирного луча принимается равной 65 м (при увеличении зрительной трубы  $40^{\times}$ ) и до 75 м (при увеличении  $45^{\times}$ ). Высота визирного луча



над поверхностью земли должна быть не меньше 0,5 м, а при длинах визирных линий до 30 м допускается не меньше 0,3 м.

Неравенство плеч на станции не должно быть более 1 м, а накопление неравенства плеч в секции (25-30 км) – не более 2 м.

Расхождения между превышениями прямого и обратного хода не должны превышать  $5 \text{ мм} \sqrt{L(\text{км})}$  в секциях, в которых число станций на 1 км хода менее 15, и не более  $6 \text{ мм} \sqrt{L(\text{км})}$ , если число станций в секции на 1 км хода более 15.

### § 143. Нивелирование III и IV классов

Нивелирование III и IV классов выполняется секциями между пунктами высших классов, при этом секции IV класса нивелирования могут опираться и на реперы III класса.

Основные качественные показатели и установленные требования для указанных классов нивелирования приведены в табл. 15.1.

Таблица 15.1

№ № п/п	Параметры и условия	III класс	IV класс
1.	Увеличение зрительной трубы нивелира	30 <sup>x</sup>	25 <sup>x</sup>
2.	Цена деления контактного уровня на 2 мм, сек	15-30	25
3.	Случайные погрешности нанесения дециметровых делений на шкалах реек не более, мм	0,5	1,0
4.	Производство нивелирования	в двух направлениях	в одном направлении
5.	Порядок отсчетов на станции (ОШ и ДШ – основная и дополнительная шкалы; ЗР и ПР – задняя и передняя рейки; ДН – отсчет по дальномерным нитям)	ОШЗР(ДН) ОШПР(ДН) ДШПР ДШЗР	ОШЗР(ДН) ОШПР(ДН) ДШПР ДШЗР (ДН – по одной нити)
6.	Длина визирного луча, м	75 (до 100)	100 (до 150)
7.	Высота визирного луча над поверхностью земли не менее, м	0,3	0,2
8.	Разность плеч на ставнции не более, м	2	5
9.	Накопление разности плеч в секции (25-30 км) не более, м	5	10
10.	Разность превышений на станции, полученных по двум сторонам реек не более, мм	3	5
11.	Расхождения в превышениях прямого и обратного хода (для IV класса – невязка) не более	$10 \text{ мм} \sqrt{L(\text{км})}$	$20 \text{ мм} \sqrt{L(\text{км})}$

При нивелировании используются шашечные двусторонние трехметровые рейки с делениями с двух сторон, шашечные трехметровые двусторонние рейки с делениями 1 см с одной стороны и 11/10 см с другой, штриховые

трехметровые односторонние с двумя шкалами или двусторонние с делениями 0,5 см, в горных районах применяют инварные рейки.

При нивелировании III класса при смене направления хода рейки меняют местами.

При нивелировании через водные препятствия при ширине препятствий от 100 до 300 м выполняют нивелирование по схеме, представленной на рис. 11.10. При этом измерения выполняют обязательно в прямом и обратном направлениях в разные половины дня. Расхождения в превышениях, полученных с двух берегов на каждые 100 м не должны быть более 10 мм. Расхождения в превышениях на станции в прямых и обратных ходах не должны превышать 8 мм.

При ширине водного препятствия более 300 м применяют двустороннее геодезическое нивелирование (тригонометрическое нивелирование).

Зимой нивелирование III и IV классов через широкие реки и озера выполняют по льду в прямом и обратном направлениях по заранее замороженным кольям.

Нивелирование IV класса через реки допускается проводить по уровню воды на двух берегах, считая поверхность воды одинаковой по высоте. Нивелирование выполняют два раза, в прямом и обратном направлениях. Расхождение между прямым и обратным ходом не должно превышать 20 мм.

#### **§ 144. Особенности точного и высокоточного нивелирования при наблюдениях за деформациями**

Особенности использования геометрического нивелирования при измерениях деформаций земной поверхности и инженерных сооружений связаны, прежде всего, с необходимостью установления необходимой точности измерений для каждого объекта исследований. В абсолютном большинстве случаев организация работ и требования к предосторожностям в выполнении измерений при наблюдениях за сдвигами земной поверхности на оползнях и в мульдах сдвига обеспечивают методикой и программой работ, соответствующим III и IV классам точности нивелирования. Сложнее обстоит дело при организации точных и высокоточных наблюдений за инженерными сооружениями. Здесь особенности измерений связаны со следующим. Во-первых, измерения выполняются короткими (от 3 до 20 м) визирными лучами (в среднем 8-10 м). Во-вторых, как правило, наблюдения проводятся в стесненных условиях, в переменной обстановке, когда вынужденно приходится изменять схемы измерений в циклах. В третьих, часто приходится работать на действующих объектах, при непрерывной работе производственного оборудования, что создает условия для вибрационных воздействий на измерительную систему, часто создает непериодические температурные воздействия на прибор и наблюдаемые цели.

При наблюдениях за деформациями элементарные источники погрешностей предлагается делить на пять основных классов [32]: инструментальные погрешности; погрешности из-за влияния среды; погрешности

из-за нестабильности измеряемого объекта; личные погрешности и погрешности способа обработки и оценки точности.

Первая группа инструментальных погрешностей относится непосредственно к конструкции нивелиров, вторая группа – к конструкции нивелирных реек. Основные из этих погрешностей были рассмотрены выше. К этой группе, в частности, можно отнести и большую часть личных погрешностей, обусловленных наведением на цель и получением отсчетов.

Погрешности, обусловленные влиянием внешней среды на результаты точного и высокоточного геометрического нивелирования изучены сравнительно мало; они могут достигать значительных величин. К ним относятся погрешности из-за оседания костылей (оседания достигают 0,03 – 0,08 мм при установке на них реек). Перемещения башмаков в 3-6 раз больше, чем перемещения костылей при грунтах любой плотности. Вертикальные перемещения связующих рабочих реперов из-за вибраций от проходящего мимо транспорта, либо от работы механизмов, могут достигать 0,1 мм. Из-за тепловых воздействий, вибраций, а также воздействия массы наблюдателя, вертикальные перемещения штатива могут оказаться более 0,02 мм. Чаще всего для ослабления воздействий от перемещения штатива устраивают специальные станции в виде железобетонных или цементных столбов с армированными гнездами для ножек штатива. Односторонний нагрев нивелира от работающих, например, механизмов, калориферов, приводит к неизвестным изменениям главного условия.

Погрешности, вызванные нестабильностью наблюдаемого объекта из-за его изменения в плане и по высоте, обусловлены экзогенными, эндогенными и техногенными процессами. К экзогенным процессам относится изменение влажности и температуры, притяжение Луны и Солнца. Эндогенные процессы определяются медленным опусканием или поднятием земной коры, либо сравнительно быстрыми ее перемещениями из-за сейсмических воздействий. Техногенные процессы связаны с деятельностью человека. В результате действия перечисленных выше факторов может измениться длина штанги репера (ослабление этого действия достигается использованием биметаллических штанг), измениться высота стены из-за температурных воздействий на нее и фундаменты (солнечного излучения и, например, утечек в системе водоснабжения), измениться исходные отметки реперов в промежутках между циклами и при возможных неравноточных измерениях в циклах при осреднении высот реперов и др.

Погрешности, обусловленные способом обработки и оценки точности измерений, связаны с тем, что при любых тщательных измерениях измеренные величины оказываются приближенными. К указанным погрешностям относятся: нестрогое вычисление среднего превышения при неравноточных измерениях; неполный учет влияния систематических погрешностей; ограниченность числа измерений, что приводит к увеличению погрешности приближения, а также к увеличению действия систематических погрешностей и др. Большое значение здесь имеет выбор того или иного способа уравнивания (гл. 16). В геодезической литературе рекомендуется несколько

основных подходов к выбору способов уравнивания: а) строгое уравнивание выполнять для точных измерений, а нестрогое – для измерений более низкой точности; б) не уравнивать измерения, полученные с точностью, значительно превышающей заданную; в) нестрогие способы применять только в том случае, если они равноценны строгим; г) уравнивать строгими способами все без исключения измерения; д) строгое уравнивание выполнять только для измерений первого (начального) цикла, а в последующих циклах применять только нестрогое уравнивание.

Выбор того или иного способа уравнивания в каждом случае должен определяться как требованиями к точности измерений, так и значениями фактически полученных невязок при проведении циклов и их допустимыми величинами. Если полученные невязки окажутся значимо меньше допустимых, то уравнивание можно проводить и нестрогими способами, либо, в каких-то случаях не уравнивать вообще. Приближенный способ уравнивания может быть использован и в тех случаях, когда поправки в измеренные значения не будут превосходить установленного основного допуска, определяемого часто, как «критерий ничтожной погрешности». Основной допуск может быть определен как  $1/3 - 1/5$  от заданной точности измерений.

## § 145. Высокоточные и точные угловые измерения

Как и при геометрическом нивелировании, при использовании для измерения деформаций и при измерениях в микролокальных сетях, при выполнении измерений в геодезических сетях высоких классов и др. погрешности делят на пять групп. Рассмотрим некоторые особенности групп погрешностей применительно к измерению горизонтальных углов и зенитных расстояний.

Систематические погрешности визирования чаще всего обусловлены особенностями восприятия глазом изображений целей, имеющих различную яркость. Эти погрешности могут достигать величин  $1,5''$  и более. При астрономических наблюдениях, например, момент регистрации прохождения звезды через меридиан раньше наступает для более ярких звезд, поэтому при измерениях углов между направлениями на две звезды необходимо выбирать звезды одинаковой яркости, либо для ярких звезд подбирать выравнивающий нейтральный светофильтр.

Систематические погрешности диаметров лимба теодолита могут быть длинно- и короткопериодическими и достигать величин  $0,7''$ . Для ослабления этих погрешностей горизонтальный круг следует переставлять на величину

$$k = \frac{180^0}{m} + n, \quad (15.3)$$

где  $m$  – число приемов;  $n$  – цена наименьшего деления лимба. Чем больше  $m$ , тем меньше будет погрешность измерения угла. Например, при исследованиях теодолитов число приемов делают в пределах 12 - 36.

Для высокоточных приборов их коллимационная погрешность  $c$ , являющаяся систематической погрешностью, не должна превышать  $10''$ .

Величину ее определяют по формуле (5.7), но с учетом зенитного расстояния  $z$  визирной цели:

$$c = 0,5(KП - КП \pm 180^\circ) \sin z \quad (15.4)$$

В равнинной местности значения зенитных расстояний близки к  $90^\circ$ , поэтому ими пренебрегают. При разных зенитных расстояниях возможны случаи, когда для одного из направлений зенитное расстояние учитывают, а для другого – пренебрегают.

Погрешность угла из-за изменения коллимационной погрешности зрительной трубы может быть ослаблена при симметричных схемах построений, когда не требуется изменять фокусировку изображения.

Для исключения систематической погрешности, обусловленной влиянием наклона горизонтальной оси вращения зрительной трубы, измерение углов выполняют при круге право (КП) и при круге лево (КЛ). Среднее значение измеренного угла будет полностью свободно от указанной систематической погрешности.

Систематическая погрешность из-за влияния наклона вертикальной оси теодолита полностью в полном приеме измерений не исключается. В связи с этим при высокоточных измерениях вертикальную ось следует тщательно приводить в отвесное положение. Но и при тщательной ее установке требуется определить угол ее наклона  $q$  с помощью точного накладного уровня, либо установочного уровня при алидаде горизонтального круга. Для этого в каждом полуприеме по уровню берут отсчеты по правому и левому концам пузырька уровня и вычисляют значение  $b$ :

$$b = 0,5[(Л + П)_{КЛ} - (Л + П)_{КП}], \quad (15.5)$$

где  $(Л+П)_{КЛ}$  и  $(Л+П)_{КП}$  – соответственно суммы отсчетов по левому и правому концам пузырька уровня, когда ноль уровня находится слева и справа от измеряемого направления.

В этом случае

$$q = 0,5b\tau, \quad (15.6)$$

где  $\tau$  – цена деления уровня.

При углах наклона визирной оси зрительной трубы более  $1^\circ$  в измеренное направление вводят поправку

$$t = q \times \text{ctg} z \quad (15.7)$$

Для ослабления влияния люфта подъемных винтов подставки половину всех приемов следует выполнять при вращении алидады по ходу часовой стрелки, а вторую половину – против хода часовой стрелки. Часто бывает, что при вращении алидады, например, по часовой стрелке, пришлось сделать возвратное, пусть и небольшое, движение. В этом случае необходимо по часовой стрелке сделать дополнительный оборот.

Влияние температурных деформаций теодолита на погрешность измерения углов может быть значительным и достигать  $1''$  и более. В связи с этим не следует выполнять высокоточные измерения при резких скачках температуры воздуха на несколько градусов. До начала измерений теодолит следует выдержать в тени не менее 1 часа, защищать его от действия прямых солнечных лучей, сокращать время выполнения полного приема измерений.

Высокоточные измерения углов и зенитных расстояний выполняют при измерениях в геодезических сетях в *выгоднейшее время измерений*, в моменты *изотермии* воздуха.

Погрешность  $m_\beta$  угла из-за центрирования теодолита определяется по формуле

$$m_\beta = \frac{l\rho}{\sqrt{2S_1S_2}} \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \cos \beta}, \quad (15.8)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – стороны угла  $\beta$ ;  $l$  – линейный элемент центрирования;  $\rho = 206265''$ .

При коротких расстояниях, что имеет место при измерениях деформаций, создании микролокальных построений, погрешность угла может достигать больших величин. Так, например, при расстояниях 50 м, угле  $60^\circ$  и линейном элементе центрирования  $l = 0,5$  мм погрешность измерения угла составит порядка  $1,5''$ . Для уменьшения этой погрешности, если это окажется необходимым, следует уменьшить линейный элемент центрирования, т.е. применить в данном случае принудительное центрирование.

Вторая группа инструментальных погрешностей связана с несовершенством конструкции визирных целей и их установкой в наблюдаемых точках.

Погрешность угла из-за погрешности центрирования визирной цели может быть оценена по формуле

$$m_\beta = l\rho \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{S_1^2 S_2^2}} \quad (15.9)$$

Так, принимая значения расстояний 50 м, линейный элемент центрирования 0,5 мм получим погрешность измерения угла, равную  $2''$ , т.е. больше, чем при таких же условиях из-за такой же величины линейного элемента центрирования.

По той же формуле (15.9) определяется и погрешность из-за несовпадения оси визирного штриха цели с осью вращения этой цели.

Большое влияние оказывают на погрешности измерений и несовершенство размеров и формы визирных целей, их высота над точкой центрирования.

Влияние внешней среды вызывает погрешности направлений из-за колебаний изображения от турбулентных потоков воздуха, из-за деформаций деталей и узлов прибора от температурных воздействий, кручения штатива и визирных целей при длительных стояниях на станциях, смещения штатива в горизонтальном направлении при вибрационных воздействиях и действии массы наблюдателя, из-за неравномерной освещенности наблюдаемой точки на цели и мн.др.

#### **§ 146. Высокоточные и точные измерения в схемах микротриангуляции, микротрилатерации и короткобазисной полигонометрии**

Микролокальные схемы измерений используются часто в случаях, когда требования к точности измерения деформаций отдельных частей объекта значительно различаются. К микролокальным схемам можно отнести и двух-

ступенчатые (и более) схемы измерений, в которых проектируется основная (исходная) ступень, обычно по исходным геодезическим знакам, и вторая (третья) ступени, опирающиеся на пункты первой ступени. В первом случае могут быть образованы микролокальные схемы, не связанные между собой и опирающиеся на один или несколько исходных пунктов. Во втором случае все микролокальные схемы между собой связаны перемычками и образуют единую систему с точностью измерений в каждой взаимосвязанной ступенчатого характера, например, с коэффициентом  $\lambda$ :  $m$  (1-я ступень)  $\rightarrow \lambda m$  (2-я ступень)  $\rightarrow 2 \lambda m$  (3-я ступень) и т.д.

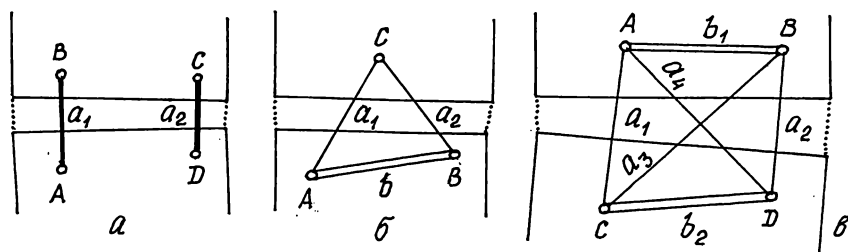


Рис. 15.6. Схемы измерения раскрытия трещин  
а) – двухточечная; б) – трехточечная; в) – четырехточечная

Микролокальные схемы чаще всего служат: а) для наблюдений за трещинами, щелями, температурными и осадочными швами с использованием двух-, трех- и четырехточечных щелемерных приспособлений (рис. 15.6); б) для наблюдений за горизонтальными смещениями гидротехнических сооружений и оползневых участков с использованием, в основном, створных методов и методов геодезических засечек; в) для наблюдений за вертикальными перемещениями отдельных сооружений, либо их частей или узлов, находящихся на одной или значительно разных высотах и др.

Особенности измерений и оценки точности нивелирных схем довольно подробно рассмотрены выше в гл. 14. Здесь будут показаны некоторые особенности проектирования микролокальных схем микротриангуляции, микротрилатерации, линейно-угловых построений, короткобазисной полигонометрии и схем створных измерений, предназначенных для измерения планового положения точек.

Схемы микротриангуляции и другие схемы разрабатывают на топографических картах и планах, чаще выполненных в масштабе 1:500 и крупнее. На карте (плане) намечают места закладки исходных геодезических знаков  $A$  и  $B$  (рис. 15.7), размещаемых вне зоны возможных деформаций, систему промежуточных точек  $1, 2, 3, 4, 5$  для обеспечения необходимой формы геодезических построений с включением в нее системы опорных знаков  $100, 200, 300, C, D$ , размещаемых на наблюдаемых объектах. Для полученных схем вычисляют проектные значения углов и расстояний, выбирают единицу веса и вычисляют веса уравниваемых (измеряемых) элементов, определяют качественные характеристики для секций системы. После этого оценивают качественные характеристики наиболее слабых точек системы, включенных

в наблюдаемые, с целью выбора технических средств (теодолита, мерных приборов) и разработки необходимой методики измерений.

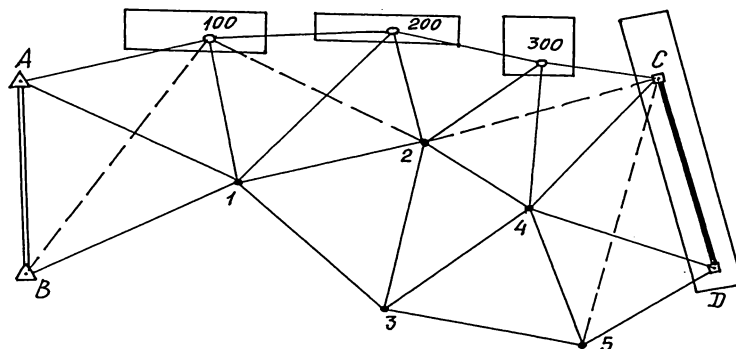


Рис. 15.7. Схема микротриангуляции (микротрилатерации, линейно-угловых построений) для наблюдений за горизонтальными смещениями

При определении качественных характеристик микротриангуляции в первом приближении принимают измерение углов одним полным приемом, а базисов — с относительной погрешностью измерений, примерно соответствующей точности измерения углов. Из практики известно, что в схемах микротриангуляции чаще всего углы и расстояния приходится измерять 3 - 6 приемами, т.е. практически можно вводить в оценку единицы веса, например, 2 полных приема измерения угла.

В системах микротрилатерации и линейно-угловых построениях, которые могут быть использованы в той же схеме рис. 15.7, выполняются аналогичные работы. В схемах микротрилатерации исходной для расчетов и оценок величиной является точность измерения расстояний, определяемых одним или двумя полными приемами (полный прием предусматривает измерение дважды - в прямом и обратном направлениях). В схеме линейно-угловых построений, а также в схемах короткобазисной полигонометрии, исходными величинами являются как точность измерения горизонтальных углов, так и точность измерения рабочих расстояний и базисов.

Если в запроектированной схеме затруднено выполнение поставленных нормативов по точности, то ее необходимо усилить дополнительными связями. Например, образовать в схеме микротриангуляции (рис. 15.7) *геодезические четырехугольники* (дополнительные связи показаны пунктирными линиями). Целесообразно дополнительные построения привязывать к определяемым точкам.

В гл. 14 рассмотрены схемы створных измерений деформаций. Рассмотрим более подробно принцип использования и качество той или иной схемы.

При малых длинах створов применяют схему полного (или общего) створа (рис. 14.3 а). Из-за разностей расстояний до наблюдаемых точек результаты измерений получаются неравноточными. Веса результатов измере-



ния нестворностей оцениваются по формуле, связанной с расстояниями  $S_i$  до наблюдаемых точек с учетом установленной (принятой) единицы веса  $S_e$ :

$$P_i = \frac{S_e^2}{S_i^2} \quad (15.10)$$

Увеличение веса здесь может быть достигнуто увеличением приемов  $n$  измерений для слабых точек системы. В этом случае

$$P_i = \frac{S_e^2}{S_i^2} n \quad (15.11)$$

Схема частей створа (рис. 15.8) применяется при больших длинах створа. В этом случае створ делят на две, три или четыре части, примерно равные по длине.

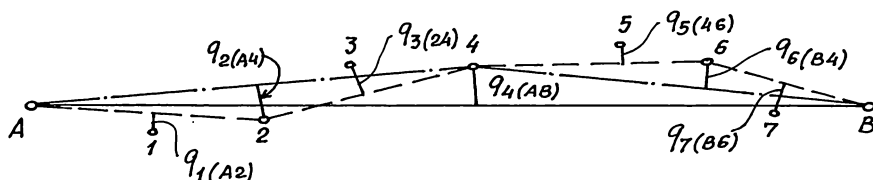


Рис. 15.8. Схема частей створа

Если створ поделен, например, на четыре части, то сначала определяют нестворность средней точки 4 относительно створа  $A-B$ , затем определяют нестворности точек 2 и 6 относительно полустворов  $A-4$  и  $4-B$ , применяя к ним схему полного створа. Далее, в пределах каждого четвертьствора по схеме полного створа определяют нестворности точек 1,  $(A-2)$ , 3  $(2-4)$ , 5  $(4-6)$  и 7  $(6-B)$ .

Исследование схемы полного створа и схемы частей створа показывает, что качественные их характеристики практически одинаковые, но заметно различаются для разностей нестворностей, т.е. — для деформаций. В схеме частей створа веса разностей нестворностей получаются большими, чем в схеме полного створа.

Схему последовательных створов (рис. 14.3 в) применяют чаще в тех случаях, когда требуется получить высокую точность конечных результатов измерений. Качественные характеристики для разностей нестворностей в этой схеме существенно меньше таких же характеристик для схемы полного створа и схемы частей створа. Напомним здесь, что качественные характеристики определяются обратными весами, поэтому чем меньше качественная характеристика по своему значению, тем больше вес данного элемента или системы.

## Глава 16

### УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

#### § 147. Основные задачи уравнительных вычислений

Проблема уравнивания геодезических построений является весьма важной при выполнении измерений и их обработке в процессе создания опорных сетей на земной поверхности и в недрах (в горных выработках), при выполнении точных и высокоточных специальных работ, при наблюдениях за деформациями наземных сооружений и горных выработок и др. Основными геодезическими построениями являются плановые Государственные геодезические сети 1, 2, 3 и 4 классов, а также сети 1-го и 2-го разрядов, высотные нивелирные сети I, II, III и IV классов. Все другие построения представляют собой сравнительно локальные фигуры в месте проведения специальных инженерно-геодезических работ, например, по созданию точной геодезической разбивочной основы на строительной площадке, либо аналогичных маркшейдерских работ, в том числе при прокладке полигонометрических ходов в подземных горных выработках. Такими фигурами (построениями) могут быть: небольшие цепочки треугольников триангуляции или трилатерации; вставки в угол; центральные системы; геодезические четырехугольники; полигонометрические ходы и системы полигонометрических ходов; нивелирные ходы и системы нивелирных ходов и др.

Под *уравниванием* понимают комплексное решение трех основных задач:

- определение по результатам измерений надежных значений искомых величин, а также их функций, как косвенных результатов измерений;
- оценка точности результатов измерений;
- оценка точности функций измеренных величин.

Даже при весьма тщательных многократных измерениях одной и той же величины, в каждом из результатов с большой вероятностью практически неизбежно содержится погрешность, представляющая собой, в основном, суммарное воздействие приборных погрешностей, личных погрешностей наблюдателя и погрешностей из-за влияния внешней среды, о чем подробно рассказано в гл. 15. В связи с этим, даже при измерениях точно известных величин, например, суммы горизонтальных углов плоского многоугольника, возникают невязки, что приводит к неоднозначности в значениях измеренных углов. Указанная неоднозначность заключается в том, что остается неизвестной даже абсолютно правильно измеренная величина при наличии общей невязки.

*Уравнительные вычисления* дают возможность устранить практические невязки в различных геодезических построениях, найти вероятнейшие значения измеренных величин и выполнить оценку их точности. Хотя сама по себе неоднозначность в результатах измерений остается, поскольку существовала практическая невязка, и вероятнейшее значение измеренных величин получаются со степенью надежности всегда меньшей единицы. Здесь следует

учитывать, что при введении поправок в результаты измерений какая-то из величин, либо несколько из них могут быть исправлены и в худшую сторону. Т.е. существует вероятность того, что, например, один из углов был измерен абсолютно точно, но из-за неопределенности, возникающей при появлении невязки, он искажается на величину поправки. В то же время, измеренному с большей погрешностью углу может быть придано меньшее значение поправки.

При изложении способов уравнивания принято во внимание, что читатель изучил разделы высшей математики, в которых рассматриваются вопросы теории вероятностей и математической статистики, дифференциальное и интегральное исчисления, теория матриц и решение систем линейных уравнений, вопросы теории погрешностей результатов геодезических измерений.

В теории погрешностей измерений рассматриваются правила математической обработки результатов многократных измерений одной независимой величины и оценки погрешностей функций независимых величин. Эти правила могут применяться для любой совокупности измеренных величин при условии, что совокупность эта включает в себя только *необходимые величины*.

*Необходимыми величинами*, как уже отмечалось выше, являются такие независимые между собой величины, из которых можно получить для каждой искомой величины только одно единственное ее значение. В геодезической и маркшейдерской практике обычно измеряют, кроме необходимых и *избыточные величины*. Например, три стороны треугольника и один, два или три его угла, не  $(n - 1)$  угол многоугольника, а все его углы.

Если обозначить число необходимых измерений буквой  $k$ , а число избыточных измерений буквой  $r$ , то полное (общее) число измерений  $n = k + r$ .

Предположим, что нами измерены все внутренние углы в полигоне, состоящем из  $n$  вершин. Тогда число необходимых измерений составит  $k = n - 1$ , а число избыточных измерений  $r = 1$ . Каждый из измеренных углов, а также любые  $(n-1)$  углов, не позволяют составить математическое соотношение для суммы углов многоугольника, можно только вычислить значение неизмеренного угла. Однако для полной группы  $n$  измеренных углов

$$[\beta_{\alpha}] - 180^{\circ}(n \pm 2) = 0, \quad (16.1)$$

где  $[\beta_{\alpha}]$  - сумма точных значений горизонтальных углов;  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ; знак «плюс» за круглыми скобками - для внешних углов, знак «минус» - для внутренних углов.

Введем в сумму точных значений углов значения  $\beta_i$  измеренных углов. В этом случае можно записать, что

$$[\beta_i] - 180^{\circ}(n \pm 2) = W, \quad (16.2)$$

где  $W$  - невязка, определяющая степень нарушения условия (16.1) и возникающая из-за неизбежных погрешностей в результатах измерений.

Процесс уравнивания здесь заключается в ликвидации невязки, т.е. определении таких значений углов  $\beta'_i$ , при которых обеспечивается выполнение условия (16.1), т.е.

$$[\beta_i'] - 180^\circ(n \pm 2) = 0. \quad (16.3)$$

Можно сформулировать следующие основные выводы:

- уравнивание возможно только при наличии избыточных измерений, а также при условии неизбежного появления малых по величине (допустимых) погрешностей измерений необходимых и избыточных величин;

- уравнивание состоит в определении невязок в составленных математических соотношениях путем введения поправок  $v_i$  в результаты измерений и в нахождении вероятнейших значений искомых величин; для рассмотренного выше примера

$$\beta_i' = \beta_i + v_i; \quad (16.4)$$

- избыточные измерения являются необходимым процессом для контроля и оценки точности результатов измерений.

Если при измерении  $n$  величин ( $k$  необходимых и  $r$  избыточных, причем  $r < n$ ) получены результаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , точность которых определяется их весами  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , то можно составить  $r$  условных уравнений (16.1):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{oi}, \dots, x_{on}) &= 0 \\ \varphi_2(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{oi}, \dots, x_{on}) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_j(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{oi}, \dots, x_{on}) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_r(x_{o1}, x_{o2}, \dots, x_{oi}, \dots, x_{on}) &= 0 \end{aligned} \quad (16.5)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, r$ .

Очевидно, что система условных уравнений (16.5) является неопределенной, поскольку содержит  $r$  уравнений с  $n$  неизвестными при  $r < n$ .

Значения  $x_i$  содержат погрешности. Если ввести в уравнения (16.5) вместо значений  $x_{oi}$  измеренные значения  $x_i$ , то получим другую систему уравнений, подобную (16.2):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) &= W_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) &= W_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) &= W_j \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) &= W_r \end{aligned} \quad (16.6)$$

Устранение невязок  $W_i$  заключается во введении в значения  $x_i$  поправок  $v_i$  и получения уравненных значений результатов измерений:

$$x_i' = x_i + v_i, \quad (16.7)$$

т.е.

$$\begin{aligned} \varphi_1((x_1 + v_1), (x_2 + v_2), \dots, (x_i + v_i), \dots, (x_n + v_n)) &= 0 \\ \varphi_2((x_1 + v_1), (x_2 + v_2), \dots, (x_i + v_i), \dots, (x_n + v_n)) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_j((x_1 + v_1), (x_2 + v_2), \dots, (x_i + v_i), \dots, (x_n + v_n)) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_r((x_1 + v_1), (x_2 + v_2), \dots, (x_i + v_i), \dots, (x_n + v_n)) &= 0 \end{aligned} \quad (16.8)$$

или, с учетом (16.7),

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x'_1, x'_2, \dots, x'_i, \dots, x'_n) &= 0 \\
\varphi_2(x'_1, x'_2, \dots, x'_i, \dots, x'_n) &= 0 \\
&\dots\dots\dots \\
\varphi_j(x'_1, x'_2, \dots, x'_i, \dots, x'_n) &= 0 \\
&\dots\dots\dots \\
\varphi_r(x'_1, x'_2, \dots, x'_i, \dots, x'_n) &= 0
\end{aligned} \tag{16.9}$$

Непосредственно технология уравнивания заключается в нахождении единственных значений поправок  $v_i$  при множестве решений неопределенной системы уравнений (16.8) или (16.9). Для решения таких задач используется метод наименьших квадратов.

## § 148. Метод наименьших квадратов

*Метод наименьших квадратов* предложен в 1806 г. французским математиком Лежандром для решения неопределенных систем линейных уравнений.

Условием, которое позволяет решить систему таких уравнений, является условие минимума сумм квадратов поправок  $v_i$ , вводимых в результаты измерений, выполненных равноточно, либо неравноточно с весами  $p_i$ , т.е.,

$$v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 = [v_i^2] = \min. \tag{16.10}$$

$$p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2 = [p_i v_i^2] = \min. \tag{16.11}$$

Поскольку в геодезических построениях выполняют обычно два вида измерений, углов и расстояний, то можно записать:

$$[p_s v_s] + [p_\beta v_\beta] = \min \tag{16.12}$$

При измерениях в высотных сетях геометрического нивелирования используются формулы (16.10) и (16.11).

Следовательно, при уравнивании требуется найти минимум функций (16.10)...(16.12), если их переменные находятся во взаимосвязи с независимыми уравнениями (16.8).

Достоинствами принципа наименьших квадратов является то, что при использовании вторых степеней поправок ограничиваются большие поправки, в связи с чем при равноточных измерениях поправки сравнительно равномерно распределяются между результатами измерений. При неравноточных измерениях веса при поправках уменьшают поправки к более точным результатам измерений и увеличивают их для менее точных результатов. «Оба отмеченных свойства вполне согласуются с требованиями здравого смысла, что, несомненно, есть убедительный довод в пользу принципа наименьших квадратов» [8].

Решение указанной задачи может быть реализовано двумя основными способами:

- способом Лежандра с неопределенными множителями, т.н. *коррелятивный способ уравнивания* (условий или условных уравнений);

- способом абсолютного экстремума, который основан на представлении измеренных величин в виде функций некоторых параметров, т.н. *параметрический способ уравнивания* (способ необходимых или косвенных измерений).

Здесь нелишне напомнить, что Вы уже встречались с условием минимизации при анализе точности измерений: по такому же принципу находится *средняя квадратическая погрешность*. Как известно, средняя квадратическая погрешность вычисляется через суммы квадратов отклонений от арифметического среднего, либо через суммы произведений квадратов отклонений на веса измерений при обработке неравноточных измерений. Так вот как раз эти суммы и являются минимальными из всех возможных для других значений вычитаемого, взятого вместо среднего или среднего весового.

## **§ 149. Классификация основных способов уравнивания**

Способы уравнивания результатов измерений в геодезических построениях разделяют на два основных вида: *строгие* способы и *нестрогие* способы уравнивания.

К *строгим* способам уравнивания относятся *коррелятный* и *параметрический* способы. Следует отметить, что оба названных способа дают идентичные результаты. Эти способы позволяют полностью реализовать в той или иной схеме метод наименьших квадратов практически для любых по сложности построений.

В некоторых случаях, при уравнивании геодезических построений сравнительно малой точности, применяют упрощенные способы уравнивания, которые относят к *нестрогим* способам. Например, в любом полигонометрическом ходе число избыточных измерений всегда равно трем. Очевидно, что число избыточных измерений практически намного меньше необходимых. Это приводит к тому, что при уравнивании не будет достигаться заметного повышения точности. Для одиночных полигонометрических ходов и даже для систем полигонометрических ходов с одной или двумя узловыми точками можно рекомендовать *способ раздельного уравнивания*. В частности, способ раздельного уравнивания был использован выше при обработке разомкнутого или замкнутого теодолитного хода: сначала выполнялось уравнивание горизонтальных углов (дирекционных углов), а затем – уравнивание приращений координат (координат). В полигонометрических сетях малой точности, содержащих не более 3-4 узловых пунктов, используют *способ эквивалентной замены*. Если полигонометрическая или нивелирная сеть содержит большое число исходных пунктов, то наиболее эффективно применять *способ последовательных приближений*. Нивелирные сети, состоящие из полигонов, при пониженных требованиях точности уравнивают, как правило, *способом полигонов* В.В.Попова. О всех указанных здесь способах пойдет речь в последующих параграфах этой главы.

## § 150. Основные геометрические условия, возникающие в построениях

Если геодезические построения состоят только из необходимых исходных данных, то такое построение (сеть) называется *свободным (свободной)* и уравниванию не подлежит. При наличии избыточных измерений построение (сеть) называется *несвободным (несвободной)*, и в нем (ней) может быть выполнено уравнивание при наличии невязок, определяемых выполнением тех или иных условий в геометрических связях.

*При уравнивании геодезических построений необходимо правильно определить число и вид т.н. **условных уравнений**. В связи с этим **должны быть составлены только необходимые условия, не больше**. В противном случае система уравнений не может быть разрешима. Меньшее же число условий вообще исключает решение задачи уравнивания, поскольку хотя бы одна из невязок будет исключена из рассмотрения.*

Далее приведем основные геометрические условия, которые могут определять вид того или иного условного уравнения связи в геодезическом построении.

### 150.1. Условие фигуры

В замкнутой фигуре, имеющей  $n$  вершин, сумма уравненных значений измеренных углов должна быть равна  $180^\circ (n \pm 2)$ , т.е.,

$$\varphi(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) - 180^\circ (n \pm 2) = 0, \quad (16.13)$$

где знак «плюс» в круглых скобках - для внешних, знак «минус» - для внутренних углов;  $\beta'$  - исправленные (уравненные) углы.

В этом случае условное уравнение поправок имеет вид:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + [\beta_i] - 180^\circ (n \pm 2) = 0, \quad (16.14)$$

где  $\beta_i$  - измеренные углы.

Поскольку два последних слагаемых образуют т.н. угловую невязку  $W$ , т.е.

$$[\beta_i] - 180^\circ (n \pm 2) = W_\beta, \quad (16.15)$$

то выражение (16.14) можно представить в виде:

$$[v_i] + W_\beta = 0 \quad (16.16)$$

Выражение (16.13) и является геометрическим соотношением (уравнением связи для условия фигуры).

Если в той же замкнутой фигуре углы заменить разностями направлений (т.е. отсчетов по горизонтальному кругу теодолита), то получается условное уравнение поправок для измеренных направлений:

$$[v_{i-1} - v_{i+1}] + W_\beta = 0 \quad (16.17)$$

В формуле (16.17) точкой стояния является точка  $i$ .

### 150.2. Условие горизонта

Сумма уравненных значений неперекрывающихся углов, измеренных независимо (т.е. отдельно друг от друга) вокруг одной вершины (рис. 16.1), должна быть равна  $360^0$ , т.е.,

$$\beta_1' + \beta_2' + \dots + \beta_n' - 360^0 = 0 \quad (16.18)$$

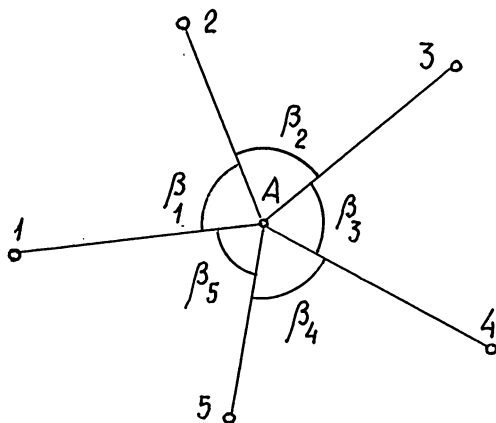
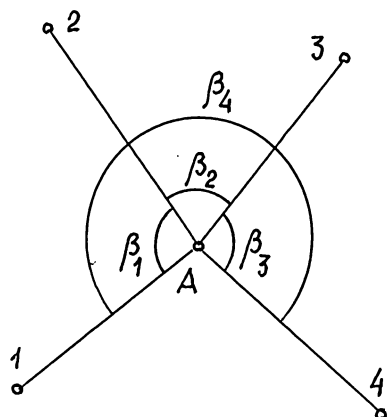


Рис. 16.1. Условие горизонта



16.2. Условие суммы углов

Условное уравнение поправок горизонта имеет вид (16.16), где

$$W_\beta = [\beta_i] - 360^0 \quad (16.19)$$

для измеренных углов  $\beta_i$ .

Для измеренных направлений условие горизонта не возникает, поскольку в этом случае всегда сумма углов, вычисленных по разностям направлений, будет равна  $360^0$  (зависимые измерения). Если же в измеренные углы ввести поправки, то и для направлений может возникнуть и условие горизонта. Поэтому условные уравнения поправок со свободным членом, равным нулю, необходимо включать в уравнивание.

### 150.3. Условие суммы углов

Для измеренных в одной вершине углов  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  и  $\beta_4$  (рис. 16.2) должно соблюдаться следующее геометрическое условие:

$$\beta_1' + \beta_2' + \beta_3' - \beta_4' = 0 \quad (16.20)$$

В этом случае условное уравнение поправок будет иметь вид:

$$v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + W_\beta = 0, \quad (16.21)$$

где  $W_\beta$  – свободный член уравнения, определяемый суммой

$$W_\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 \quad (16.22)$$



#### 150.4. Условие дирекционных углов

Для решения геодезического построения (при определении координат его точек) необходимо знать исходный дирекционный угол одной из его сторон. Если же в сети известны дирекционные углы других сторон, то каждый из них образует одно условие. Например, если в сети (рис. 16.3) известны дирекционные углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , то геометрическое условие дирекционных углов запишется в виде:

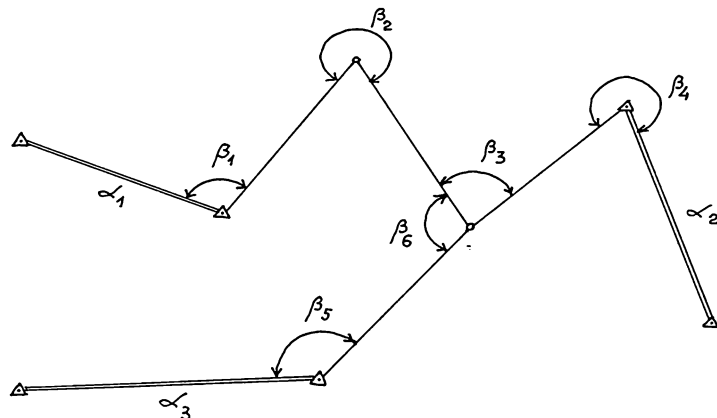


Рис. 16.3. Условие дирекционных углов

$$\begin{aligned} \alpha_1' \pm 4 \times 180^\circ + \beta_1' + \beta_2' + \beta_3' + \beta_4' &= \alpha_2' \\ \alpha_3' \pm 3 \times 180^\circ + \beta_5' + \beta_6' + \beta_3' + \beta_4' &= \alpha_2' \end{aligned} \quad (16.23)$$

или

$$\begin{aligned} (\alpha_1' - \alpha_2') \pm 4 \times 180^\circ + \beta_1' + \beta_2' + \beta_3' + \beta_4' &= 0 \\ (\alpha_3' - \alpha_2') \pm 3 \times 180^\circ + \beta_5' + \beta_6' + \beta_3' + \beta_4' &= 0 \end{aligned} \quad (16.24)$$

Условные уравнения поправок в этом случае определяются выражениями:

$$\begin{aligned} (v_{\alpha_1} - v_{\alpha_2}) + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + W_1 &= 0 \\ (v_{\alpha_3} - v_{\alpha_2}) + v_5 + v_6 + v_3 + v_4 + W_2 &= 0, \end{aligned} \quad (16.25)$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \pm 4 \times 180^\circ - (\alpha_2 - \alpha_1) \\ W_2 &= \beta_5 + \beta_6 + \beta_3 + \beta_4 \pm 3 \times 180^\circ - (\alpha_2 - \alpha_3) \end{aligned} \quad (16.26)$$

В выражениях (16.23) ... (16.25) принимается во внимание, что и все дирекционные углы были измерены (они могут быть и вычислены по значениям координат, имеющих известные погрешности), т.е. содержат погрешности и подлежат уравниванию. Чаще всего дирекционные углы принимают исходными, т.е. содержащими погрешности весьма малые по сравнению с погрешностями измеренных углов. В этом случае выражения (16.25) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + W_1 &= 0 \\ v_5 + v_6 + v_3 + v_4 + W_2 &= 0, \end{aligned} \quad (16.27)$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \pm 4 \times 180^\circ - (\alpha_{02} - \alpha_{01}) \\ W_2 &= \beta_5 + \beta_6 + \beta_3 + \beta_4 \pm 3 \times 180^\circ - (\alpha_{02} - \alpha_{03}) \end{aligned} \quad (16.28)$$

( $\alpha_0$  – исходные дирекционные углы).

### 150.5. Условие сторон

Предположим, что в фигуре (рис. 16.4) измерены все углы  $\beta$  и стороны  $s_1$  и  $s_2$ . Между сторонами, из решения треугольников, существует следующее соотношение:

$$s_2' = s_1' \frac{\sin \beta_1' \sin \beta_4'}{\sin \beta_3 \sin \beta_5} \quad (16.29)$$

Это равенство можно представить в виде нелинейной функции

$$\varphi(s_1' \frac{\sin \beta_1' \sin \beta_4'}{\sin \beta_3 \sin \beta_5} - s_2') = 0 \quad (16.30)$$

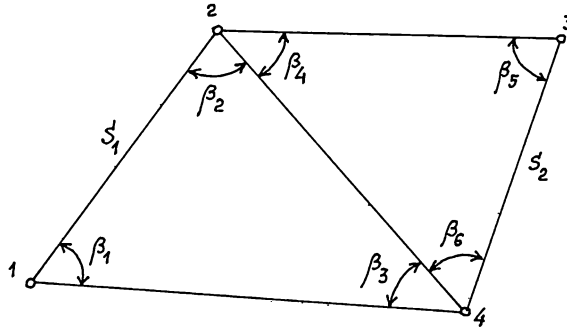


Рис. 16.4. Условие сторон

Приведем нелинейную функцию (16.30) к линейному виду, разложив ее в ряд Тейлора и ограничиваясь только первыми членами разложения. Получим:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \right)_0 v_{s_1} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \right)_0 v_{s_2} + \sum_1^4 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} \right)_0 v_{\beta_i} + \varphi(s_1, s_2, \beta_i) = 0 \quad (16.31)$$

Найдем частные производные:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} \right)_0 = \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_4}{\sin \beta_3 \sin \beta_5} = \frac{s_2^0}{s_1}, \dots, \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \right)_0 = -1, \dots, \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1} \right)_0 = s_1 \frac{\cos \beta_1 \sin \beta_4}{\sin \beta_3 \sin \beta_5}, \quad (16.32)$$

где  $s_2^0$  – вычисленное по формуле (16.29) значение  $s_2$  по измеренным аргументам  $s_1, \beta_1, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ . С учетом (16.32)

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1} \right)_0 = s_2^0 \operatorname{ctg} \beta_1. \quad (16.33)$$

Аналогично можно записать выражения для  $\beta_3, \beta_4$  и  $\beta_5$ :

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_3} \right)_0 = -s_2^0 \operatorname{ctg} \beta_3; \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_4} \right)_0 = s_2^0 \operatorname{ctg} \beta_4; \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_5} \right)_0 = -s_2^0 \operatorname{ctg} \beta_5. \quad (16.34)$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(s_1, s_2, \beta_i) = s_1 \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_4}{\sin \beta_3 \sin \beta_5} - s_2 = s_2^0 - s_2 = W_s. \quad (16.35)$$

Умножим выражение (16.31) на  $1/s_2^0$  и подставим в него значения частных производных (16.32), (16.33), (16.34). Уравнение поправок будет иметь вид:

$$\frac{v_{s1}}{s_1} \rho - \frac{v_{s2}}{s_2} \rho + v_{\beta 1} \operatorname{ctg} \beta_1 - v_{\beta 3} \operatorname{ctg} \beta_3 + v_{\beta 4} \operatorname{ctg} \beta_4 - v_{\beta 5} \operatorname{ctg} \beta_5 + W_s = 0 \quad (16.36)$$

или

$$\frac{v_{s1}}{s_1} \rho - \frac{v_{s2}}{s_2} \rho + v_{\beta 1} \delta_1 - v_{\beta 3} \delta_3 + v_{\beta 4} \delta_4 - v_{\beta 5} \delta_5 + W_s = 0, \quad (16.37)$$

где  $W_s = \frac{s_2^0 - s_2}{s_2^0} \rho$  - относительная погрешность стороны  $s$ ;  $\delta_i = \operatorname{ctg} \beta_i$ ;

$\rho$ - угловая мера радиана.

Если стороны  $s_1$  и  $s_2$  являются базисами (исходными), то поправки для них будут равны нулю. В этом случае условное уравнение поправок исходных сторон (базисов) упрощается:

$$v_{\beta 1} \delta_1 - v_{\beta 3} \delta_3 + v_{\beta 4} \delta_4 - v_{\beta 5} \delta_5 + W_s = 0, \quad (16.38)$$

где  $W_s = \frac{s_2^0 - s_{02}}{s_2^0} \rho$ ;  $s_{02}$  - базис.

## 150.6. Условие полюса

Условие полюса возникает в такой фигуре (рис. 16.5), в которой можно образовать замкнутый ряд треугольников, начинающихся и заканчивающихся на одной и той же стороне (например, центральная система, геодезический четырехугольник, веер). Если эту сторону принять за исходную (базис), то из решения треугольников можно получить эту сторону вторично.

Например, для центральной системы рис. 16.5 можно записать, что

$$\varphi = s \frac{\sin \beta'_1 \sin \beta'_3 \sin \beta'_5 \sin \beta'_7 \sin \beta'_9}{\sin \beta_2 \sin \beta_4 \sin \beta_6 \sin \beta_8 \sin \beta_{10}} - s = 0 \quad (16.39)$$

Условное уравнение поправок данного полюса с учетом введенных выше обозначений (16.37) имеет вид:

$$(v_1 \delta_1 + v_3 \delta_3 + v_5 \delta_5 + v_7 \delta_7 + v_9 \delta_9) - (v_2 \delta_2 + v_4 \delta_4 + v_6 \delta_6 + v_8 \delta_8 + v_{10} \delta_{10}) + \frac{s_0 - s}{s} \rho = 0 \quad (16.40)$$

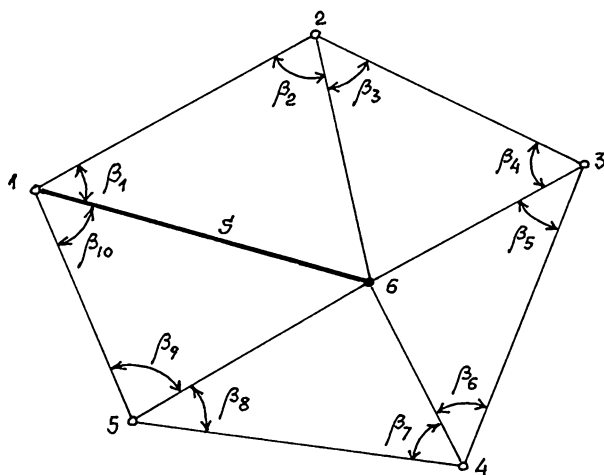


Рис. 16.5. Условие полюса

### 150.7. Условие координат

В геодезическом построении каждый избыточный исходный пункт обуславливает два условных уравнения координат – абсцисс ( $x$ ) и ординат ( $y$ ).

Предположим, что измерения выполнены в цепочке треугольников триангуляции (рис. 16.6), заканчивающейся на избыточном пункте 5. Наметим *ходовую линию*, проходящую через вершины промежуточных углов  $\eta_i$ : 1–3–4–5. В этом случае координатные условные уравнения (абсцисс и ординат) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\varphi_x &= x_1 + s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + s_3 \cos \alpha_3 - x_5 = 0 \\ \varphi_y &= y_1 + s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + s_3 \sin \alpha_3 - y_5 = 0\end{aligned}\quad (16.41)$$

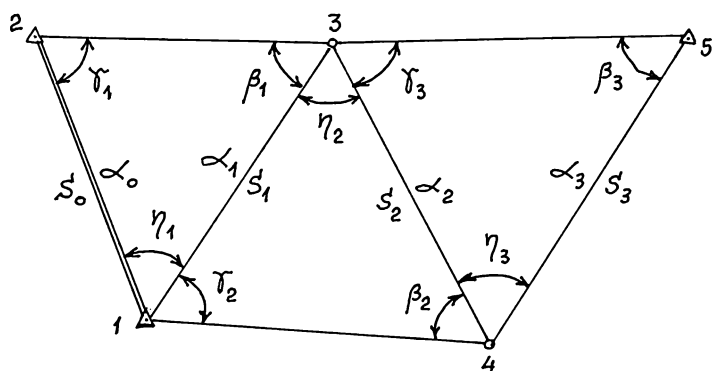


Рис. 16.6. Условие координат

При решении треугольников триангуляции стороны и дирекционные углы определяют от исходных сторон  $s_0$  (базиса) и исходного дирекционного угла  $\alpha_0$ :

$$\begin{aligned}
s_1 &= s_0 \frac{\sin \gamma_1}{\sin \beta_1}; & \alpha_1 &= \alpha_0 \pm 180^\circ + \eta_1 \\
s_2 &= s_0 \frac{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2}{\sin \beta_1 \sin \beta_2}; & \alpha_2 &= \alpha_0 \pm 2 * 180^\circ + \eta_1 - \eta_2 \\
s_3 &= s_0 \frac{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \beta_3}; & \alpha_3 &= \alpha_0 \pm 3 * 180^\circ + \eta_1 - \eta_2 + \eta_3
\end{aligned} \tag{16.42}$$

Представим уравнения (16.41) через поправки в углы в линейной форме:

$$\begin{aligned}
\sum \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial \gamma_i} \right)_0 v_{\gamma_i} + \sum \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial \beta_i} \right)_0 v_{\beta_i} + \sum \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial \eta_i} \right)_0 v_{\eta_i} + W_x &= 0 \\
\sum \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial \gamma_i} \right)_0 v_{\gamma_i} + \sum \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial \beta_i} \right)_0 v_{\beta_i} + \sum \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial \eta_i} \right)_0 v_{\eta_i} + W_y &= 0
\end{aligned} \tag{16.43}$$

Свободными членами  $W_x$  и  $W_y$  в уравнениях (16.43) являются приближенные значения искоемых функций (16.41), вычисленные по измеренным горизонтальным углам с использованием равенств (16.42).

Из уравнений (16.41) найдем частные производные (коэффициенты условных уравнений поправок) и подставим их в уравнения (16.43). При этом поправки углов выражаются в секундах, свободные члены – в дециметрах, а разности координат – в километрах. Получим условные уравнения поправок:

- для координат  $x$  (при уравнивании углов):

$$\sum \frac{x_n - x_i}{20,206} \operatorname{ctg} \gamma_i v_{\gamma_i} - \sum \frac{x_n - x_i}{20,206} \operatorname{ctg} \beta_i v_{\beta_i} - \sum \frac{y_n - y_i}{20,206} (\pm v_{\eta_i}) + W_x = 0; \tag{16.44}$$

- для координат  $y$  (при уравнивании углов):

$$\sum \frac{y_n - y_i}{20,206} \operatorname{ctg} \gamma_i v_{\gamma_i} - \sum \frac{y_n - y_i}{20,206} \operatorname{ctg} \beta_i v_{\beta_i} + \sum \frac{x_n - x_i}{20,206} (\pm v_{\eta_i}) + W_y = 0 \tag{16.45}$$

Здесь:  $x_n$  и  $y_n$  - координаты последнего пункта (для рис. 16.6  $x_n = x_5$ ,  $y_n = y_5$ );  $x_i$  и  $y_i$  - координаты текущего пункта  $i$  ходовой линии, проходящей через вершины промежуточных углов  $\eta_i$ ;  $v_{\beta_i}$  и  $v_{\gamma_i}$  - поправки связующих углов  $\beta$  и  $\gamma$  (угол  $\gamma$  лежит против исходной стороны треугольника);  $v_{\eta_i}$  - поправки промежуточных углов  $\eta_i$  (записываются со знаком «плюс» для левых по ходу углов, со знаком «минус» - для правых по ходу углов).

## § 151. Методы решения систем линейных нормальных уравнений

### 151.1. Способ последовательной подстановки

Рассмотрим решение системы линейных уравнений способом последовательной подстановки на следующем примере. Имеется система линейных уравнений с четырьмя неизвестными  $x_1, x_2, x_3, x_4$ :

$$\begin{aligned}
1. \quad & 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 1 = 0 \\
2. \quad & -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 - 6 = 0 \\
3. \quad & 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 8 = 0 \\
4. \quad & -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 4 = 0
\end{aligned} \tag{16.46}$$

Шаг 1. Выразим в уравнении 1 (16.46)  $x_1$  через остальные неизвестные,

$$x_1 = 0,5 x_2 - 0,75 x_3 + 0,5 x_4 + 0,25, \tag{16.47}$$

и подставим его значение в уравнения 2, 3 и 4. Получим новую систему уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} 2. \quad & 4x_2 - 0,5x_3 - 6,5 = 0 \\ 3. \quad & -0,5x_2 + 0,75x_3 - 2,5x_4 + 8,75 = 0 \\ 4. \quad & -2,5x_3 + x_4 + 3,5 = 0 \end{aligned} \quad (16.48)$$

Шаг 2. выразим в уравнении 2 (16.48)  $x_2$  через остальные неизвестные (в данном случае – через  $x_3$ ),

$$x_2 = 0,125x_3 + 1,625, \quad (15.49)$$

и подставим его в уравнения 3 и 4 (16.48). Получим систему из двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} 3. \quad & 0,6875x_3 - 2,5x_4 + 7,9375 = 0 \\ 4. \quad & -2,5x_3 + x_4 + 3,5 = 0 \end{aligned} \quad (16.50)$$

Шаг 3. Выразим в уравнении 4 (16.50)  $x_3$  через  $x_4$ ,

$$x_3 = 0,4x_4 + 1,4, \quad (16.51)$$

и подставим его значение в уравнение 3 (16.50). Получим

$$-2,225x_4 + 8,9 = 0, \quad (16.52)$$

откуда  $x_4 = -8,9 / -2,225 = +4$ .

Из уравнения (16.51)  $x_3 = 0,4 \times 4 + 1,4 = +3$ .

Из уравнения (16.49)  $x_2 = 0,125 \times 3 + 1,625 = +2$ .

Из уравнения (16.47)  $x_1 = 0,5 \times 2 - 0,75 \times 3 + 0,5 \times 4 + 0,25 = +1$ .

Для контроля полученные значения  $x_i$  необходимо подставить в исходные уравнения (16.46) и проверить выполнение указанных условий. В данном примере указанные условия подтверждены абсолютно.

## 151.2. Способ матричных преобразований

Рассмотрим пример, приведенный в 151.1.

Для решения системы линейных уравнений матричным способом необходимо переписать их в виде

$$\begin{aligned} 1. \quad & 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = +1 \\ 2. \quad & -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = +6 \\ 3. \quad & 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -8 \\ 4. \quad & -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -4 \end{aligned} \quad (16.53)$$

и составить матрицу коэффициентов при  $x_i$ , правых частей и контрольного столбца, равного суммам коэффициентов и правой части каждого уравнения по соответствующей строке матрицы:

$$\begin{pmatrix} +4.....-2.....+3.....-2.....+1.....+4 \\ -2.....+5.....-2.....+1.....+6.....+8 \\ +3.....-2.....+3.....-4.....-8.....-8 \\ -2.....+1.....-4.....+2.....-4.....-7 \end{pmatrix} \quad (16.54)$$

**Составление контрольного столбца является обязательным!** После математических действий с полной строкой, включая и контрольный столбец, **всегда следует выполнять проверку сумм коэффициентов уравнений правой и левой частей с полученным новым значением контрольного столбца.** Они должны совпадать в пределах округлений результатов. Если этого не делать, то погрешность в вычислениях выявится только после решения систем уравнений. А процесс этот довольно трудоемкий, и без постоянного контроля вся работа может оказаться напрасной.

Из математики известно, что результат решения не изменится, если:

- любую строку матрицы поменять местами с другой строкой;
- любую строку матрицы умножить или разделить на одно и то же постоянное число.

Решение матрицы сводится к образованию т.н. треугольной матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_1.....a_2.....a_3.....a_4.....|m_1|.....t_1 \\ 0.....b_2.....b_3.....b_4.....|m_2|.....t_2 \\ 0.....0.....c_3.....c_4.....|m_3|.....t_3 \\ 0.....0.....0.....d_4.....|m_4|.....t_4 \end{pmatrix} \quad (16.55)$$

Таким образом получается система линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4 &= m_1 \\ b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4 &= m_2 \\ c_3k_3 + c_4k_4 &= m_3 \\ d_4k_4 &= m_4 \end{aligned} \quad (16.56)$$

для, например, четырех линейных уравнений. Из последней строки находят значение  $k_4$  :

$$k_4 = \frac{m_4}{d_4} \quad (16.57)$$

и последовательной подстановкой в уравнения (16.56) решают задачу.

Контроль решения осуществляется подстановкой полученных значений  $k$  в исходные уравнения (16.53).

Проследим решение на приведенном примере.

Шаг 1. Образовать 1-й нулевой столбец в строках 2, 3 и 4 матрицы (16.54). Для этого умножим 2-ю и 4-ю строки на (+2), а 3-ю строку – на (-4/3). Получим:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} +4 & \dots & -2 & \dots & +3 & \dots & -2 & \dots & +1 & \dots & +4 \\ -4 & \dots & +10 & \dots & -4 & \dots & +2 & \dots & +12 & \dots & +16 \\ -4 & \dots & +8/3 & \dots & -4 & \dots & +16 & \dots & +32/3 & \dots & +32/3 \\ -4 & \dots & +2 & \dots & -8 & \dots & +4 & \dots & -8 & \dots & -14 \end{array} \right) \quad (16.58)$$

Затем последовательно сложим 2-ю, 3-ю и 4-ю строки (16.58) с первой строкой этой матрицы:

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} +4 & \dots & -2 & \dots & +3 & \dots & -2 & \dots & +1 & \dots & +4 \\ ..0 & \dots & +8 & \dots & -1 & \dots & 0 & \dots & +13 & \dots & +20 \\ ..0 & \dots & +2/3 & \dots & -1 & \dots & +16 & \dots & +35/3 & \dots & +44/3 \\ ..0 & \dots & 0 & \dots & -5 & \dots & +2 & \dots & -7 & \dots & -10 \end{array} \right) \quad (16.59)$$

Шаг 2. Образовать 2-й нулевой столбец в строках 3 и 4 (16.59). При этом в примере для строки 4 нет необходимости в преобразованиях, поскольку в ней на второй позиции уже имеется ноль. В связи с этим достаточно преобразовать только 3-ю строку. Для этого умножим ее на (-12)

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} +4 & \dots & -2 & \dots & +3 & \dots & -2 & \dots & +1 & \dots & +4 \\ ..0 & \dots & +8 & \dots & -1 & \dots & 0 & \dots & +13 & \dots & +20 \\ ..0 & \dots & -8 & \dots & +12 & \dots & -40 & \dots & -140 & \dots & -176 \\ ..0 & \dots & 0 & \dots & -5 & \dots & +2 & \dots & -7 & \dots & -10 \end{array} \right) \quad (16.60)$$



и сложим полученную строку со 2-й строкой той же матрицы:

$$\begin{pmatrix} +4 \dots -2 \dots +3 \dots -2 \dots \dots \dots | +1 | \dots \dots \dots +4 \\ ..0 \dots +8 \dots -1 \dots \dots 0 \dots \dots | +13 | \dots \dots +20 \\ ..0 \dots \dots 0 \dots +11 \dots -40 \dots \dots | -127 | \dots -156 \\ ..0 \dots \dots 0 \dots -5 \dots +2 \dots \dots | -7 | \dots -10 \end{pmatrix} \quad (16.61)$$

Шаг 3. Образовать нулевой 3-й столбец (16.61) в строке 4, для чего требуется умножить его на (+2,2)

$$\begin{pmatrix} +4 \dots -2 \dots +3 \dots -2 \dots \dots \dots | +1 | \dots \dots \dots +4 \\ ..0 \dots +8 \dots -1 \dots \dots 0 \dots \dots | +13 | \dots \dots +20 \\ ..0 \dots \dots 0 \dots +11 \dots -40 \dots \dots | -127 | \dots -156 \\ ..0 \dots \dots 0 \dots -11 \dots +4,4 \dots \dots | -15,4 | \dots -22 \end{pmatrix} \quad (16.62)$$

и сложить со строкой 3 этой же матрицы (16.62):

$$\begin{pmatrix} +4 \dots -2 \dots +3 \dots -2 \dots \dots \dots | +1 | \dots \dots \dots +4 \\ ..0 \dots +8 \dots -1 \dots \dots 0 \dots \dots | +13 | \dots \dots +20 \\ ..0 \dots \dots 0 \dots +11 \dots -40 \dots \dots | -127 | \dots -156 \\ ..0 \dots \dots 0 \dots \dots 0 \dots -35,6 \dots \dots | -142,4 | \dots -178 \end{pmatrix} \quad (16.63)$$

В результате система линейных уравнений (16.53) преобразуется к виду:

$$\begin{array}{lcl} 1. & +4k_1 - 2k_2 + 3k_3 - 2k_4 & = +1 \\ 2. & +8k_2 - k_3 & = +13 \\ 3. & +11k_3 - 40k_4 & = -127 \\ 4. & -35,6k_4 & = -142,4 \end{array} \quad (16.64)$$

Из уравнения 4 (16.64) находим  $k_4 = +4$ . Из уравнения 3 подстановкой в него значения  $k_4$  находим  $k_3 = +3$ . Из уравнения 2 подстановкой  $k_3$  (коэффициент при  $k_4$  равен нулю) находим  $k_2 = +2$ . Из уравнения 1, после подстановки

значений  $k_2$ ,  $k_3$  и  $k_4$ , находим  $k_1 = +1$ . Т.е. те же значения, что и при решении способом последовательной подстановки, рассмотренном в 151.1.

В качестве замечаний к решению систем линейных уравнений необходимо указать следующее. При уравнивании значения коэффициентов и свободных членов системы линейных уравнений часто являются не целыми числами, а дробными. В связи с этим рекомендуется величины весов и обратных весов округлять до 0,01 – 0,001 ед., значения коэффициентов при неизвестных округлять до 0,0001 ед., получаемые значения неизвестных округлять до 0,001 – 0,0001 ед. При этом, как указывалось выше, поправки в углы часто округляют до 0,1" – 0,01", в расстояния (приращения координат) – до 1 мм, в превышения – до 0,1 – 1,0 мм.

### 151.3. Решение систем линейных уравнений по алгоритму Гаусса

В основе алгоритма Гаусса лежит метод последовательного исключения неизвестных, рассмотренный выше. Алгоритм весьма прост вследствие простых однотипных действий на каждом последующем шаге вычислений. При этом обеспечивается надежный контроль промежуточных результатов. Кроме того, алгоритм Гаусса упрощает решение систем линейных уравнений при введении в них дополнительных граф, необходимых для вычисления весов уравненных элементов или их функций (об этом будет сказано позже).

Алгоритм Гаусса рассмотрим на примере системы четырех линейных уравнений вида:

$$\begin{aligned} N_{11}z_1 + N_{12}z_2 + N_{13}z_3 + N_{14}z_4 + L_1 &= 0 \\ N_{21}z_1 + N_{22}z_2 + N_{23}z_3 + N_{24}z_4 + L_2 &= 0 \\ N_{31}z_1 + N_{32}z_2 + N_{33}z_3 + N_{34}z_4 + L_3 &= 0 \\ N_{41}z_1 + N_{42}z_2 + N_{43}z_3 + N_{44}z_4 + L_4 &= 0 \end{aligned} \quad (16.65)$$

Укажем, что в этой системе линейных уравнений, составленных при решении задачи уравнивания, коэффициенты с одинаковыми двойными индексами являются квадратичными (диагональными). Диагональные коэффициенты по условию их получения при составлении условных линейных уравнений всегда положительные. Коэффициенты, имеющие обратные индексы, равны между собой. В связи с симметрией коэффициентов относительно диагональных таблицу коэффициентов обычно *записывают сокращенно* в таком виде:

$$\begin{array}{ccccccc} N_{11} & \dots & N_{12} & \dots & N_{13} & \dots & N_{14} \\ \dots & & N_{22} & \dots & N_{23} & \dots & N_{24} \\ \dots & & \dots & & N_{33} & \dots & N_{34} \\ \dots & & \dots & & \dots & & N_{44} \end{array}, \quad (16.66)$$

имея в виду наличие и симметричных коэффициентов на незаполненных местах.

Составим т.н. *элиминационное уравнение*, которое в алгоритме Гаусса обозначают буквой Е. Это уравнение представляет собой выражение первого неизвестного  $z_1$  через остальные (уравнение  $E_1$ ):

$$z_1 = -\frac{N_{12}}{N_{11}}z_2 - \frac{N_{13}}{N_{11}}z_3 - \frac{N_{14}}{N_{11}}z_4 - \frac{L_1}{N_{11}} \quad (16.67)$$

Как выполнялось в методе подстановки, получим новую систему линейных уравнений без неизвестного  $z_1$ :

$$\begin{aligned} (N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}})z_2 + (N_{23} - \frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}})z_3 + (N_{24} - \frac{N_{12}N_{14}}{N_{11}})z_4 + (L_2 - \frac{N_{12}L_1}{N_{11}}) &= 0 \\ (N_{23} - \frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}})z_2 + (N_{33} - \frac{N_{13}N_{13}}{N_{11}})z_3 + (N_{34} - \frac{N_{13}N_{14}}{N_{11}})z_4 + (L_3 - \frac{N_{13}L_1}{N_{11}}) &= 0 \quad (16.68) \\ (N_{24} - \frac{N_{12}N_{14}}{N_{11}})z_2 + (N_{34} - \frac{N_{13}N_{14}}{N_{11}})z_3 + (N_{44} - \frac{N_{14}N_{14}}{N_{11}})z_4 + (L_4 - \frac{N_{14}L_1}{N_{11}}) &= 0 \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} N_{22}^{(1)} &= (N_{22} - \frac{N_{12}N_{12}}{N_{11}}) ; \quad N_{23}^{(1)} = (N_{23} - \frac{N_{12}N_{13}}{N_{11}}) ; \quad N_{24}^{(1)} = (N_{24} - \frac{N_{12}N_{14}}{N_{11}}) \\ N_{33}^{(1)} &= (N_{33} - \frac{N_{13}N_{13}}{N_{11}}) ; \quad N_{34}^{(1)} = (N_{34} - \frac{N_{13}N_{14}}{N_{11}}) ; \quad N_{44}^{(1)} = (N_{44} - \frac{N_{14}N_{14}}{N_{11}}) \\ L_2^{(1)} &= (L_2 - \frac{N_{12}L_1}{N_{11}}) ; \quad L_3^{(1)} = (L_3 - \frac{N_{13}L_1}{N_{11}}) ; \quad L_4^{(1)} = (L_4 - \frac{N_{14}L_1}{N_{11}}) \end{aligned}$$

Для полученных коэффициентов сохраняются все особенности системы линейных уравнений с диагональными коэффициентами, имеющими одинаковые двойные индексы (22, 33, 44 и т.д., если уравнений более 4-х). Таким образом, можно записать преобразованную систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} N_{22}^{(1)}z_2 + N_{23}^{(1)}z_3 + N_{24}^{(1)}z_4 + L_2^{(1)} &= 0 \\ N_{32}^{(1)}z_2 + N_{33}^{(1)}z_3 + N_{34}^{(1)}z_4 + L_3^{(1)} &= 0 \\ N_{42}^{(1)}z_2 + N_{43}^{(1)}z_3 + N_{44}^{(1)}z_4 + L_4^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (16.69)$$

Составим второе элиминационное уравнение  $E_2$  :

$$z_2 = - \frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}z_3 - \frac{N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}z_4 - \frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}} \quad (16.70)$$

Подставим значение  $z_2$  в уравнения (16.69):

$$\begin{aligned} (N_{33}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}})z_3 + (N_{34}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}})z_4 + (L_3^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}) &= 0 \\ (N_{43}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}})z_3 + (N_{44}^{(1)} - \frac{N_{24}^{(1)}N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}})z_4 + (L_4^{(1)} - \frac{N_{24}^{(1)}L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}) &= 0 \end{aligned} \quad (65.71)$$

Снова введем обозначения:

$$\begin{aligned} N_{33}^{(2)} &= (N_{33}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}) ; \quad N_{34}^{(2)} = (N_{34}^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}) ; \quad N_{44}^{(2)} = (N_{44}^{(1)} - \frac{N_{24}^{(1)}N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}) ; \\ L_3^{(2)} &= (L_3^{(1)} - \frac{N_{23}^{(1)}L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}) ; \quad L_4^{(2)} = (L_4^{(1)} - \frac{N_{24}^{(1)}L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}) \end{aligned}$$

В результате получим систему линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} N_{33}^{(2)}z_3 + N_{34}^{(2)}z_4 + L_3^{(2)} &= 0 \\ N_{43}^{(2)}z_3 + N_{44}^{(2)}z_4 + L_4^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (16.72)$$

Третье элиминационное уравнение ( $E_3$ ) в этом случае имеет вид:

$$z_3 = - \frac{N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}z_4 - \frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}} \quad (15.73)$$

Подставим значение  $z_3$  в уравнения (16.72), получим

$$(N_{44}^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}})z_4 + (L_4^{(2)} - \frac{N_{34}^{(2)} L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}) = 0 \quad (16.74)$$

Введя в уравнение (16.74) соответствующие обозначения, как и в предыдущих случаях, получим окончательное уравнение с одним неизвестным в обозначениях Гаусса:

$$N_{44}^{(3)} z_4 + L_4^{(3)} = 0 \quad (16.75)$$

Из уравнения (16.75) найдем

$$z_4 = - \frac{L_4^{(3)}}{N_{44}^{(3)}} \quad (16.76)$$

Затем, для определения остальных неизвестных, воспользуемся последовательно элиминационными уравнениями  $E_3$ ,  $E_2$  и  $E_1$ , в результате чего получим значения  $z_3$ ,  $z_2$  и  $z_1$ .

Обратим внимание на то, что для определения неизвестных нужны только элиминационные уравнения. Остальные уравнения не используются.

Представим схему решения системы четырех линейных уравнений в виде таблицы Гаусса (табл. 16.1)

Запись коэффициентов  $N$  в строке (3), (7), (12) сокращенная, только вправо от диагональных коэффициентов. Но контрольная сумма этой строки учитывает все коэффициенты, стоящие слева от диагонального. В первой строке записываются все коэффициенты.

После заполнения с вычислениями и контролем строк (1), (2), (3) и (4), что не требует пояснений, заполняют строку (5). Коэффициенты в этой строке равны сумме (3) и (4) строк по столбцам. По аналогии со строкой (2) получают коэффициенты второго элиминационного уравнения  $E_2$ . В строку (7) заносят в сокращенном виде коэффициенты и свободный(ые) члены третьего нормального уравнения. После вычисления строк (8) и (9) по суммам в столбцах строк (7), (8) и (9) получают коэффициенты строки (10). Все дальнейшие действия аналогичны приведенным выше до вычисления коэффициентов в данном случае последнего элиминационного уравнения  $E_4$ . Коэффициент  $N_{55}$  представляет собой указанную в строке (18) сумму произведений весов на квадраты свободных членов. При суммировании столбца по значениям строк (18) – (22) получают значение  $N_{55}^{(4)} = [pv^2]$ .

Значения неизвестных  $z_i$  получают с помощью элиминационных уравнений:

$$\begin{aligned} z_4 &= - \frac{L_4^{(3)}}{N_{44}^{(3)}} = E_{45} \\ z_3 &= E_{34} z_4 + E_{35} \\ z_2 &= E_{23} z_3 + E_{24} z_4 + E_{25} \\ z_1 &= E_{12} z_2 + E_{13} z_3 + E_{14} z_4 + E_{15} \end{aligned} \quad (16.77)$$

Рассмотрим пример решения системы линейных уравнений по алгоритму Гаусса. Для этого решим систему уравнений (16.53)

$$\begin{aligned} 1. \quad & 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 1 = 0 \\ 2. \quad & -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 - 6 = 0 \end{aligned}$$

$$3. \quad 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 8 = 0$$

$$4. \quad -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 4 = 0$$

Решение уравнений выполним по приведенному выше алгоритму в табл.16.2.

В табл. 16.2 приведен только пример вычисления неизвестных  $x$  без оценки точности (указанные примеры будут рассмотрены отдельно).

Таблица 16.1

№№ п/п	Дейст- вия	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$L$	$\Sigma$
		1	2	3	4	5	6
1	$N_1$	$N_{11}$	$N_{12}$	$N_{13}$	$N_{14}$	$L_1$	$\Sigma_1$
2	$E_1$	- 1	$-\frac{N_{12}}{N_{11}}$	$-\frac{N_{13}}{N_{11}}$	$-\frac{N_{14}}{N_{11}}$	$-\frac{L_1}{N_{11}}$	$\Sigma_{E1}$
3	$N_2$		$N_{22}$	$N_{23}$	$N_{24}$	$L_2$	$\Sigma_2$
4	$E_{12}N$		$E_{12}N_{12}$	$E_{12}N_{13}$	$E_{12}N_{14}$	$E_{12}L_1$	$E_{12}\Sigma_1$
5	$N_2^{(1)}$		$N_{22}^{(1)}$	$N_{23}^{(1)}$	$N_{24}^{(1)}$	$L_2^{(1)}$	$\Sigma_{N2}^{(1)}$
6	$E_2$		- 1	$-\frac{N_{23}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	$-\frac{N_{24}^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	$-\frac{L_2^{(1)}}{N_{22}^{(1)}}$	$\Sigma_{E2}$
7	$N_3$			$N_{33}$	$N_{34}$	$L_3$	$\Sigma_3$
8	$E_{13}N$			$E_{13}N_{13}$	$E_{13}N_{14}$	$E_{13}L_1$	$E_{13}\Sigma_1$
9	$E_{23}N^{(1)}$			$E_{23}N_{23}^{(1)}$	$E_{23}N_{24}^{(1)}$	$E_{23}L_2^{(1)}$	$E_{23}\Sigma_{N2}^{(1)}$
10	$N_3^{(2)}$			$N_{33}^{(2)}$	$N_{34}^{(2)}$	$L_3^{(2)}$	$\Sigma_{N3}^{(2)}$
11	$E_3$			- 1	$-\frac{N_{34}^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$	$-\frac{L_3^{(2)}}{N_{33}^{(2)}}$	$\Sigma_{E3}$
12	$N_4$				$N_{44}$	$L_4$	$\Sigma_4$
13	$E_{14}N$				$E_{14}N_{14}$	$E_{14}L_1$	$E_{14}\Sigma_1$
14	$E_{24}N^{(1)}$				$E_{24}N_{24}^{(1)}$	$E_{24}L_2^{(1)}$	$E_{24}\Sigma_{N2}^{(1)}$
15	$E_{34}N^{(2)}$				$E_{34}N_{34}^{(2)}$	$E_{34}L_3^{(2)}$	$E_{34}\Sigma_{N3}^{(2)}$
16	$N_4^{(3)}$				$N_{44}^{(3)}$	$L_4^{(3)}$	$\Sigma_{N4}^{(3)}$
17	$E_4$				- 1	$-\frac{L_4^{(3)}}{N_{44}^{(3)}}$	$\Sigma_{E4}$
18	$N_5$					$[pll]$	$\Sigma_5$
19	$E_{15}N$					$E_{15}L_1$	$E_{15}\Sigma_1$
20	$E_{25}N^{(1)}$					$E_{25}L_2^{(1)}$	$E_{25}\Sigma_{N2}^{(1)}$
21	$E_{35}N^{(2)}$					$E_{35}L_3^{(2)}$	$E_{35}\Sigma_{N3}^{(2)}$
22	$E_{45}N^{(3)}$					$E_{45}L_4^{(3)}$	$E_{45}\Sigma_{N4}^{(3)}$
23	$N_5^{(4)}$					$N_{55}^{(4)}$	$\approx [pv^2]$

Таким образом, значение  $x_4 = E_{45} = +3,999 \approx +4$ .

$x_3 = +3,639 * (+3,999) - 11,553 = +2,999 \approx +3$ .

$$x_2 = +0,125 * (+2,999) + 0 + 1,625 = +2.$$

$$x_1 = +0,5 * (+2) - 0,75 * (+3) + 0,5 * (+4) + 0,25 = +1.$$

Получены такие же ответы, как и при других способах решения указанного уравнения.

Незначительные отклонения от значений вызваны необходимостью округлений промежуточных результатов вычислений.

Таблица 16.2

№№ п/п	Дейст- вия	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$L$	$\Sigma$
		1	2	3	4	5	6
1	$N_1$	+4	-2	+3	-2	-1	+2
2	$E_1$	-1	+0,5	-0,75	+0,5	+0,25	-0,5 (-0,5)
3	$N_2$		+5	-2	+1	-6	-4
4	$E_{12}N$		-1	+1,5	-1	-0,5	+1,0 (+1,0)
5	$N_2^{(1)}$		+4	-0,5	0	-6,5	-3
6	$E_2$		-1	+0,125	0	+1,625	+0,75
7	$N_3$			+3	-4	+8	+8
8	$E_{13}N$			-2,25	+1,5	+0,75	-1,5 (-1,5)
9	$E_{23}N^{(1)}$			-0,063	0	-0,813	-0,375
10	$N_3^{(2)}$			+0,687	-2,5	+7,937	+6,125(+6,124)
11	$E_3$			-1	+3,639	-11,553	-8,916
12	$N_4$				+2	+4	+1
13	$E_{14}N$				-1	-0,5	+1
14	$E_{24}N^{(1)}$				0	0	0
15	$E_{34}N^{(2)}$				-9,098	+28,883	+22,289(+22,285)
16	$N_4^{(3)}$				-8,098	+32,383	+24,289(+24,285)
17	$E_4$				-1	+3,999	+2,999

#### 151.4. Способ краковянов

Способ заключается в том, что в расчетах без промежуточных записей получают коэффициенты эквивалентной системы, деленные на корень квадратный из квадратичных (диагональных) коэффициентов этих уравнений. Соответствующие строки  $K_i$  в таблице расчетов называют *краковянами*. При ведении расчетов на микрокалькуляторе в последовательности действий используется часто последнее число на его регистре. Часть промежуточных числовых значений заносится в память МК и, при необходимости, вызывается из нее. Все действия по расчету краковянов однотипные и сопровождаются надежным контролем.

Приведем общий случай решения четырех линейных уравнений (16.65):

$$N_{11}z_1 + N_{12}z_2 + N_{13}z_3 + N_{14}z_4 + L_1 = 0$$

$$N_{21}z_1 + N_{22}z_2 + N_{23}z_3 + N_{24}z_4 + L_2 = 0$$

$$N_{31}z_1 + N_{32}z_2 + N_{33}z_3 + N_{34}z_4 + L_3 = 0$$

$$N_{41}z_1 + N_{42}z_2 + N_{43}z_3 + N_{44}z_4 + L_4 = 0$$

Алгоритм расчетов покажем в виде формул и сопровождения действий записями в таблице (табл. (16.3) ).

В строки  $N$  таблицы записывают значения коэффициентов, свободных членов и сумм с обратным знаком, кроме диагонального коэффициента (однако при составлении сумм принимают во внимание, что и диагональный коэффициент имеет знак «минус»). Кроме того, при суммировании по строкам  $N$  используют все коэффициенты уравнения (они находятся выше по столбцу, в котором записан диагональный коэффициент).

Таблица 16.3

Строки	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$L$	$\Sigma$	Контроль $\Sigma$
	1	2	3	4	5	6	7
$N_1$	$N_{11}$	$-N_{12}$	$-N_{13}$	$-N_{14}$	$-L_1$	$-\Sigma_1$	
$N_2$		$N_{22}$	$-N_{23}$	$-N_{24}$	$-L_2$	$-\Sigma_2$	
$N_3$			$N_{33}$	$-N_{34}$	$-L_3$	$-\Sigma_3$	
$N_4$				$N_{44}$	$L_4$	$-\Sigma_4$	
$K_1$	$\sqrt{N_{11}}$ ( $K_{11}$ )	$\frac{-N_{12}}{K_{11}}$ ( $K_{12}$ )	$\frac{-N_{13}}{K_{11}}$ ( $K_{13}$ )	$\frac{-N_{14}}{K_{11}}$ ( $K_{14}$ )	$\frac{-L_1}{K_{11}}$ ( $K_{15}$ )	$-\Sigma_{K1}$ ( $K_{16}$ )	$\frac{-\Sigma_1}{K_{11}}$
$K_2$		$\sqrt{N_{22}^{(1)}}$ ( $K_{22}$ )	$\frac{-N_{23}^{(1)}}{K_{22}}$ ( $K_{23}$ )	$\frac{-N_{24}^{(1)}}{K_{22}}$ ( $K_{24}$ )	$\frac{-L_2^{(1)}}{K_{22}}$ ( $K_{25}$ )	$-\Sigma_{K2}$ ( $K_{26}$ )	$\frac{-\Sigma_2}{K_{22}}$
$K_3$			$\sqrt{N_{33}^{(2)}}$ ( $K_{33}$ )	$\frac{-N_{34}^{(2)}}{K_{33}}$ ( $K_{34}$ )	$\frac{-L_3^{(2)}}{K_{33}}$ ( $K_{35}$ )	$-\Sigma_{K3}$ ( $K_{36}$ )	$\frac{-\Sigma_3}{K_{33}}$
$K_4$				$\sqrt{N_{44}^{(3)}}$ ( $K_{44}$ )	$\frac{-N_{45}^{(3)}}{K_{44}}$ ( $K_{45}$ )	$-\Sigma_{K4}$ ( $K_{46}$ )	$\frac{-\Sigma_4}{K_{44}}$

Порядок вычислений.

Строка  $K_i$ . Получение краковянов данной строки затруднений не вызывает.

Внимание! Во всех строках  $K$ , с целью своевременного выявления погрешностей в расчетах, обязательным является вычисление контрольной суммы краковянов по строке, придавая значениям  $K_{ii}$  знак «минус».

Строка  $K_2$ .

$$N_{22}^{(1)} = N_{22} - K_{12}^2 ; \dots \dots \dots K_{22} = \sqrt{N_{22}^{(1)}}$$

$$-N_{23}^{(1)} = -N_{23} + K_{12}K_{13} ; \dots \dots \dots K_{23} = \frac{-N_{23}^{(1)}}{K_{22}}$$

$$-N_{24}^{(1)} = -N_{24} + K_{12}K_{14} ; \dots \dots \dots K_{24} = \frac{-N_{24}^{(1)}}{K_{22}}$$

$$\begin{aligned}
 -L_2^{(1)} &= -L_2 + K_{12}K_{15}; \dots\dots\dots K_{25} = \frac{-L_2^{(1)}}{K_{22}} \\
 -\sum_{K_2} &= -\sum_2 + K_{12}K_{16}; \dots\dots\dots K_{26} = \frac{-\sum_{K_2}}{K_{22}} \text{ (Контроль!)}
 \end{aligned}$$

Строка  $K_3$ .

$$\begin{aligned}
 N_{33}^{(2)} &= N_{33} - K_{13}^2 - K_{23}^2; \dots\dots\dots K_{33} = \sqrt{N_{33}^{(2)}} \\
 -N_{34}^{(2)} &= -N_{34} + K_{13}K_{14} + K_{23}K_{24}; \dots\dots\dots K_{34} = \frac{-N_{34}^{(2)}}{K_{33}} \\
 -L_3^{(2)} &= -L_3 + K_{13}K_{15} + K_{23}K_{25}; \dots\dots\dots K_{35} = \frac{-L_3^{(2)}}{K_{33}} \\
 -\sum_{K_3} &= -\sum_3 + K_{13}K_{16} + K_{23}K_{26}; \dots\dots\dots K_{36} = \frac{-\sum_{K_3}}{K_{33}} \text{ (Контроль!)}
 \end{aligned}$$

Строка  $K_4$ .

$$\begin{aligned}
 N_{44}^{(3)} &= N_{44} - K_{14}^2 - K_{24}^2 - K_{34}^2; \dots\dots\dots K_{44} = \sqrt{N_{44}^{(3)}} \\
 -L_4^{(3)} &= -L_4 + K_{14}K_{15} + K_{24}K_{25} + K_{34}K_{35}; \dots\dots\dots K_{45} = \frac{-L_4^{(3)}}{K_{44}} \\
 -\sum_{K_4} &= -\sum_4 + K_{14}K_{16} + K_{24}K_{26} + K_{34}K_{36}; \dots\dots\dots K_{46} = \frac{-\sum_{K_4}}{K_{44}} \text{ (Контроль!)}
 \end{aligned}$$

Если бы исходных уравнений было больше, то вычисления продолжались бы по указанному алгоритму. Для четырех же уравнений составление таблицы расчетов закончено. Теперь можно определить значения неизвестных.

$$\begin{aligned}
 z_4 &= \frac{K_{45}}{K_{44}} \\
 z_3 &= \frac{K_{34}z_4 + K_{35}}{K_{33}} \\
 z_2 &= \frac{K_{23}z_3 + K_{24}z_4 + K_{25}}{K_{22}} \\
 z_1 &= \frac{K_{12}z_2 + K_{13}z_3 + K_{14}z_4 + K_{15}}{K_{11}}
 \end{aligned} \tag{16.78}$$

Как видим, дальше производится подстановка  $z$  в «элиминационные» уравнения краковянов.

Контроль вычисления неизвестных осуществляется подстановкой их значений в исходные уравнения.

Для иллюстрации способа краковянов решим систему линейных уравнений вида

$$\begin{aligned}
 1. \quad & 9,16 z_1 - 2,46 z_2 + 0,56 z_3 + 1,77 z_4 + 0,34 = 0 \\
 2. \quad & -2,46 z_1 + 4,74 z_2 + 0,23 z_3 + 1,40 z_4 + 0,12 = 0 \\
 3. \quad & 0,56 z_1 + 0,23 z_2 + 5,21 z_3 - 3,46 z_4 - 1,78 = 0 \\
 4. \quad & 1,77 z_1 + 1,40 z_2 - 3,46 z_3 + 8,07 z_4 + 1,81 = 0
 \end{aligned} \tag{16.79}$$



Составим таблицу 16.4.

$$K_{11} = \sqrt{9,16} = 3,027$$

$$K_{12} = 2,46 / 3,027 = +0,813 \text{ и т.д.}$$

$$N_{22}^{(1)} = 4,74 - 0,813^2 = 4,079; \dots\dots\dots K_{22} = \sqrt{4,079} = 2,020$$

$$- N_{23}^{(1)} = -0,23 + 0,813(-0,185) = -0,380; \dots\dots\dots K_{23} = (-0,380) / 2,020 = -0,188$$

$$- N_{24}^{(1)} = -1,40 + 0,813(-0,585) = -1,876; \dots\dots\dots K_{24} = (-1,876) / 2,020 = -0,929$$

$$- L_2^{(1)} = -0,12 + 0,813(-0,112) = -0,211; \dots\dots\dots K_{25} = (-0,211) / 2,020 = -0,104$$

Таблица 16.4

Строки	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$L$	$\Sigma$	Контроль
	1	2	3	4	5	6	7
$N_1$	9,16	+2,46	-0,56	-1,77	-0,34	-9,37	
$N_2$		4,74	-0,23	-1,40	-0,12	-4,03	
$N_3$			5,21	+3,46	+1,78	-0,76	
$N_4$				8,07	-1,81	-9,59	
$K_1$	3,027	+0,813	-0,185	-0,585	-0,112	-3,095	-3,096
$K_2$		2,020	-0,188	-0,929	-0,104	-3,241	-3,241
$K_3$			2,267	+1,651	+0,803	+0,186	+0,187
$K_4$				2,034	-0,158	-2,193	-2,192
$z_i$	-0,052	-0,043	+0,297	-0,078			

$$- \sum_{K_2} = -4,03 + 0,813(-3,095) = -6,546; \dots\dots\dots K_{26} = (-6,546) / 2,020 = -3,241$$

Контроль:  $-2,020 - 0,188 - 0,929 - 0,104 = -3,241$ .

$$N_{33}^{(2)} = 5,21 - 0,185^2 - 0,188^2 = 5,140; \dots\dots\dots K_{33} = \sqrt{5,140} = 2,267$$

$$- N_{34}^{(2)} = 3,46 + (-0,185)(-0,585) + (-0,188)(-0,929) = 3,743; \dots\dots K_{34} = 3,743 / 2,267 = +1,651$$

$$- L_3^{(2)} = 1,78 + (-0,185)(-0,112) + (-0,188)(-0,104) = +1,820; \dots\dots K_{35} = 1,820 / 2,267 = +0,803$$

$$- \sum_{K_3} = -0,76 + (-0,185)(-3,095) + (-0,188)(-3,241) = +0,422; K_{36} = 0,422 / 2,267 = +0,186$$

Контроль:  $-2,267 + 1,651 + 0,803 = +0,187$ .

$$N_{44}^{(3)} = 8,07 - 0,585^2 - 0,929^2 - 1,651^2 = 4,139; \dots\dots\dots K_{44} = \sqrt{4,139} = 2,034$$

$$- L_4^{(3)} = -1,81 + (-0,585)(-0,112) + (-0,929)(-0,104) + (+1,651)(+0,803) = -0,321$$

$$K_{45} = (-0,321) / 2,034 = -0,158$$

$$- \sum_{K_4} = -9,59 + (-0,585)(-3,095) + (-0,929)(-3,241) + (+1,651)(+0,186) = -7,397$$

$$K_{46} = -7,397 / 2,034 = -2,193$$

Контроль:  $-2,034 - 0,158 = -2,192$ .

Вычисляем значения неизвестных:

$$z_4 = \frac{-0,158}{2,034} = -0,078$$

$$z_3 = \frac{0,803 + 1,651(-0,078)}{2,267} = +0,297$$

$$z_2 = \frac{-0,104 + (-0,188)(+0,297) + 9 - 0,929(-0,078)}{2,020} = -0,043$$

$$z_1 = \frac{-0,112 + 0,813(-0,043) + (-0,185)(+0,297) + (-0,585)(-0,078)}{3,027} = -0,052$$





Развернутый вид коэффициентов  $[qa_1a_1], [qa_1a_2], \dots, [qa_ra_r]$ , в которых индекс при коэффициентах  $a$  – это второй индекс коэффициентов условных уравнений поправок:

Таблица 16.5

$i$	1	2	3	...	$i$	...	$n$
$j$							
1	$a_{11}$	$a_{21}$	$a_{31}$	...	$a_{i1}$	...	$a_{n1}$
2	$a_{12}$	$a_{22}$	$a_{32}$	...	$a_{i2}$	...	$a_{n2}$
3	$a_{13}$	$a_{23}$	$a_{33}$	...	$a_{i3}$	...	$a_{n3}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$j$	$a_{1j}$	$a_{2j}$	$a_{3j}$	...	$a_{jj}$	...	$a_{nj}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$r$	$a_{1r}$	$a_{2r}$	$a_{3r}$	...	$a_{jr}$	...	$a_{nr}$
$q_i$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	...	$q_i$	...	$q_n$

$$\begin{aligned}
[qa_1a_1] &= b_{11} = q_1a_{11}a_{11} + q_2a_{21}a_{21} + q_3a_{31}a_{31} + \dots + q_na_{n1}a_{n1} \\
[qa_1a_2] &= b_{12} = q_1a_{11}a_{12} + q_2a_{21}a_{22} + q_3a_{31}a_{32} + \dots + q_na_{n1}a_{n2} \\
[qa_1a_3] &= b_{13} = q_1a_{11}a_{13} + q_2a_{21}a_{23} + q_3a_{31}a_{33} + \dots + q_na_{n1}a_{n3} \\
&\dots\dots\dots \\
[qa_2a_1] &= b_{21} = q_1a_{12}a_{11} + q_2a_{22}a_{21} + q_3a_{32}a_{31} + \dots + q_na_{n2}a_{n1} \\
[qa_2a_2] &= b_{22} = q_1a_{12}a_{12} + q_2a_{22}a_{22} + q_3a_{32}a_{32} + \dots + q_na_{n2}a_{n2} \\
[qa_2a_3] &= b_{23} = q_1a_{12}a_{13} + q_2a_{22}a_{23} + q_3a_{32}a_{33} + \dots + q_na_{n2}a_{n3} \\
&\dots\dots\dots \\
[qa_ra_r] &= b_{rr} = q_1a_{1r}a_{1r} + q_2a_{2r}a_{2r} + q_3a_{3r}a_{3r} + \dots + q_na_{nr}a_{nr}
\end{aligned}
\tag{16.90}$$

Рассмотрим подробнее принцип вычисления коэффициентов  $b_{jj}$  при коррелатах  $k_j$  в нормальных уравнениях коррелат.

**1-е уравнение коррелат.**

Коэффициент при  $k_1$  равен сумме произведений обратных весов и квадратов коэффициентов первой строки матрицы.

Коэффициент при  $k_2$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов 1-й и 2-й строк матрицы.

Коэффициент при  $k_3$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов 1-й и 3-й строк матрицы и т.д.

Коэффициент при  $k_j$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов 1-й и  $j$ -й строк матрицы и т.д.

Коэффициент при  $k_r$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов 1-й и  $r$ -й строк матрицы.

### 2-е уравнение коррелат.

Коэффициент при  $k_l$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов 2-й и 1-й строк матрицы.

Коэффициент при  $k_2$  равен сумме произведений обратных весов и квадратов коэффициентов 2-й строки матрицы.

Коэффициент при  $k_3$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов 2-й и 3-й строк матрицы и т.д.

.....  
Коэффициент при  $k_j$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов 2-й и  $j$ -й строк матрицы и т.д.

.....  
Коэффициент при  $k_r$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов 2-й и  $r$ -й строк матрицы.

**3-е уравнение коррелат.**

Коэффициент при  $k_1$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов 3-й и 1-й строк матрицы.

Коэффициент при  $k_2$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов 3-й и 2-й строк матрицы.

Коэффициент при  $k_3$  равен сумме произведений обратных весов и квадратов коэффициентов 3-й строки матрицы и т.д.

.....  
Коэффициент при  $k_j$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов 3-й и  $j$ -й строк матрицы и т.д.

.....  
Коэффициент при  $k_r$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов 3-й и  $r$ -й строк матрицы.

.....  
 **$j$ -е уравнение коррелат.**

Коэффициент при  $k_1$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов  $j$ -й и 1-й строк матрицы.

Коэффициент при  $k_2$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов  $j$ -й и 2-й строк матрицы.

Коэффициент при  $k_3$  равен сумме произведений обратных весов и квадратов коэффициентов  $j$ -й и 3-й строк матрицы и т.д.

.....  
Коэффициент при  $k_j$  равен сумме произведений обратных весов и квадратов коэффициентов  $j$ -й строки матрицы.

Коэффициент при  $k_{j+1}$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов  $j$ -й и  $(j+1)$ -й строк матрицы и т.д.

.....  
Коэффициент при  $k_r$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов  $j$ -й и  $r$ -й строк матрицы.

**$r$ -е уравнение коррелат.**

Коэффициент при  $k_1$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов  $r$ -й и 1-й строк матрицы.

Коэффициент при  $k_2$  равен сумме произведений обратных весов и коэффициентов  $r$ -й и 2-й строк матрицы.





Если условные уравнения изначально существенно нелинейны и при разложении в ряд Тейлора, вообще говоря, недостаточно ограничиваться первыми членами разложения, то условия (16.9) могут не выполняться. В этом случае производят второе приближение уравнивания, считая уравненные из первого приближения значения  $x_i'$  измеренными, а свободными членами  $W_j$  – остаточные невязки в уравнениях (16.9).

В § 153 рассмотрены примеры уравнивания различных геодезических построений коррелятным способом.

### § 153. Примеры коррелятного способа уравнивания

В этом разделе приводятся примеры уравнивания некоторых геодезических построений. Больше внимание уделено таким построениям, как системы полигонометрических ходов – практически единственного вида построений, используемых в подземных выработках. Такие же системы используются и на земной поверхности, наряду с построениями триангуляционных сетей, вставок в угол, геодезических четырехугольников и т.п. В примерах рассматривается алгоритм решения задачи уравнивания для разных вариантов геодезических построений со сравнительно небольшим числом измеренных величин, как это часто имеет место, например, в практике геодезических и маркшейдерских работ на земной поверхности при создании опорных сетей, либо в горных выработках при обработке результатов измерений в системах полигонометрических ходов. Уравнивание систем нивелирных ходов обычно производится при точных и высокоточных измерениях, например, при наблюдениях за деформациями горных выработок и наземных сооружений, что тоже имеет место и в практике маркшейдерских работ.

#### 153.1. Уравнивание углов в полигоне

В полигоне, состоящем из четырех вершин (рис. 16.7), неравноточно измерены горизонтальные углы:  $A = \beta_1$ ,  $B = \beta_2$ ,  $C = \beta_3$ ,  $D = \beta_4$  (табл. 16.6).

Выполнить уравнивание углов без учета измерения длин сторон.

Предварительно найдем веса  $p_i$  и обратные веса  $q_i$ , приняв  $s_e = \frac{[s_i]}{4} \approx 645$  м (см. табл. 16.6) без учета величин измеренных углов, считая их практически примерно одинаковыми (значения весов определяются по условию возможной погрешности в направлениях из-за центрирования теодолита; для веса угла применяется правило сложения обратных весов направлений):

$$p_i = s_e^2 \frac{s_1^2 s_2^2}{s_1^2 + s_2^2} = \frac{1}{q_i}, \quad (16.93)$$

где  $s_1$  и  $s_2$  – стороны, образующие данный угол.

Шаг 1. Общее число измеренных величин  $n = 4$ , число необходимых измерений  $k = 3$ , число избыточных измерений  $r = 1$ .



Шаг 2. Составим условное уравнение (условие сумм углов полигона).

$$\beta_1' + \beta_2' + \beta_3' + \beta_4' - 360^0 = 0$$

Всего одно уравнение, поскольку  $r = 1$ .

Шаг 3. Приводим условное уравнение к линейному виду, для чего продифференцируем его и найдем частные производные функции по аргументам  $\beta_i$ . Очевидно, что

$$a_{11} = +1, \quad a_{21} = +1, \quad a_{31} = +1, \quad a_{41} = +1.$$

Составим матрицу коэффициентов  $a_{ij}$  со строкой обратных весов  $q_i$  (таблица 16.7).

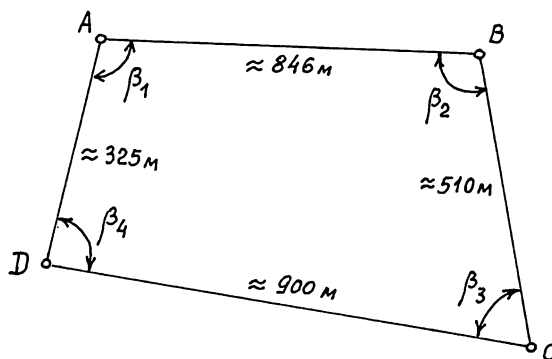


Рис. 16.7. Уравнивание углов в полигоне

Таблица 16.6

Обозначение	Значение угла	Вес $p_i$	Обратный вес $q_i$
$\beta_1$	$80^0 16' 44,3''$	0,221	4,520
$\beta_2$	$91^0 45' 00,7''$	0,459	2,181
$\beta_3$	$69^0 25' 56,8''$	0,473	2,113
$\beta_4$	$118^0 32' 25,2''$	0,225	4,452

Таблица 16.7

$i \rightarrow$ $j \downarrow$	1	2	3	4
1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
$p_i$	0,221	0,459	0,473	0,225
$q_i$	4,520	2,181	2,113	4,452

Свободный член уравнения

$$W_1 = [\beta_i] - 360^0 = 360^0 00' 07,0'' - 360^0 = + 7''.$$

Шаг 4. Найдем коэффициенты  $b_{ij}$  нормальных уравнений (в данном случае – уравнений коррелат):

$$[qa_1a_1]k_1 + W_1 = 0 \quad (16.94)$$

т.е.

$$(q_1a_{11}^2 + q_2a_{21}^2 + q_3a_{31}^2 + q_4a_{41}^2)k_1 + W_1 = 0 \quad (16.95)$$

Для приведенного примера, с учетом значений  $a_{ij}$  и  $q_i$ ,  $13,266 k_l + 7 = 0$ , откуда  $k_l = -0,528$ .

Шаг 5. Составляем условное уравнение поправок

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + 7'' = 0 \quad (16.96)$$

и формулы для вычисления поправок (с вычислением их значений):

$$v_1 = q_1 a_{11} k_l = 4,520 \cdot (+1) \cdot (-0,528) = -2,387'' = -2,4''$$

$$v_2 = q_2 a_{21} k_l = 2,181 \cdot (+1) \cdot (-0,528) = -1,152'' = -1,2''$$

$$v_3 = q_3 a_{31} k_l = 2,113 \cdot (+1) \cdot (-0,528) = -1,116'' = -1,1''$$

$$v_4 = q_4 a_{41} k_l = 4,452 \cdot (+1) \cdot (-0,528) = -2,351'' = -2,4''$$

Контроль по формуле (15.96): условие выполнено! Отступление при округлениях значений поправок на  $0,1''$  является допустимым.

Шаг 6. Вычисляем уравнинные значения углов:

$$\beta'_1 = 80^\circ 16' 44,3'' - 2,4'' = 80^\circ 16' 41,9'' \quad \beta'_2 = 91^\circ 45' 00,7'' - 1,1'' = 91^\circ 44' 59,6''$$

$$\beta'_3 = 69^\circ 25' 56,8'' - 1,2'' = 69^\circ 25' 55,6'' \quad \beta'_4 = 118^\circ 32' 25,2'' - 2,4'' = 118^\circ 32' 22,8''$$

Контроль: подстановка уравнинных значений углов в уравнение (16.93) – условие выполнено!

Очевидно, что при равноточных измерениях углов для них были бы получены одинаковые поправки, т.е. невязка была бы распределена поровну во все углы.

### 153.2. Уравнивание системы нивелирных ходов с несколькими узловыми точками

На местности пройдена система нивелирных ходов с четырьмя узловыми точками 1, 2, 3 и 4 (рис. 16.8). В результате измерений образовано 9 секций, превышения в которых по указанному направлению приведены непосредственно на схеме. Указаны также высоты исходных реперов  $P_{10}$ ,  $P_{20}$  и  $P_{30}$ . В табл. 16.8 приведены длины ходов в секциях и значения весов и обратных весов превышений в секциях, вычисленные по формулам:

$$p_i = \frac{s_e}{s_i}; q_i = \frac{s_i}{s_e} = \frac{1}{p_i}, \quad (16.97)$$

где  $s_e = \frac{[s_i]}{n} \approx 2 \text{ км}, n = 9$ .

Требуется определить уравнинные значения высот узловых точек.

Шаг 1. Общее число измерений  $n = 9$ , число необходимых измерений  $k = 4$ , число избыточных измерений  $r = 5$ .

Шаг 2. Составим  $r = 5$  условных уравнений:

$$\begin{aligned} 1. h'_1 + h'_3 - h'_2 &= 0 \\ 2. h'_4 + h'_5 - h'_3 &= 0 \\ 3. h'_6 + h'_7 + h'_5 &= 0 \\ 4. h'_7 + h'_8 - h'_9 - (H_{P30} - H_{P20}) &= 0 \\ 5. h'_1 + h'_4 + h'_8 - (H_{P30} - H_{P10}) &= 0 \end{aligned} \quad (16.98)$$

Шаг 3. Приведем условные уравнения к линейному виду, продифференцировав их по аргументам  $h_i$ . Получим коэффициенты  $a_{ij}$  условных уравнений поправок:

$$\begin{aligned} a_{11} &= +1; & a_{31} &= +1; & a_{21} &= -1; \\ a_{42} &= +1; & a_{52} &= +1; & a_{32} &= -1; \\ a_{63} &= +1; & a_{73} &= +1; & a_{53} &= +1; \end{aligned}$$

$$a_{74} = +1; \quad a_{84} = +1; \quad a_{94} = -1; \\ a_{15} = +1; \quad a_{45} = +1; \quad a_{85} = +1.$$

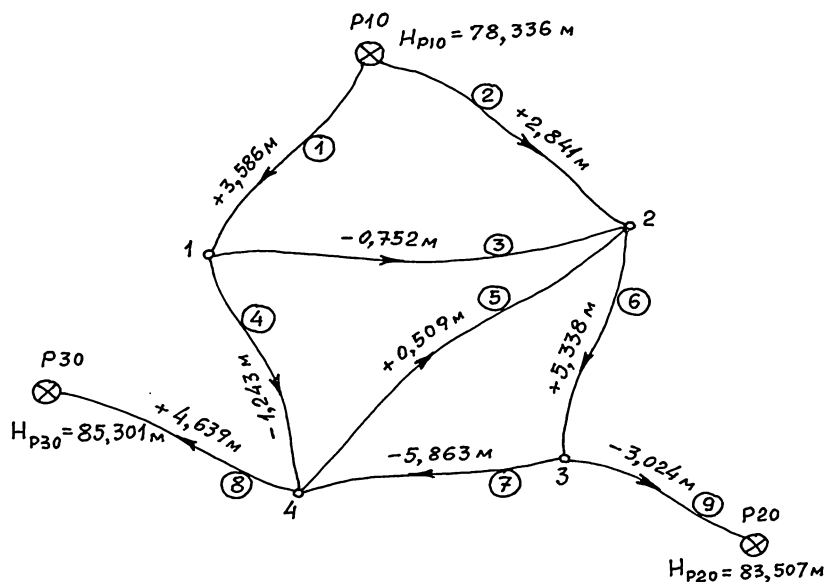


Рис. 16.8. Схема нивелирных ходов с четырьмя узловыми точками

Таблица 16.8

№ секции	Превышение $h$ , мм	Длина хода $s$ в секции, км	Вес $p$ пре- вышения	Обратный вес $q$ пре- вышения
1	+3586	0,84	2,38	0,42
2	+2841	1,36	1,47	0,68
3	-752	2,15	0,93	1,08
4	-1243	0,78	2,56	0,39
5	+509	2,63	0,76	1,32
6	+5338	2,05	0,98	1,03
7	-5863	3,02	0,66	1,51
8	+4639	3,44	0,58	1,72
9	-3024	2,38	0,84	1,19

$$s_e = 2 \text{ км}$$

Составим матрицу коэффициентов  $a_{ij}$  со строкой обратных весов  $q_i$  (табл. 16.9).

Таблица 16.9

$\rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$i \downarrow$									
1	+1	-1	+1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	-1	+1	+1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	+1	+1	+1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	+1	+1	-1
5	+1	0	0	+1	0	0	0	+1	0
$q_i$	0,42	0,68	1,08	0,39	1,32	1,03	1,51	1,72	1,19

Вычислим свободные члены (в мм), подставив в уравнения (16.98)

измеренные значения  $h_i$  в секциях:

$$W_1 = h_1 + h_3 - h_2 = 3586 - 752 - 2841 = -7 \text{ мм}$$

$$W_2 = h_4 + h_5 - h_3 = -1243 + 509 - (-752) = +18 \text{ мм}$$

$$W_3 = h_6 + h_7 + h_5 = 5338 - 5863 + 509 = -16 \text{ мм}$$

$$W_4 = h_7 + h_8 - h_9 - (H_{P30} - H_{P20}) = -5863 + 4639 - (-3024) - 1794 = +6 \text{ мм}$$

$$W_5 = h_1 + h_4 + h_8 - (H_{P30} - H_{P10}) = 3586 - 1243 + 4639 - 6965 = +17 \text{ мм}$$

Шаг 4. Найдем по формулам (16.90) коэффициенты  $b_{ij}$  нормальных уравнений коррелат:

$$\begin{aligned} 1. & (q_1 a_{11}^2 + q_2 a_{21}^2 + q_3 a_{31}^2) k_1 + q_3 a_{31} a_{32} k_2 + q_1 a_{11} a_{15} k_5 + W_1 = 0 \\ 2. & q_3 a_{32} a_{31} k_1 + (q_3 a_{32}^2 + q_4 a_{42}^2 + q_5 a_{52}^2) k_2 + q_5 a_{52} a_{53} k_3 + q_4 a_{42} a_{45} k_5 + W_2 = 0 \\ 3. & q_5 a_{53} a_{52} k_2 + (q_5 a_{53}^2 + q_6 a_{63}^2 + q_7 a_{73}^2) k_3 + q_7 a_{73} a_{74} k_4 + W_3 = 0 \\ 4. & q_7 a_{74} a_{73} k_3 + (q_7 a_{74}^2 + q_8 a_{84}^2 + q_9 a_{94}^2) k_4 + q_8 a_{84} a_{85} k_5 + W_4 = 0 \\ 5. & q_1 a_{15} a_{11} k_1 + q_4 a_{45} a_{42} k_2 + q_8 a_{85} a_{84} k_4 + (q_1 a_{15}^2 + q_4 a_{45}^2 + q_8 a_{85}^2) k_5 + W_5 = 0 \end{aligned} \quad (16.99)$$

После подстановки значений  $a_{ij}$  и  $q_i$  в уравнения (16.99) получим исходные нормальные уравнения коррелат:

$$\begin{aligned} 1. & 2,18 k_1 - 1,08 k_2 + 0,42 k_5 - 7 = 0 \\ 2. & -1,08 k_1 + 2,79 k_2 + 1,32 k_3 + 0,39 k_5 + 18 = 0 \\ 3. & 1,32 k_2 + 3,86 k_3 + 1,51 k_4 - 16 = 0 \\ 4. & 1,51 k_3 + 4,42 k_4 + 1,72 k_5 + 6 = 0 \\ 5. & 0,42 k_1 + 0,39 k_2 + 1,72 k_4 + 2,53 k_5 + 17 = 0 \end{aligned} \quad (16.100)$$

Из решения системы уравнений (16.100) одним из способов получим:

$$k_1 = -2,137; \quad k_2 = -11,552; \quad k_3 = +9,606; \quad k_4 = -3,882; \quad k_5 = -1,945.$$

Контроль вычисления коррелат выполняем подстановкой их значений в исходные уравнения (16.100):

$$\begin{aligned} 1. & 2,18(-2,137) - 1,08(-11,552) + 0,42(-1,945) - 7 = +0,001 \\ 2. & -1,08(-2,137) + 2,79(-11,552) + 1,32(+9,606) + 0,39(-1,945) + 18 = -0,001 \\ 3. & 1,32(-11,552) + 3,86(+9,606) + 1,51(-3,882) - 16 = -0,031 \\ 4. & 1,51(+9,606) + 4,42(-3,882) + 1,72(-1,945) + 6 = +0,001 \\ 5. & 0,42(-2,137) + 0,39(-11,552) + 1,72(-3,882) + 2,53(-1,945) + 17 = -0,001 \end{aligned}$$

Сравнительно **большее** невыполнение условия мы видим в уравнении 3. Это вызвано погрешностями округлений. При вычислении с **большими** значащими цифрами этого не наблюдалось бы. При этом результаты вычислений принимаем удовлетворительными, поскольку поправки в измеренные значения превышений для данных условий будут в дальнейшем округляться до 1 мм, а вычисления проведены с большим запасом точности.

Шаг 5. Составляем условные уравнения поправок  $v_i$ , пользуясь формулами (16.88) и табл. 16.9:

$$\begin{aligned} 1. v_1 &= q_1 a_{11} k_1 + q_1 a_{15} k_5 & 6. v_6 &= q_6 a_{63} k_3 \\ 2. v_2 &= q_2 a_{21} k_1 & 7. v_7 &= q_7 a_{73} k_3 + q_7 a_{74} k_4 \\ (16.101) & & & \\ 3. v_3 &= q_3 a_{31} k_1 + q_3 a_{32} k_2 & 8. v_8 &= q_8 a_{84} k_4 + q_8 a_{85} k_5 \\ 4. v_4 &= q_4 a_{42} k_2 + q_4 a_{45} k_5 & 9. v_9 &= q_9 a_{94} k_4 \end{aligned}$$

$$5\nu_5 = q_5 a_{52} k_2 + q_5 a_{53} k_3$$

После подстановки значений  $q_i$ ,  $a_{ij}$  и  $k_j$  в (16.101) получим:

1.  $\nu_1 = 0,42 \cdot 1 \cdot (-2,137) + 0,42 \cdot 1 \cdot (-1,945) = -1,714 = -2 \text{ мм}$
2.  $\nu_2 = 0,68 \cdot (-1) \cdot (-2,137) = +1,453 = +1 \text{ мм}$
3.  $\nu_3 = 1,08 \cdot 1 \cdot (2,137) + 1,08 \cdot (-1) \cdot (-11,552) = +10,168 = +10 \text{ мм}$
4.  $\nu_4 = 0,39 \cdot 1 \cdot (-11,552) + 0,39 \cdot 1 \cdot (-1,945) = -5,264 = -5 \text{ мм}$
5.  $\nu_5 = 1,32 \cdot 1 \cdot (-11,552) + 1,32 \cdot 1 \cdot (+9,606) = -2,569 = -3 \text{ мм}$
6.  $\nu_6 = 1,03 \cdot 1 \cdot (+9,606) = +9,894 = +10 \text{ мм}$
7.  $\nu_7 = 1,51 \cdot 1 \cdot (+9,606) + 1,51 \cdot 1 \cdot (-3,882) = +8,643 = +9 \text{ мм}$
8.  $\nu_8 = 1,72 \cdot 1 \cdot (-3,882) + 1,72 \cdot 1 \cdot (-1,945) = -10,022 = -10 \text{ мм}$
9.  $\nu_9 = 1,19 \cdot (-1) \cdot (-3,882) = +4,620 = +5 \text{ мм}$

Контроль вычисления поправок можно выполнить по формулам (16.98), подставив в них вместо превышений значения поправок (суммы поправок должны быть равны значениям соответствующих невязок с обратным знаком):

1.  $\nu_1 + \nu_3 - \nu_2 = -2 + 10 - 1 = +7 \text{ мм} (= -W_1)$
2.  $\nu_4 + \nu_5 - \nu_3 = -5 - 3 - 10 = -18 \text{ мм} (= -W_2)$
3.  $\nu_6 + \nu_7 + \nu_5 = +10 + 9 - 3 = +16 \text{ мм} (= -W_3)$
4.  $\nu_7 + \nu_8 - \nu_9 = +9 - 10 - 5 = -6 \text{ мм} (= -W_4)$
5.  $\nu_1 + \nu_4 + \nu_8 = -2 - 5 - 10 = -17 \text{ мм} (= -W_5)$

Шаг 6. Вычисляем уравненные значения превышений в секциях и контролируем уравнивание по выполнению условия (16.98):

$$\begin{aligned} h_1' &= +3586 - 2 = +3584 \text{ мм} \\ h_2' &= +2841 + 1 = +2842 \text{ мм} \\ h_3' &= -752 + 10 = -742 \text{ мм} \\ h_4' &= -1243 - 5 = -1248 \text{ мм} \\ h_5' &= +509 - 3 = +506 \text{ мм} \\ h_6' &= +5338 + 10 = +5348 \text{ мм} \\ h_7' &= -5863 + 9 = -5854 \text{ мм} \\ h_8' &= +4639 - 10 = +4629 \text{ мм} \\ h_9' &= -3024 + 5 = -3019 \text{ мм} \end{aligned}$$

Подстановка в уравнения (16.98) подтверждает выполнение указанного условия.

Вычисляем уравненные значения высот узловых точек 1, 2, 3 и 4:

$$\begin{aligned} H_1 &= H_{P10} + h_1' = 78,336 + 3,584 = 81,920 \text{ м} \\ H_2 &= H_{P10} + h_2' = 78,336 + 2,842 = 81,178 \text{ м} \\ H_3 &= H_{P20} - h_3' = 83,507 - (-3,019) = 86,526 \text{ м} \\ H_4 &= H_{P30} - h_8' = 85,301 - 4,629 = 80,672 \text{ м} \end{aligned}$$

Контроль вычислений здесь можно выполнить вторичным получением высот искомых точек по другим направлениям. Должны получиться те же результаты. Например,  $H_1 = H_{P30} - h_8' - h_4' = 85,301 - 4,629 + 1,248 = 81,920 \text{ м}$ .

Задача решена.

### 153.3. Уравнивание полигонометрического хода

На местности пройден одиночный полигонометрический ход (рис. 16.9) между исходными линиями  $AB$  и  $CD$ .

Координаты исходных пунктов  $B$  и  $C$  и дирекционные углы исходных направлений:

$$X_B = 8365,344 \text{ м}; X_C = 9592,268 \text{ м}; \alpha_{AB} = 137^\circ 13' 16,4''$$

$$Y_B = 5240,647 \text{ м}; Y_C = 7556,681 \text{ м}; \alpha_{CD} = 100^\circ 58' 45,8''$$

Значения измеренных величин, горизонтальных углов и расстояний, приведены в табл. 16.10.

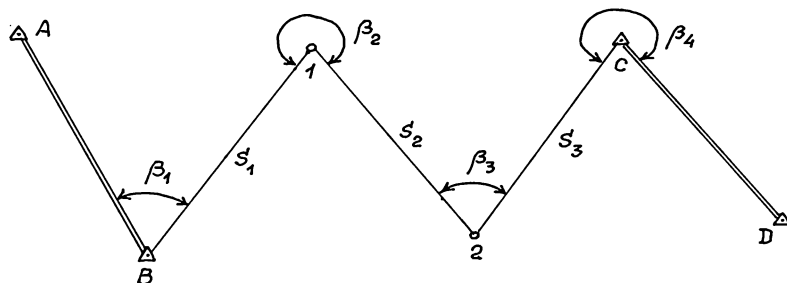


Рис. 16.9. Схема полигонометрического хода

Таблица 16.10

№№ точек	Обозначение горизонтальных углов, $\beta_i$	Значения горизонтальных углов	Обозначение расстояний, $s_i$	Значения расстояний, м
B	$\beta_1$	$112^\circ 36' 45,4''$	$s_1$	1245,638
1	$\beta_2$	$213^\circ 02' 16,8''$	$s_2$	963,017
2	$\beta_3$	$88^\circ 44' 26,7''$	$s_3$	1033,151
C	$\beta_4$	$269^\circ 22' 04,0''$		

Точность результатов измерений:

- горизонтальных углов:  $m_\beta = 2,0''$ ;

- расстояний:  $m_s = 14,5 \text{ мм на } 1000 \text{ м}$ .

Требуется найти уравненные значения координат точек 1 и 2.

Выполним предварительные вычисления в полигонометрическом ходе (см. табл. 16.11), т.е. по результатам измерений вычислим предварительные значения координат точек 1 и 2, а также координаты точки C°.

Вычислим веса  $p_i$  измеренных величин. В полигонометрическом ходе принимаем измерения углов равноточными, т.е.  $p_{\beta_i} = 1$ . Значения средних квадратических погрешностей для измеренных расстояний определим как

$$m_{s_1} = 1,45 \text{ см} \frac{1245,638}{1000} = 1,81 \text{ см}$$

$$m_{s_2} = 1,45 \text{ см} \frac{963,017}{1000} = 1,40 \text{ см}$$

$$m_{s_3} = 1,45 \text{ см} \frac{1033,151}{1000} = 1,50 \text{ см}$$

Значения весов измеренных расстояний определим по формуле, часто используемой в линейно-угловых сетях:

$$p_i = \frac{m_\beta^2}{m_s^2} \quad (16.102)$$

$$p_{s1} = \left( \frac{2,0''}{1,81 \text{ см}} \right)^2 = 1,221; q_{s1} = 0,889$$

$$p_{s2} = \left( \frac{2,0''}{1,40 \text{ см}} \right)^2 = 2,041; q_{s2} = 0,490$$

$$p_{s3} = \left( \frac{2,0''}{1,50 \text{ см}} \right)^2 = 1,778; q_{s3} = 0,562$$

Таблица 16.11

№№ точек	Гориз. углы $\beta$	Дирекц. углы $\alpha$	Расстояния $s$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№3 точек
A		137°13'16,4"						A
B	112°36'45,4"	69°50'01,8"	1245,638	+429,426	+1169,276	8365,344	5240,647	B
1	213°02'16,8"	102°52'18,6"	963,017	-214,532	+938,817	8794,770	6409,923	1
2	88°44'26,7"	11°36'45,3"	1033,151	+1012,003	+207,966	8580,238	7348,740	2
C	269°22'040"	100°58'49,3"				9592,241	7556,706	C°
D								

Присвоим номера измеренным величинам (табл. 16.12).

Таблица 16.12

Обозначение	1	2	3	4	5	6	7
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$s_1$	$s_2$	$s_3$
$p_i$	1	1	1	1	1,221	2,041	1,778
$q_i$	1	1	1	1	0,819	0,490	0,562

Шаг 1. Общее число измерений  $n = 7$ . Число необходимых измерений  $k = 4$  (например, 1, 2, 5 и 6 – табл. 16.12). Число избыточных измерений  $r = 3$ .

Шаг 2. Составим  $r = 3$  условных уравнения:

- условие дирекционных углов:

$$\alpha_{AB} + \sum \beta' - n180^\circ - \alpha_{CD} = 0; \quad (16.103)$$

- условие координат (для абсцисс и ординат):

$$\begin{aligned} x_B + \sum s_i' \cos \alpha_i' - x_C &= 0; \\ y_B + \sum s_i' \sin \alpha_i' - y_C &= 0. \end{aligned} \quad (16.104)$$

Шаг 3. Приведем условные уравнения к линейному виду, для чего продифференцируем данные функции по переменным  $\beta_i$ ,  $s_i$  и  $\alpha_i$  (последние – зависящие от  $\beta_i$ ).

Рассмотрим здесь несколько подробнее процесс получения условных уравнений поправок.

После дифференцирования получим условные уравнения поправок:

- для дирекционных углов (16.27):

$$\sum v_{\beta i} + W_{\beta} = 0,$$

где  $\sum v_{\beta i} = v_{\beta 1} + v_{\beta 2} + v_{\beta 3} + v_{\beta 4}$ ; невязка  $W_{\beta}$  или свободный член уравнения –

$W_{\beta} = \sum \beta_i + \alpha_{AB} - \alpha_{CD} - n180^0 = \alpha_{CD}^0 - \alpha_{CD}$  (здесь  $\alpha_{CD}^0$  – вычисленное значение дирекционного угла из табл. 16.11 в предварительной обработке полигонометрического хода);

- для абсцисс:

$$\sum (v_{si} \cos \alpha_i^0 - v_{ai} s_i \sin \alpha_i^0) + W_x = 0, \quad (16.105)$$

где невязка  $W_x = \sum s_i \cos \alpha_i^0 + x_B - x_C = x_C^0 - x_C$  (здесь  $x_C^0$  – вычисленное значение координаты точки C из предварительной обработки полигонометрического хода, табл. 16.11);

- для ординат:

$$\sum (v_{si} \sin \alpha_i^0 + v_{ai} s_i \cos \alpha_i^0) + W_y = 0, \quad (16.106)$$

где невязка  $W_y = \sum s_i \sin \alpha_i^0 + y_B - y_C = y_C^0 - y_C$  (здесь  $y_C^0$  – вычисленное значение координаты точки C из предварительной обработки полигонометрического хода, табл. 16.11).

Вычислим свободные члены уравнений, пользуясь исходными данными и результатами предварительной обработки полигонометрического хода:

$$W_1 = W_{\beta} = 100^{\circ} 58' 49,3'' - 100^{\circ} 58' 45,8'' = +3,5'';$$

$$W_2 = W_x = 9592,241 - 9592,268 = -0,027 \text{ м} = -2,7 \text{ см};$$

$$W_3 = W_y = 7556,706 - 7556,681 = +0,025 \text{ м} = +2,5 \text{ см}.$$

Поправка  $v_{ai}$  в текущее значение дирекционного угла равна сумме поправок углов  $\beta$ , использующихся для его вычисления, т.е.

$$v_{ai} = \sum v_{\beta i} \quad (16.107)$$

С учетом этого, а также предыдущих выражений, запишем окончательные условные уравнения поправок в общем виде:

$$\begin{aligned} \sum v_{\beta i} + W_{\beta} &= 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sum (y_C^0 - y_i^0) v_{\beta i} + \sum v_{si} \cos \alpha_i^0 + W_x &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \sum (x_C^0 - x_i^0) v_{\beta i} + \sum v_{si} \sin \alpha_i^0 + W_y &= 0, \end{aligned} \quad (16.108)$$

где  $\rho$  – угловая мера радиана.

В уравнениях (16.108) для удобства значения  $1/\rho$  увеличивают в 100000 раз, а разности координат уменьшают в то же число раз, т.е. выражают в километрах.

В развернутом виде уравнения (16.108) для рассматриваемого в примере полигонометрического хода имеют вид:



$$1. v_{\beta 1} + v_{\beta 2} + v_{\beta 3} + v_{\beta 4} + W_{\beta} = 0;$$

$$2. - \frac{1}{\rho} [(y_C^0 - y_B^0) v_{\beta 1} + (y_C^0 - y_1^0) v_{\beta 2} + (y_C^0 - y_2^0) v_{\beta 3}] + \quad (16.109)$$

$$+ (v_{s1} \cos \alpha_{B1}^0 + v_{s2} \cos \alpha_{12}^0 + v_{s3} \cos \alpha_{2C}^0) + W_x = 0;$$

$$3. - \frac{1}{\rho} [(x_C^0 - x_B^0) v_{\beta 1} + (x_C^0 - x_1^0) v_{\beta 2} + (x_C^0 - x_2^0) v_{\beta 3}] + \quad (16.109)'$$

$$+ (v_{s1} \sin \alpha_{B1}^0 + v_{s2} \sin \alpha_{12}^0 + v_{s3} \sin \alpha_{2C}^0) + W_y = 0.$$

Составим таблицу (табл.16.13) значений разностей координат и тригонометрических функций дирекционных углов по данным табл. 16.11, необходимую для вычисления коэффициентов  $a_{ij}$ .

Таблица 16.13

№№ точек	Значения $\sin$ и $\cos$ дирекционных углов		Значения разностей координат, км	
	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$x_C^0 - x_i^0$	$y_C^0 - y_i^0$
B			+1,2269 (B)	+2,3161(B)
1	+0,3447	+0,9387	+0,7975 (1)	+1,1468 (1)
2	- 0,2228	+0,9749	+1,0120 (2)	+0,2080 (2)
C	+0,9795	+0,2013		

С учетом приведенных в табл. 16.13 значений коэффициентов и значений свободных членов получим окончательный вид условных уравнений поправок, соответствующих выражениям (16.109):

$$1. v_{\beta 1} + v_{\beta 2} + v_{\beta 3} + v_{\beta 4} + 3,5'' = 0$$

$$2. - 1,1229 v_{\beta 1} - 0,5560 v_{\beta 2} - 0,1008 v_{\beta 3} + 0,3447 v_{s1} - 0,2228 v_{s2} + 0,9795 v_{s3} - 2,7 = 0$$

$$3. 0,5948 v_{\beta 1} + 0,3866 v_{\beta 2} + 0,4906 v_{\beta 3} + 0,9387 v_{s1} + 0,9749 v_{s2} + 0,2013 v_{s3} + 2,5 = 0 \quad (16.110)$$

Составим матрицу коэффициентов  $a_{ij}$  и обратных весов  $q_i$  (табл. 16.14).

Таблица 16.14

$i \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7
$j \downarrow$							
1	+1	+1	+1	+1	0	0	0
2	+1,1229	-0,5560	-0,1008		+0,3447	-0,2228	+0,9795
3	+0,5948	+0,3866	+0,4906		+0,9387	+0,9749	+0,2013
$q_i$	1	1	1	1	0,819	0,490	0,562

Шаг 4. По правилам и схеме, приведенным выше, вычислим коэффициенты нормальных уравнений коррелат. Сначала представим указанные уравнения коррелат в общем для приводимого примера виде:

$$1. (q_1 a_{11}^2 + q_2 a_{21}^2 + q_3 a_{31}^2 + q_4 a_{41}^2) k_1 + (q_1 a_{11} a_{12} + q_2 a_{21} a_{22} + q_3 a_{31} a_{32}) k_2 + (q_1 a_{11} a_{13} + q_2 a_{21} a_{23} + q_3 a_{31} a_{33}) k_3 + W_1 = 0;$$

$$\begin{aligned}
2. & (q_1 a_{12} a_{11} + q_2 a_{22} a_{21} + q_3 a_{32} a_{31}) k_1 + (q_1 a_{12}^2 + q_2 a_{22}^2 + q_3 a_{32}^2 + q_5 a_{52}^2 + q_6 a_{62}^2 + \\
& q_7 a_{72}^2) k_2 + (q_1 a_{12} a_{13} + q_2 a_{22} a_{23} + q_3 a_{32} a_{33} + q_5 a_{52} a_{53} + q_6 a_{62} a_{63} + q_7 a_{72} a_{73}) k_3 + \\
& + W_2 = 0; \\
3. & (q_1 a_{13} a_{11} + q_2 a_{23} a_{21} + q_3 a_{33} a_{31}) k_1 + (q_1 a_{13} a_{12} + q_2 a_{23} a_{22} + q_3 a_{33} a_{32} + q_5 a_{53} a_{52} + \\
& + q_6 a_{63} a_{62} + q_7 a_{73} a_{72}) k_2 + (q_1 a_{13}^2 + q_2 a_{23}^2 + q_3 a_{33}^2 + q_5 a_{53}^2 + q_6 a_{63}^2 + q_7 a_{73}^2) k_3 + \\
& + W_3 = 0.
\end{aligned}
\tag{16.111}$$

После подстановки значений  $a_{ij}$ ,  $q_i$  и  $W_j$  получим:

$$\begin{aligned}
1. & +4 k_1 - 2,6869 k_2 + 1,4720 k_3 + 3,5 = 0; \\
2. & - 2,6869 k_1 + 3,2469 k_2 - 1,1080 k_3 - 2,7 = 0; \\
3. & 1,4720 k_1 - 1,1080 k_2 + 1,9541 k_3 + 2,5 = 0.
\end{aligned}
\tag{16.112}$$

Из решения системы нормальных линейных уравнений получим:

$$k_1 = -0,4489; k_2 = +0,1722; k_3 = -0,8436.$$

Контрольные вычисления по исходным уравнениям (16.112) удовлетворяют указанным условиям.

Шаг 5. Составим и решим условные уравнения поправок, пользуясь формулами (16.88) и табл. 16.14:

$$\begin{aligned}
1. & v_1 = v_{\beta 1} = q_1 (k_1 - 1,1229 k_2 + 0,5948 k_3) = -1,14'' \approx -1,1''; \\
2. & v_2 = v_{\beta 2} = q_2 (k_1 - 0,5560 k_2 + 0,3866 k_3) = -0,87'' \approx -0,9''; \\
3. & v_3 = v_{\beta 3} = q_3 (k_1 - 1,1080 k_2 + 0,4906 k_3) = -1,05'' \approx -1,1''; \\
4. & v_4 = v_{\beta 4} = q_4 k_1 = -0,45'' \approx -0,4''; \\
5. & v_5 = v_{s1} = q_5 (+0,3447 k_2 + 0,9387 k_3) = -0,60 \text{ см} = -6 \text{ мм}; \\
6. & v_6 = v_{s2} = q_6 (-0,2228 k_2 + 0,9749 k_3) = -0,42 \text{ см} = -4 \text{ мм}; \\
7. & v_7 = v_{s3} = q_7 (+0,9795 k_2 + 0,2013 k_3) = 0,0 \text{ см} = 0 \text{ мм}.
\end{aligned}$$

Контроль выполняется подстановкой полученных значений в уравнения поправок (16.110). Отклонения в приводимом примере от условий можно считать незначительными.

Шаг 6. Вычислим уравниваемые значения измеренных величин, округлив поправки в углы до  $0,1''$ , поправки в длины линий – до 1 мм:

$$\begin{aligned}
\beta'_1 &= 112^\circ 36' 45,4'' - 1,1'' = 112^\circ 36' 44,3'' \\
\beta'_2 &= 213^\circ 02' 16,8'' - 0,9'' = 213^\circ 02' 15,9'' \\
\beta'_3 &= 88^\circ 44' 26,7'' - 1,1'' = 88^\circ 44' 25,6'' \\
\beta'_4 &= 269^\circ 22' 04,0'' - 0,4'' = 269^\circ 22' 03,6'' \\
s'_1 &= 1245,638 - 0,006 = 1245,634 \text{ м} \\
s'_2 &= 963,017 - 0,004 = 963,007 \text{ м} \\
s'_3 &= 1033,151 + 0,000 = 1033,151 \text{ м}
\end{aligned}$$

Составим ведомость уравнивания (табл. 16.15).

Как видно, после уравнивания получились остаточные невязки  $W_x = 9592,259 - 9592,268 = -9 \text{ мм}$ ;  $W_y = 7556,681 - 7556,681 = 0 \text{ мм}$ . Угловая невязка равна нулю. Это является результатом ощутимой нелинейности исходных условных уравнений, т.е. ограничение первым членом разложения функций в ряд Тейлора оказалось недостаточным. В таких случаях выполняют повторное уравнивание, считая полученные после первого уравнивания невязки исходными ( $W_\beta = 0$ ;  $W_x = -0,9 \text{ см}$ ;  $W_y = 0,0 \text{ см}$ ), а вычисления в табл. 16.15 – предварительными.

Только в качестве примера продолжим уравнивание полигонометрического хода вторым приближением. Полученные остаточные невязки в первом приближении практически можно считать допустимыми.

По аналогии с табл. 16.13 должна быть составлена другая таблица. Но, поскольку изменения в синусах и косинусах дирекционных углов и координат

Таблица 16.15

№№ точек	Гориз. углы $\beta$	Дирекц. углы $\alpha$	Расстояния $S$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№3 точек
A		137°13'16,4"						A
B	112°36'44,3"	69°50'00,7"	1245,632	+429,430	+1169,268	8365,344	5240,647	B
1	213°02'15,9"	102°52'16,6"	963,013	-214,522	+938,815	8794,774	6409,915	1
2	88°44'25,6"	11°36'42,2"	1033,151	+1012,007	+207,951	8580,252	7348,730	2
C	269°22'03,6"	100°58'45,8"				9592,259	7556,681	C
D								D

натах после первого уравнивания незначительные, то для составления уравнений поправок (16.109) используем те же коэффициенты, а вместо значений  $W_j$  используем их величины, полученные после первого уравнивания. В результате имеем:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & v_{\beta 1} + v_{\beta 2} + v_{\beta 3} + v_{\beta 4} = 0 \\
 2. \quad & -1,1229 v_{\beta 1} - 0,5560 v_{\beta 2} - 0,1008 v_{\beta 3} + 0,3447 v_{s1} - 0,2228 v_{s2} + 0,9795 v_{s3} - 0,9 = 0 \\
 3. \quad & 0,5948 v_{\beta 1} + 0,3866 v_{\beta 2} + 0,4906 v_{\beta 3} + 0,9387 v_{s1} + 0,9749 v_{s2} + 0,2013 v_{s3} = 0
 \end{aligned}
 \tag{16.115}$$

Таблица коэффициентов  $a_{ij}$  и обратных весов в данном случае имеет тот же вид (табл. 16.14), в связи с чем нормальные уравнения коррелат для второго уравнивания запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & +4 k_1 - 2,6869 k_2 + 1,4720 k_3 = 0; \\
 2. \quad & -2,6869 k_1 + 3,2469 k_2 - 1,1080 k_3 - 0,9 = 0; \\
 3. \quad & 1,4720 k_1 - 1,1080 k_2 + 1,9541 k_3 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{16.116}$$

Из решения полученной системы линейных уравнений:

$$k_1 = +0,4042; \quad k_2 = +0,6307; \quad k_3 = +0,0542.$$

Контроль подстановкой в уравнения (16.116) показывает правильность вычисления коррелат.

Используя формулы (16.114), получим поправки из второго уравнивания и составим ведомость второго уравнивания (табл. 16.16)

$$\begin{aligned}
 1. \quad & v_1 = v_{\beta 1} = q_1(k_1 - 1,1229 k_2 + 0,5948 k_3) \approx -0,2''; \\
 2. \quad & v_2 = v_{\beta 2} = q_2(k_1 - 0,5560 k_2 + 0,3866 k_3) \approx 0,0''; \\
 3. \quad & v_3 = v_{\beta 3} = q_3(k_1 - 1,1080 k_2 + 0,4906 k_3) \approx -0,2''; \\
 4. \quad & v_4 = v_{\beta 4} = q_4 k_1 \approx +0,4''; \\
 5. \quad & v_5 = v_{s1} = q_5(+0,3447 k_2 + 0,9387 k_3) = +2 \text{ мм};
 \end{aligned}$$

$$6. \quad v_6 = v_{s2} = q_6 (-0,2228 k_2 + 0,9749 k_3) = 0 \text{ мм};$$

$$7. \quad v_7 = v_{s3} = q_7 (+0,9795 k_2 + 0,2013 k_3) = 4 \text{ мм}.$$

Остаточные невязки составляют:  $W_\beta = 0$ ;  $W_x = 9592,266 - 9592,268 = -2 \text{ мм}$ ;  $W_y = 7556,683 - 7556,681 = +2 \text{ мм}$ , что является вполне приемлемым.

Таблица 16.16

№№ точек	Гориз. углы $\beta$	Дирекц. углы $\alpha$	Рассто- яния $S$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№3 точек
A		137°13'16,4"						A
B	112°36'44,1"	69°50'00,5"	1245,634	+429,432	+1169,270	8365,344	5240,647	B
1	213°02'15,9"	102°52'16,4"	963,013	-214,521	+938,816	8794,776	6409,917	1
2	88°44'25,4"	11°36'41,8"	1033,155	+1012,011	+207,950	8580,255	7348,733	2
C	269°22'04,0"	100°58'45,8"				9592,266	7556,683	C
D								D

#### 153.4. Уравнивание системы полигонометрических ходов с двумя узловыми точками

Уравнивание таких систем полигонометрических ходов аналогично уравниванию как одиночного полигонометрического хода, так и системы полигонометрических ходов с одной узловой точкой. В такой системе (рис. 16.10) образуется три независимых полигонометрических хода [(1), (2), (3)], в которых возникает по три условия: три условия дирекционных углов и шесть условий координат, т.е. получается девять условных уравнений.

В табл. 16.17, 16.18 и 16.19 приведены необходимые исходные данные для решения задачи уравнивания, заключающейся в определении уравненных значений координат точек  $I$ ,  $2$ ,  $3$ ,  $M$ ,  $N$ , а также уравненного значения дирекционного угла узловой линии  $MN$ . (В данном примере узловые точки  $M$  и  $N$  образуют и узловую линию).

Часто между узловыми точками прокладывают полигонометрический ход в две и более линии. Тогда понятие узловой линии не будет иметь места. Ею может быть любая линия с началом в какой-либо узловой точке).

Горизонтальные углы измерены равноточно с погрешностью  $m_\beta = 2,0''$ . Расстояния измерены светодальномером с погрешностью, примерно одинаковой для всех линий ( $m_s = 18 \text{ мм} = 1,8 \text{ см}$ ). В соответствии с указанной точностью измерения расстояний и углов веса углов принимаем равными единице ( $p_\beta = 1$ ;  $q_\beta = 1$ ), а веса расстояний –

$$p_{si} = \frac{m_{\beta}^2}{m_s^2} = \frac{2,0^2}{1,8^2} = 1,235; q_{si} = 0,810$$

Таблица 16.17

Координаты, м	B	C	F	G
X	7183,652	8137,565	6124,924	7894,521
Y	4380,124	6463,782	4718,048	7173,596

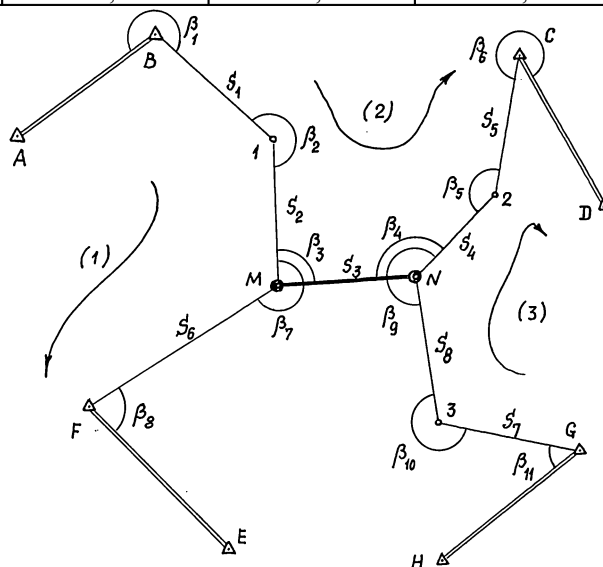


Рис. 16.10. Система полигонометрических ходов с двумя узловыми точками

Таблица 16.18

$\alpha_{AB}$	71° 08' 14,3"	$\alpha_{BA}$	251° 08' 14,3"
$\alpha_{CD}$	118° 19' 14,7"	$\alpha_{DC}$	298° 19' 14,7"
$\alpha_{EF}$	324° 21' 18,0"	$\alpha_{FE}$	144° 21' 18,0"
$\alpha_{GH}$	159° 58' 14,2"	$\alpha_{HG}$	339° 58' 14,2"

Таблица 16.19

Обозначение угла	Значение угла	Обозначение расстояния	Значение расстояния, м
$\beta_1$	226° 15' 25"	$s_1$	475,885
$\beta_2$	201° 36' 36"	$s_2$	693,027
$\beta_3$	85° 02' 31"	$s_3$	857,338
$\beta_4$	170° 15' 07"	$s_4$	401,239
$\beta_5$	172° 53' 18"	$s_5$	841,215
$\beta_6$	271° 07' 58"	$s_6$	625,329
$\beta_7$	280° 34' 07"	$s_7$	573,421
$\beta_8$	84° 46' 52"	$s_8$	989,716
$\beta_9$	337° 03' 44"		
$\beta_{10}$	178° 54' 26"		

$\beta_{II}$	78° 21' 28"		
--------------	-------------	--	--

Выполним предварительные вычисления в полигонометрических ходах (1), (2) и (3), т.е. определим координаты точек ходов, используя только измеренные величины (табл. 16.20).

Шаг 1. Общее число измерений  $n = 19$  (11 углов и 8 расстояний), число необходимых измерений  $k = 10$ , число избыточных измерений  $r = 9$ .

Таблица 16.20

№№ точек	Гориз. углы $\beta$	Дирекц. углы $\alpha$	Рассто- яния $s$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№№ точек
				$\Delta x$	$\Delta y$	X	Y	
A				<b>Ход (1)</b>				
		71°08'14,3"						
B	226°15'25"					7183,652	4380,124	B
		117°23'39,3"	475,885	-218,960	+422,520			
I	201°36'36"					6964,692	4802,644	I
		139°00'15,3"	693,027	-523,068	+454,628			
M	280°34'07"					6441,624	5257,272	M
		239°34'22,3"	625,329	-316,693	-539,205			
F	84°46'52"					6124,931	4718,067	F°
		144°21'14,3"				6124,924	4718,048	F <sub>исх</sub>
		144°21'18,0"				+0,7 см	+1,9 см	
E		-3,7"						
				<b>Ход (2)</b>				
A								
		71°08'14,3"						
B	226°15'25"					7183,652	4380,124	B
		117°23'39,3"	475,885	-218,960	+422,520			
I	201°36'36"					6964,692	4802,644	I
		139°00'15,3"	693,027	-523,068	+454,628			
M	85°02'31"					6441,624	5257,272	M
		44°02'46,3"	857,338	+616,237	+596,054			
N	170°15'07"					7057,861	5853,326	N
		34°17'53,3"	401,239	+331,470	+226,098			
2	172°53'18"					7389,331	6079,424	2
		27°11'11,3"	841,215	+748,281	+384,341			
C	271°07'58"					8137,612	6463,765	C°
		118°19'09,3"				8137,565	6463,782	C <sub>исх</sub>
		118°19'14,7"						
		-5,4"				+4,7 см	-1,7 см	
				<b>Ход (3)</b>				
H								
		339°58'14,2"						
G	78°21'28"					7894,521	7173,596	G
		238°19'42,2"	573,421	-301,075	-488,022			
3	178°54'26"					7593,446	6685,574	3
		237°14'08,2"	989,716	-535,620	-832,255			
N	337°03'44"					7057,826	5853,320	N
		34°17'52,2"	401,239	+331,471	+226,096			

2	172°53'18"					7389,297	6079,415	2
		27°11'10,2"	841,215	+748,283	+384,337			
C	271°07'58"					8137,580	6463,752	C°
		118°19'08,2"				8137,565	6463,782	C <sub>исх</sub>
D		118°19'14,7" -6,5"				+1,5 см	-3,0 см	

## Шаг 2. Составление условных уравнений.

Для трех независимых ходов, будем иметь три условных уравнения для дирекционных углов и шесть условных уравнений для координат ( три – для абсцисс, три – для ординат).

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \alpha_{AB} + n_{(1)} 180^0 + \sum \beta_{(1)} - \alpha_{FE} = 0; \\
 2. \quad & \alpha_{AB} + n_{(2)} 180^0 + \sum \beta_{(2)} - \alpha_{CD} = 0; \\
 3. \quad & \alpha_{HG} + n_{(3)} 180^0 + \sum \beta_{(3)} - \alpha_{CD} = 0; \\
 4. \quad & X_B + \sum (s_i \cos \alpha_i)_{(1)} - X_F = 0; \\
 5. \quad & Y_B + \sum (s_i \sin \alpha_i)_{(1)} - Y_F = 0; \\
 6. \quad & X_B + \sum (s_i \cos \alpha_i)_{(2)} - X_C = 0; \\
 7. \quad & Y_B + \sum (s_i \sin \alpha_i)_{(2)} - Y_C = 0; \\
 8. \quad & X_G + \sum (s_i \cos \alpha_i)_{(3)} - X_C = 0; \\
 9. \quad & Y_G + \sum (s_i \sin \alpha_i)_{(3)} - Y_C = 0;
 \end{aligned} \tag{16.117}$$

В уравнениях (16.117) индексы (1), (2) и (3) относятся к соответствующим ходам (см. табл. 16.20), например,  $n_{(1)} = 4$ ,  $n_{(2)} = 6$ ,  $n_{(3)} = 5$ .

Приведем условные уравнения к линейному виду по правилам, изложенным выше. В полученные выражения введем знак гауссовых сумм [...].

$$\begin{aligned}
 1. \quad & [v_{\beta}]_{(1)} + W_1 = 0; \\
 2. \quad & [v_{\beta}]_{(2)} + W_2 = 0; \\
 3. \quad & [v_{\beta}]_{(3)} + W_3 = 0; \\
 4. \quad & -\frac{1}{\rho} [(y_F^0 - y_i^0) v_{\beta i}]_{(1)} + [v_{si} \cos \alpha_i^0]_{(1)} + W_4 = 0; \\
 5. \quad & \frac{1}{\rho} [(x_F^0 - x_i^0) v_{\beta i}]_{(1)} + [v_{si} \sin \alpha_i^0]_{(1)} + W_5 = 0; \\
 6. \quad & -\frac{1}{\rho} [(y_C^0 - y_i^0) v_{\beta i}]_{(2)} + [v_{si} \cos \alpha_i^0]_{(2)} + W_6 = 0; \\
 7. \quad & \frac{1}{\rho} [(x_F^0 - x_i^0) v_{\beta i}]_{(2)} + [v_{si} \sin \alpha_i^0]_{(2)} + W_7 = 0; \\
 8. \quad & -\frac{1}{\rho} [(y_C^0 - y_i^0) v_{\beta i}]_{(3)} + [v_{si} \cos \alpha_i^0]_{(3)} + W_8 = 0; \\
 9. \quad & \frac{1}{\rho} [(x_F^0 - x_i^0) v_{\beta i}]_{(3)} + [v_{si} \sin \alpha_i^0]_{(3)} + W_9 = 0;
 \end{aligned} \tag{16.118}$$

Вычислим значения невязок в уравнениях (16.118) с учетом данных измерений и предварительных вычислений:

$$W_i = T_i^o - T_{i(исх)}, \tag{16.119}$$

где  $T_i^o$  – результат вычисления исходной величины  $T_{i(исх)}$ .

$$W_1 = 144^{\circ} 21' 14,3'' - 144^{\circ} 21' 18,0'' = -3,7'';$$

$$W_2 = 118^{\circ} 19' 09,3'' - 118^{\circ} 19' 14,7'' = -5,4'';$$

$$W_3 = 118^{\circ} 19' 08,2'' - 118^{\circ} 19' 14,7'' = -6,5'';$$

$$\begin{aligned}
W_4 &= 6124,931 - 6124,924 = +0,007 \text{ м} = + 0,7 \text{ см}; \\
W_5 &= 4718,067 - 4718,048 = + 0,019 \text{ м} = + 1,9 \text{ см}; \\
W_6 &= 8137,612 - 8137,565 = + 0,047 \text{ м} = + 4,7 \text{ см}; \\
W_7 &= 6463,765 - 6463,782 = - 0,017 \text{ м} = - 1,7 \text{ см}; \\
W_8 &= 8137,580 - 8137,565 = + 0,015 \text{ м} = + 1,5 \text{ см}; \\
W_9 &= 6463,752 - 6463,782 = - 0,030 \text{ м} = - 3,0 \text{ см}.
\end{aligned}$$

По данным табл. 16.20 составим табл. 16.21 значений синусов и косинусов дирекционных углов и разностей абсцисс и ординат. Получим окончательные условные уравнения поправок:

Таблица 16.21

№№ точек	$\sin \alpha_i$	$\cos \alpha_i$	$(x_n^0 - x_i^0)$ , км	$(y_n^0 - y_i^0)$ , км
<b>Ход 1</b>				
В	(В-1) 0,8879	-0,4601	-1,0587	0,3379
1	(1-М) 0,6560	-0,7548	-0,8398	-0,0846
М	(М-Е) -0,8623	-0,5064	-0,3167	-0,5392
Е				
<b>Ход 2</b>				
В	(В-1) 0,8879	-0,4601	0,9540	2,0836
1	(1-М) 0,6560	-0,7548	1,1729	1,6611
М	(М-Н) 0,6952	0,7188	1,6960	1,2065
Н	(Н-2) 0,5635	0,8261	1,0798	0,6104
2	(2-С) 0,4569	0,8895	0,7483	0,3843
С				
<b>Ход 3</b>				
Г	(Г-3)-0,8511	-0,5250	0,2431	-0,7098
3	(3-Н)-0,8409	-0,5412	0,5441	-0,2218
Н	(Н-2)0,5635	0,8261	1,0798	0,6104
2	(2-С)0,4569	0,8895	0,7483	0,3843
С				

$$\begin{aligned}
1. v_{\beta 1} + v_{\beta 2} + v_{\beta 7} + v_{\beta 8} - 3,7 &= 0; \\
2. v_{\beta 1} + v_{\beta 2} + v_{\beta 3} + v_{\beta 4} + v_{\beta 5} + v_{\beta 6} - 5,4 &= 0; \\
3. v_{\beta 11} + v_{\beta 10} + v_{\beta 9} + v_{\beta 5} + v_{\beta 6} - 6,5 &= 0; \\
4. - 0,1638 v_{\beta 1} + 0,0410 v_{\beta 2} + 0,2614 v_{\beta 7} - 0,4601 v_{s1} - 0,7548 v_{s2} - 0,5064 v_{s6} + 0,7 &= 0; \\
5. - 0,51331 v_{\beta 1} - 0,4071 v_{\beta 2} - 0,1535 v_{\beta 7} + 0,8879 v_{s1} + 0,6560 v_{s2} - 0,8623 v_{s6} + 1,9 &= 0; \\
6. - 1,0102 v_{\beta 1} - 0,8053 v_{\beta 2} - 0,5849 v_{\beta 3} - 0,2959 v_{\beta 4} - 0,1863 v_{\beta 5} - 0,4601 v_{s1} - 0,7548 v_{s2} + \\
+ 0,7188 v_{s3} + 0,8261 v_{s4} + 0,8895 v_{s5} + 4,7 &= 0; \\
7. 0,4625 v_{\beta 1} + 0,5686 v_{\beta 2} + 0,8222 v_{\beta 3} + 0,5235 v_{\beta 4} + 0,3628 v_{\beta 5} + 0,8879 v_{s1} + 0,6560 v_{s2} + \\
+ 0,6952 v_{s3} + 0,5635 v_{s4} + 0,4569 v_{s5} - 1,7 &= 0; \\
8. 0,3441 v_{\beta 11} + 0,1076 v_{\beta 10} - 0,2959 v_{\beta 9} - 0,1863 v_{\beta 5} - 0,5250 v_{s7} - 0,5412 v_{s8} + 0,8261 v_{s4} + \\
+ 0,8895 v_{s5} + 1,5 &= 0; \\
9. 0,1178 v_{\beta 11} + 0,2638 v_{\beta 10} + 0,5235 v_{\beta 9} + 0,3628 v_{\beta 5} - 0,8511 v_{s7} - 0,8409 v_{s8} + 0,5635 v_{s4} + \\
+ 0,4569 v_{s5} - 3,0 &= 0.
\end{aligned}$$

(16.119)

Составим матрицу коэффициентов  $a_{ij}$  и обратных весов  $q_i$ , необходимую для определения коэффициентов нормальных уравнений коррелат (табл. 16.22).



Таблица 16.22

$i \rightarrow$ $j \downarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0
2	1	1	1	1	1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	1	1	0	0	1
4	-0,1638	0,0410	0	0	0	0	0,2614	0	0
5	-0,5133	-0,4071	0	0	0	0	-0,1535	0	0
6	-1,0102	-0,8053	-0,5849	-0,2959	-0,1863	0	0	0	0
7	0,4625	0,5686	0,8222	0,5235	0,3628	0	0	0	0
8	0	0	0	0	-0,1863	0	0	0	-0,2959
9	0	0	0	0	0,3628	0	0	0	0,5235
$q_i$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

(продолжение табл. 16.22)

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\beta_{10}$	$\beta_{11}$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-0,4601	-0,7548	0	0	0	-0,5064	0	0
0	0	0,8879	0,6560	0	0	0	-0,8623	0	0
0	0	-0,4601	-0,7548	0,7188	0,8261	0,8895	0	0	0
0	0	0,8879	0,6560	0,6952	0,5635	0,4569	0	0	0
0,1076	0,3441	0	0	0	0,8261	0,8895	0	-0,5250	-0,5412
0,2638	0,1178	0	0	0	0,5635	0,4569	0	-0,8511	-0,8409
1	1	0,810	0,810	0,810	0,810	0,810	0,810	0,810	0,810

Шаг 4. Составление нормальных уравнений коррелат.

- $4k_1 + 2k_2 + 0,1386k_4 - 1,0739k_5 - 1,8155k_6 + 1,0311k_7 - 3,7 = 0;$
- $2k_1 + 6k_2 + 2k_3 - 0,1228k_4 - 0,9204k_5 - 2,8827k_6 + 2,7396k_7 - 0,1863k_8 + 0,3628k_9 - 5,4 = 0;$
- $2k_2 + 5k_3 - 0,1863k_6 + 0,3628k_7 - 0,0306k_8 + 1,2679k_9 - 6,5 = 0;$
- $0,1386k_1 - 0,1228k_2 + 0,9375k_4 - 0,3510k_5 + 0,7654k_6 - 0,7844k_7 + 0,7 = 0;$
- $-1,0739k_1 - 0,9204k_2 - 0,3510k_4 + 2,3327k_5 + 0,1144k_6 + 0,5182k_7 + 1,9 = 0;$
- $-1,8155k_1 - 2,8827k_2 - 0,1863k_3 + 0,7654k_4 + 0,1144k_5 + 4,3786k_6 - 1,2495k_7 + 1,2284k_8 + 0,6387k_9 + 4,7 = 0;$
- $1,0311k_1 + 2,7396k_2 + 0,3628k_3 - 0,7844k_4 + 0,5182k_5 - 1,2495k_6 + 3,4238k_7 + 0,6387k_8 + 0,5579k_9 - 1,7 = 0;$
- $-0,1863k_2 - 0,0306k_3 + 1,2284k_6 + 0,6387k_7 + 1,9065k_8 + 1,2832k_9 + 1,5 = 0;$
- $0,3628k_2 + 1,2679k_3 + 0,6387k_6 + 0,5579k_7 + 1,2832k_8 + 2,0749k_9 - 3,0 = 0.$

(16.120)

Из решения системы нормальных линейных уравнений (16.120) получим:

$k_1 = + 0,474; k_2 = - 0,375; k_3 = + 0,740; k_4 = - 0,379; k_5 = - 0,983; k_6 = - 0,614; k_7 = + 0,422; k_8 = - 2,263; k_9 = + 2,534.$

Подстановка полученных значений коррелат в исходные уравнения (16.120) показывает выполнение указанных условий.

Шаг 5. Составление уравнений поправок и вычисление поправок.

В соответствии с таблицей 16.22:

Таблица 16.23

№№ точек	Гориз. углы $\beta$	Дирекц. углы $\alpha$	Рассто- яния	Приращения координат, м		Координаты, м		№№ точек
к			$s$ , м	$\Delta x$	$\Delta y$	X	Y	
A				<b>Ход (1)</b>				
		71°08'14,3"						
B	226°15'26,48"					7183,6520	4380,1240	B
		117°23'40,78"	475,8847	-218,9627	+422,5182			
1	201°36'37,22"					6964,6893	4802,6422	1
		139°00'18,00"	693,0301	-523,0761	+454,6230			
M	280°34'07,53"					6441,6132	5257,2652	M
		239°34'25,53"	625,3374	-316,6888	-539,2171			
F	84°46'52,47"					6124,9244 +0,4 мм	4718,0481 +0,1 мм	F
		144°21'18,00" 0,00"						
E								
				<b>Ход (2)</b>				
A								
		71°08'14,3"						
B	226°15'26,48"					7183,6520	4380,1240	B
		117°23'40,78"	475,8847	-218,9627	+422,5182			
1	201°36'37,22"					6964,6993	4802,6422	1
		139°00'18,00"	693,0301	-523,0761	+454,6230			
M	85°02'31,33"					6441,6132	5257,2652	M
		44°02'49,33"	857,3368	+616,2274	+596,0623			
N	170°15'07,03"					7057,8406	5853,3276	N
		34°17'56,36"	401,2332	+331,4621	+226,0995			
2	172°53'19,97"					7389,3027	6079,4271	2
		27°11'16,33"	841,2052	+748,2631	+384,3547			
C	271°07'58,37"					8137,5658 +0,8 мм	6463,7818 -0,2 мм	C
		118°19'14,70" 0,00"						
D								
				<b>Ход (3)</b>				
H								
		339°58'14,2"						
G	78°21'28,26"					7894,5210	7173,5960	G
		238°19'42,46"	573,4133	-301,0701	-488,0160			
3	178°54'27,16"					7593,4509	6685,5800	3
		237°14'09,62"	989,7087	-535,6104	-832,2528			
N	337°03'46,74"					7057,8405	5853,3272	N
		34°17'56,36"	401,2332	+331,4621	+226,0995			
2	172°53'19,97"					7389,3026	6079,4267	2
		27°11'16,33"	841,2052	+748,2631	+384,3547			
C	271°07'58,37"					8137,5657 +0,7 мм	6463,7814 -0,6 мм	C
		118°19'14,70" 0,00"						
D								

$$\begin{aligned}
v_{\beta i} &= k_1 + k_2 - 0,1638 k_4 - 0,5133 k_5 - 1,0102 k_6 + 0,4625 k_7 = +1,48''; \\
v_{\beta 2} &= k_1 + k_2 + 0,0410 k_4 - 0,4071 k_5 - 0,8053 k_6 + 0,5686 k_7 = +1,22''; \\
v_{\beta 3} &= k_2 - 0,5849 k_6 + 0,8222 k_7 = +0,33''; \\
v_{\beta 4} &= k_2 - 0,2959 k_6 + 0,5235 k_7 = -0,03''; \\
v_{\beta 5} &= k_2 + k_3 - 0,1863 k_6 + 0,3628 k_7 - 0,1863 k_8 + 0,3628 k_9 = +1,97''; \\
v_{\beta 6} &= k_2 + k_3 = +0,37''; \\
v_{\beta 7} &= 0,2614 k_4 - 0,1535 k_5 = +0,53''; \\
v_{\beta 8} &= k_1 = +0,47''; \\
v_{\beta 9} &= k_3 - 0,2959 k_8 + 0,5235 k_9 = +2,74''; \\
v_{\beta 10} &= k_3 + 0,1075 k_8 + 0,2638 k_9 = +1,16''; \\
v_{\beta 11} &= k_3 + 0,3441 k_8 + 0,1179 k_9 = +0,26''; \\
v_{s1} &= 0,810[-0,4601(k_4 + k_6) + 0,8879(k_5 + k_7)] = -0,03 \text{ см} \approx -0,3 \text{ мм}; \\
v_{s2} &= 0,810[-0,7548(k_4 + k_6) + 0,6560(k_5 + k_7)] = +0,310 \text{ см} \approx +3,1 \text{ мм}; \\
v_{s3} &= 0,810[0,7188 k_6 + 0,6952 k_7] = -0,119 \text{ см} \approx -1,2 \text{ мм}; \\
v_{s4} &= 0,810[0,8261(k_6 + k_8) + 0,5635(k_7 + k_9)] = -0,576 \text{ см} \approx -5,8 \text{ мм}; \\
v_{s5} &= 0,810[0,8895(k_6 + k_8) + 0,4569(k_7 + k_9)] = -0,979 \text{ см} \approx -9,8 \text{ мм}; \\
v_{s6} &= 0,810[-0,5064 k_4 - 0,8623 k_5] = +0,842 \text{ см} \approx +8,4 \text{ мм}; \\
v_{s7} &= 0,810[-0,5250 k_8 - 0,8511 k_9] = -0,772 \text{ см} \approx -7,7 \text{ мм}; \\
v_{s8} &= 0,810[-0,5412 k_6 - 0,8409 k_9] = -0,734 \text{ см} \approx -7,3 \text{ мм}
\end{aligned}$$

Шаг 6. Вычисление уравненных значений координат и дирекционных углов.

Поправки в измеренные величины вводим непосредственно при обработке ведомости уравнивания (табл. 16.23), составленной по аналогии с табл. 16.20.

Как видно из данных уравнивания (при сравнении с исходными данными) линейные остаточные невязки в ходах не превышают 3-х мм, угловые остаточные невязки равны нулю.

Задача решена.

Остаточные невязки в углах и координатах являются несущественными и зависят от округления промежуточных результатов.

Обычно после завершения уравнивания значения координат округляют до 1 мм, а значения углов до 0,1".

### 153.5. Уравнивание триангуляции

На рис. 16.11 приведена схема триангуляции с измеренными углами  $\gamma_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\eta_i$  и  $t_i$  (табл. 16.24).

При использовании условия фигур и суммы углов в триангуляционном построении образуется пять условных уравнений, поскольку имеется только пять избыточных измерений.

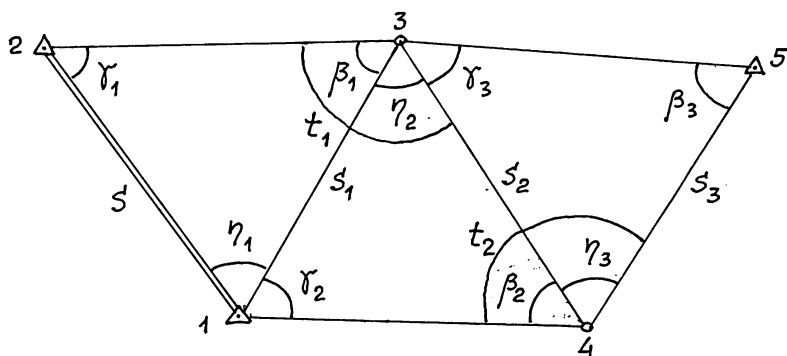


Рис. 16.11. Схема триангуляции

Таблица 16.24

$\gamma_i$	Значение угла	$\beta_i$	Значение угла	$\eta_i$	Значение угла	$t_i$	Значение угла
$\gamma_1$	63° 17' 12,4"	$\beta_1$	54° 53' 45,6"	$\eta_1$	61° 49' 05,6"	$t_1$	118° 09' 06,8"
$\gamma_2$	69° 05' 49,6"	$\beta_2$	47° 38' 49,3"	$\eta_2$	63° 15' 18,8"	$t_2$	122° 09' 15,1"
$\gamma_3$	55° 16' 40,1"	$\beta_3$	50° 12' 47,4"	$\eta_3$	74° 30' 27,7"		

Если бы в триангуляционном построении не измерялись углы  $t_i$ , то при равноточном измерении углов в каждом из треугольников (1), (2) и (3), имеющих невязки  $W_{(1)} = +3,6''$ ,  $W_{(2)} = -2,3''$ ,  $W_{(3)} = -4,8''$ , достаточно поровну распределить их по всем соответствующим углам (с обратным знаком). Таким образом, поправки в углы в треугольнике (1) были бы равны  $-1,2''$ , в треугольнике (2)  $+0,8''$  ( $+0,77''$ ), в треугольнике (3)  $+1,6''$ .

Если в триангуляционном построении не планируется уравнивать углы с учетом условия координат, либо других условий, учитывающих линейные измерения, а также в случаях, когда на другом конце триангуляционного построения нет второй базисной линии или исходного пункта, то часто число избыточных измерений увеличивают, например, измеряют углы  $t_i$ .

Введем условие неравноточности измерений углов, определяемое числом полных приемов  $n$  измерения каждого угла. При этом вес угла определим по формуле (3.38), приняв за единицу веса  $n_e = 3$  (табл. 16.25).

Таблица 16.25

Углы	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$t_1$	$t_2$
$n_i$	2	3	3	4	4	4	3	3	2	3	3
$p_i$	0,67	1	1	1,33	1,33	1,33	1	1	0,67	1	1
$q_i$	1,50	1	1	0,75	0,75	0,75	1	1	1,50	1	1

Составим условные уравнения фигур и сумм углов:

$$\begin{aligned}
1. & \gamma_1 + \beta_1 + \eta_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \eta_1 - 360^0 = 0; \\
2. & \gamma_2 + \eta_2 + \gamma_3 + \beta_3 + \eta_3 + \beta_2 - 360^0 = 0; \\
3. & \gamma_2 + \eta_2 + \beta_2 - 180^0 = 0; \\
4. & \beta_1 + \eta_2 - t_1 = 0; \\
5. & \beta_2 + \eta_3 - t_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{16.121}$$

В этом случае уравнения поправок примут вид:

$$\begin{aligned}
1. & v_{\gamma_1} + v_{\beta_1} + v_{\eta_2} + v_{\beta_2} + v_{\gamma_2} + v_{\eta_1} + W_1 = 0; \\
2. & v_{\gamma_2} + v_{\eta_2} + v_{\gamma_3} + v_{\beta_3} + v_{\eta_3} + v_{\beta_2} + W_2 = 0; \\
3. & v_{\gamma_2} + v_{\beta_2} + v_{\eta_2} + W_3 = 0; \\
4. & v_{\beta_1} + v_{\eta_2} - v_{t_1} + W_4 = 0; \\
5. & v_{\beta_2} + v_{\eta_3} - v_{t_2} + W_5 = 0.
\end{aligned}
\tag{16.122}$$

Вычислим значения невязок (свободных членов уравнений поправок):

$$\begin{aligned}
W_1 &= \sum(\text{углы фигуры 1-2-3-4-1}) - 360^0 = 360^0 00' 01,3'' - 360^0 = +1,3''; \\
W_2 &= \sum(\text{углы фигуры 1-3-5-4-1}) - 360^0 = 359^0 59' 52,9'' - 360^0 = -7,1''; \\
W_3 &= \sum(\text{углы треугольника 1-3-4}) - 180 = 179^0 59' 57,7'' - 180 = -2,3''; \\
W_4 &= \beta_1 + \eta_2 - t_1 = 118^0 09' 04,4'' - 118^0 09' 06,8'' = -2,4''; \\
W_5 &= \beta_2 + \eta_3 - t_2 = 122^0 09' 17,0'' - 122^0 09' 15,1'' = +1,9''.
\end{aligned}$$

Составим таблицу коэффициентов  $a_{ij}$ . С учетом неравноточности измерений, матрица коэффициентов  $a_{ij}$  будет содержать значения обратных весов измеренных углов (табл. 16.26).

Таблица 16.26

$i \rightarrow$ $j \downarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$t_1$	$t_2$
1	1	1		1	1		1	1			
2		1	1		1	1		1	1		
3		1			1			1			
4				1				1		-1	
5					1				1		-1
$q_i$	1,50	1,00	1,00	0,75	0,75	0,75	1,00	1,00	1,50	1,00	1,00

С учетом обратных весов составим нормальные уравнения коррелат:

$$\begin{aligned}
1. & 6k_1 + 2,75k_2 + 2,75k_3 + 1,75k_4 + 0,75k_5 + 1,3 = 0; \\
2. & 2,75k_1 + 6k_2 + 2,75k_3 + k_4 + 2,25k_5 - 7,1 = 0; \\
3. & 2,75k_1 + 2,75k_2 + 2,75k_3 + k_4 + 0,75k_5 - 2,3 = 0; \\
4. & 1,75k_1 + k_2 + k_3 + 2,75k_4 - 2,4 = 0; \\
5. & 0,75k_1 + 2,25k_2 + 0,75k_3 + 3,25k_5 + 1,9 = 0.
\end{aligned}
\tag{16.123}$$

Из решения системы линейных уравнений (16.123) получим:

$$k_1 = -1,303; k_2 = +2,362; k_3 = -0,008; k_4 = +0,846; k_5 = -1,917.$$

Контрольная подстановка коррелат в исходные уравнения (16.123) показывает выполнение указанных условий.

Значения поправок в измеренные углы определяем с использованием табл. 16.26:

$$\begin{aligned}
v_{\gamma_1} &= 1,50k_1 = -1,955'' \approx -2,0'' & v_{\eta_1} &= k_1 = -1,303'' \approx -1,3'' \\
v_{\gamma_2} &= k_1 + k_2 + k_3 = +1,051'' \approx +1,1'' \\
v_{\eta_2} &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = +1,897'' \approx +1,9''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{\gamma_3} &= k_2 = +2,362'' \approx +2,4'' \\
v_{\eta_3} &= 1,50(k_2 + k_5) = +0,668'' \approx +0,7'' \\
v_{\beta_1} &= 0,75(k_1 + k_4) = -0,343'' \approx -0,3'' & v_{t_1} &= -k_4 = -0,846'' \approx -0,8'' \\
v_{\beta_2} &= 0,75(k_1 + k_2 + k_3 + k_5) = -0,650'' \approx -0,6'' & v_{t_2} &= -k_5 = +1,917'' \approx +1,9'' \\
v_{\beta_3} &= 0,75k_2 = +1,772'' \approx +1,8''
\end{aligned}$$

Контроль вычисления поправок осуществляется выполнением условий в уравнениях (16.122). Указанные условия выполнены в пределах погрешностей округлений.

Уравненные значения углов приведем в табличной форме (табл. 16.27).

Контроль уравнивания углов производится подстановкой их уравненных значений в условные уравнения (16.121).

Таблица 16.27

$\gamma_i$	Значение угла: измеренное (поправка) <i>уравненное</i>	$\beta_i$	Значение угла: измеренное (поправка) <i>уравненное</i>	$\eta_i$	Значение угла: измеренное (поправка) <i>уравненное</i>	$t_i$	Значение угла: измеренное (поправка) <i>уравненное</i>
$\gamma_1$	63°17'12,4" (-2,0") <i>63°17'10,4"</i>	$\beta_1$	54°53'45,6" (-0,3") <i>54°53'45,3"</i>	$\eta_1$	61°49'05,6" (-1,3") <i>61°49'04,3"</i>	$t_1$	118°09'06,8" (-0,8") <i>118°09'06,0"</i>
$\gamma_2$	69°05'49,6" (+1,1") <i>69°05'50,7"</i>	$\beta_2$	47°38'49,3" (-0,6") <i>47°38'48,7"</i>	$\eta_2$	63°15'18,8" (+1,9") <i>63°15'20,7"</i>	$t_2$	122°09'15,1" (+1,9") <i>122°09'17,0"</i>
$\gamma_3$	55°16'40,1" (+2,4") <i>55°16'42,5"</i>	$\beta_3$	50°12'47,4" (+1,8") <i>50°12'49,2"</i>	$\eta_3$	74°30'27,7" (+0,7") <i>74°30'28,4"</i>		

### 153.6. Уравнивание триангуляции по условию координат

Как известно, в триангуляции измеряют только горизонтальные углы в цепочке геодезических фигур. При этом ряд геодезических фигур, например, треугольников, на концах имеют базисные стороны, либо, как в рассматриваемом ниже примере, на другом конце имеют исходный пункт 5 (рис. 16.12).

В табл. 16.28 и 16.29 приведены значения координат исходных пунктов и значения измеренных горизонтальных углов.

Выполним предварительные вычисления в триангуляции.

Из решения обратной геодезической задачи найдем значение дирекционного угла исходной стороны 1-2 и расстояние  $s$ :

$$\alpha_{1-2} = 343^\circ 52' 09,9''; \quad (\alpha_{2-1} = 163^\circ 52' 09,9''); \quad s = 3852,969 \text{ м}$$

По теореме синусов найдем длины сторон ходовой линии 2-1-3-4-5:

$$s_1 = s \frac{\sin \gamma_1}{\sin \beta_1} = 4206,934 \text{ м}; \quad s_2 = s_1 \frac{\sin \gamma_2}{\sin \beta_2} = 5318,018 \text{ м}; \quad s_3 = s_2 \frac{\sin \gamma_3}{\sin \beta_3} = 5688,222 \text{ м}$$

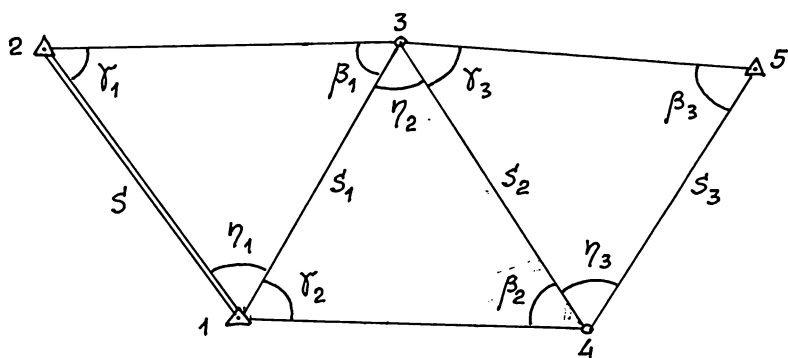


Рис. 16.12. Ряд трангуляции. Уравнивание по условию координат.

Таблица 16.28

№№ пунктов	1	2	5
X, м	3387,324	7088,605	4359,096
Y, м	4315,770	3245,309	13698,519

Таблица 16.29

$\gamma_i$	Значение угла	$\beta_i$	Значение угла	$\eta_i$	Значение угла
$\gamma_1$	63° 17' 12,4"	$\beta_1$	54° 53' 45,6"	$\eta_1$	61° 49' 05,6"
$\gamma_2$	69° 05' 49,6"	$\beta_2$	47° 38' 49,3"	$\eta_2$	63° 15' 18,8"
$\gamma_3$	55° 16' 40,1"	$\beta_3$	50° 12' 47,4"	$\eta_3$	74° 30' 27,7"

Таблица 16.30

№№ точек	Гориз.углы	Дирекц.углы $\alpha$	Рассто- яния $s$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№№ точек
				$\Delta x$	$\Delta y$	X	Y	
2		163°52'09,9"						
1	61°49'05,6"	45°41'15,5"	4206,934	+2938,837	+3010,238	3387,324	4315,770	1
3	63°15'18,8"	162°25'56,7"	5318,018	-5069,994	+1605,140	6326,161	7326,008	3°
4	74°30'27,7"	56°56'24,4"	5688,222	+3103,012	+4767,304	1256,167	8931,148	4°
5						4359,179	13698,452	5°

Значения дирекционных углов определим в таблице вычисления координат по значениям правых или левых по ходу горизонтальных углов  $\eta_i$  и дирекционного угла исходного направления 2-1 (табл. 16.30).

Далее, так же, как и в предыдущем примере, не будем по тексту отмечать шаги решения задачи уравнивания углов, но практически сохраним стандартную последовательность действий.

Составим уравнения для условия фигур и условия координат.

$$\begin{aligned} 1. \gamma_1 + \beta_1 + \eta_1 - 180^0 &= 0; \\ 2. \gamma_2 + \beta_2 + \eta_2 - 180^0 &= 0; \\ 3. \gamma_3 + \beta_3 + \eta_3 - 180^0 &= 0; \\ 4. x_1 + \sum s_i \cos \alpha_i - x_5 &= 0; \\ 5. y_1 + \sum s_i \sin \alpha_i - y_5 &= 0. \end{aligned} \quad (16.124)$$

Приведем уравнения (16.124) к линейному виду и запишем условные уравнения поправок (вывод дается в § 150, п. 150.7):

$$\begin{aligned} 1. v_{\gamma_1} + v_{\beta_1} + v_{\eta_1} + W_{(1)} &= 0; \\ 2. v_{\gamma_2} + v_{\beta_2} + v_{\eta_2} + W_{(2)} &= 0; \\ 3. v_{\gamma_3} + v_{\beta_3} + v_{\eta_3} + W_{(3)} &= 0; \\ 4. \sum \left( \frac{x_n^0 - x_i^0}{20,626} \operatorname{ctg} \gamma_i v_{\eta_i} \right) - \sum \left( \frac{x_n^0 - x_i^0}{20,626} \operatorname{ctg} \beta_i v_{\beta_i} \right) - \sum \left( \frac{y_n^0 - y_i^0}{20,626} (\pm v_{\eta_i}) \right) + W_x &= 0; \\ 5. \sum \left( \frac{y_n^0 - y_i^0}{20,626} \operatorname{ctg} \gamma_i v_{\eta_i} \right) - \sum \left( \frac{y_n^0 - y_i^0}{20,626} \operatorname{ctg} \beta_i v_{\beta_i} \right) + \sum \left( \frac{x_n^0 - x_i^0}{20,626} (\pm v_{\eta_i}) \right) + W_y &= 0. \end{aligned} \quad (16.125)$$

В уравнениях (16.125):  $v_{\eta_i}, v_{\beta_i}, v_{\eta_i}$  – поправки в соответствующие измеренные углы;  $W_{(i)}$  – угловые невязки в треугольниках (1), (2) и (3) по их счету от базовой линии;  $x_n^0$  и  $y_n^0$  – вычисленные координаты конечной точки ходовой линии (в примере – вычисленные координаты точки 5);  $x_i^0$  и  $y_i^0$  – текущие координаты точек ходовой линии.

Поправку  $v_{\eta_i}$  записывают в уравнениях 4 и 5 со знаком плюс, если угол  $\eta_i$  является левым по ходу, и со знаком минус, если этот угол – правый по ходу.

В уравнениях (16.125) значения разностей координат следует брать в километрах, невязки  $W_x$  и  $W_y$  – в дециметрах, а угловые невязки и поправки в углы – в секундах.

Таблица 16.31

Направление	$(x_s^0 - x_i^0)$ , км	$(y_s^0 - y_i^0)$ , км	
5 – 1	+0,972	+9,383	
5 – 3	-1,967	+6,372	
5 – 4	+3,103	+4,767	
$\beta_i$	Котангенс	$\gamma_i$	Котангенс
$\beta_1$	0,70292	$\gamma_1$	0,50324
$\beta_2$	0,91162	$\gamma_2$	0,38192
$\beta_3$	0,83278	$\gamma_3$	0,69301

Найдем свободные члены уравнений поправок (т.е. невязки):

$$W_{(1)} = \gamma_1 + \beta_1 + \eta_1 - 180^0 = +3,6'';$$



$$W_{(2)} = \gamma_2 + \beta_2 + \eta_2 - 180^\circ = -2,3'';$$

$$W_{(3)} = \gamma_3 + \beta_3 + \eta_3 - 180^\circ = -4,8'';$$

$$W_x = x_5^0 - x_{5(ИСК)} = +0,083 \text{ м} = +0,83 \text{ дм}$$

$$W_y = y_5^0 - y_{5(ИСК)} = -0,067 \text{ м} = -0,67 \text{ дм}$$

Составим таблицу значений разностей координат (в км) и котангенсов углов (табл. 16.31).

Приведем уравнения поправок (16.125) в развернутом виде:

$$\begin{aligned} 1. v_{\gamma 1} + v_{\beta 1} + v_{\eta 1} + W_{(1)} &= 0; \\ 2. v_{\gamma 2} + v_{\beta 2} + v_{\eta 2} + W_{(2)} &= 0; \\ 3. v_{\gamma 3} + v_{\beta 3} + v_{\eta 3} + W_{(3)} &= 0; \\ 4. \dots \frac{x_5^0 - x_1^0}{20,626} \operatorname{ctg} \gamma_1 v_{\gamma 1} + \frac{x_5^0 - x_3^0}{20,626} \operatorname{ctg} \gamma_2 v_{\gamma 2} + \frac{x_5^0 - x_4^0}{20,626} \operatorname{ctg} \gamma_3 v_{\gamma 3} - \frac{x_5^0 - x_1^0}{20,626} \operatorname{ctg} \beta_1 v_{\beta 1} - \\ &- \frac{x_5^0 - x_3^0}{20,626} \operatorname{ctg} \beta_2 v_{\beta 2} - \frac{x_5^0 - x_4^0}{20,626} \operatorname{ctg} \beta_3 v_{\beta 3} - \frac{y_5^0 - y_1^0}{20,626} v_{\eta 1} + \frac{y_5^0 - y_3^0}{20,626} v_{\eta 2} - \frac{y_5^0 - y_4^0}{20,626} v_{\eta 3} + \\ &+ W_x = 0; \\ 5. \frac{y_5^0 - y_1^0}{20,626} \operatorname{ctg} \gamma_1 v_{\gamma 1} + \frac{y_5^0 - y_3^0}{20,626} \operatorname{ctg} \gamma_2 v_{\gamma 2} + \frac{y_5^0 - y_4^0}{20,626} \operatorname{ctg} \gamma_3 v_{\gamma 3} - \frac{y_5^0 - y_1^0}{20,626} \operatorname{ctg} \beta_1 v_{\beta 1} - \\ &- \frac{y_5^0 - y_3^0}{20,626} \operatorname{ctg} \beta_2 v_{\beta 2} - \frac{y_5^0 - y_4^0}{20,626} \operatorname{ctg} \beta_3 v_{\beta 3} + \frac{x_5^0 - x_1^0}{20,626} v_{\eta 1} - \frac{x_5^0 - x_3^0}{20,626} v_{\eta 2} + \frac{x_5^0 - x_4^0}{20,626} v_{\eta 3} + \\ &+ W_y = 0; \end{aligned} \quad (16.126)$$

С учетом значений, приведенных в табл. 16.31, запишем окончательные уравнения поправок:

$$\begin{aligned} 1. v_{\gamma 1} + v_{\beta 1} + v_{\eta 1} + 3,6 &= 0; \\ 2. v_{\gamma 2} + v_{\beta 2} + v_{\eta 2} - 2,3 &= 0; \\ 3. v_{\gamma 3} + v_{\beta 3} + v_{\eta 3} - 4,8 &= 0; \\ 4. \dots 0,0237 v_{\gamma 1} - 0,0364 v_{\gamma 2} + 0,1043 v_{\gamma 3} - 0,0331 v_{\beta 1} + \\ &+ 0,0869 v_{\beta 2} - 0,1253 v_{\beta 3} - 0,4549 v_{\eta 1} + 0,3089 v_{\eta 2} - 0,2311 v_{\eta 3} + 0,83 = 0; \\ 5. \dots 0,2289 v_{\gamma 1} + 0,1180 v_{\gamma 2} + 0,1602 v_{\gamma 3} - 0,3192 v_{\beta 1} - \\ &- 0,2816 v_{\beta 2} - 0,1925 v_{\beta 3} + 0,0471 v_{\eta 1} + 0,0954 v_{\eta 2} + 0,1504 v_{\eta 3} - 0,67 = 0. \end{aligned} \quad (16.127)$$

Составим матрицу коэффициентов уравнений поправок с учетом того, что измерения углов выполнены равноточно с весами, равными единице.

Таблица 16.32

	1( $v_{\gamma 1}$ )	2( $v_{\gamma 2}$ )	3( $v_{\gamma 3}$ )	4( $v_{\beta 1}$ )	5( $v_{\beta 2}$ )	6( $v_{\beta 3}$ )	7( $v_{\eta 1}$ )	8( $v_{\eta 2}$ )	9( $v_{\eta 3}$ )
1( $k_1$ )	1			1			1		
2( $k_2$ )		1			1			1	
3( $k_3$ )			1			1			1
4( $k_4$ )	0,0237	-0,0364	0,1043	-0,0331	0,0869	-0,1253	-0,4549	0,3089	-0,2311
5( $k_5$ )	0,2289	0,1180	0,1602	-0,3192	-0,2816	-0,1925	0,0471	0,0954	0,1504

Составим и решим систему нормальных уравнений коррелат, пользуясь данными табл. 16.32.

$$\begin{aligned} 1. 3k_1 - 0,4643 k_4 - 0,0432 k_5 + 3,6 &= 0; \\ 2. 3k_2 + 0,3594 k_4 - 0,0682 k_5 - 2,3 &= 0; \\ 3. 3k_3 - 0,2521 k_4 + 0,1181 k_5 - 4,8 &= 0; \\ 4. -0,4643 k_1 + 0,3594 k_2 - 0,2521 k_3 + 0,3929 k_4 + 0,0013 k_5 + 0,83 &= 0; \end{aligned} \quad (16.127)$$

$$5. - 0,0432 k_1 - 0,0682 k_2 + 0,1181 k_3 + 0,0013 k_4 + 0,3442 k_5 - 0,67 = 0.$$

Из решения системы уравнений (16.127):  $k_1 = -1,9481$ ;  $k_2 = +1,4004$ ;  $k_3 = +1,1176$ ;  $k_4 = -4,9860$ ;  $k_5 = +1,6149$ .

Вычисляем поправки в измеренные углы, пользуясь данными табл. 16.32:

$v_{\beta_1} = k_1 - 0,07$	$k_4 - 0,29$	$k_5 = -1,67$
$v_{\beta_2} = k_2 - 0,04$	$k_4 - 0,10$	$k_5 = -1,72$
$v_{\beta_3} = k_3 - 0,08$	$k_4 - 0,10$	$k_5 = -0,86$
$v_{\beta_4} = k_1 - 0,04$	$k_4 - 0,32$	$k_5 = -2,99$
$v_{\beta_5} = k_2 - 0,06$	$k_4 - 0,26$	$k_5 = -0,53$
$v_{\beta_6} = k_3 - 0,13$	$k_4 - 0,15$	$k_5 = -1,41$
(16.128)		
$v_{\beta_7} = k_1 - 0,40$	$k_4 - 0,04$	$k_5 = -0,95$
$v_{\beta_8} = k_2 - 0,06$	$k_4 - 0,04$	$k_5 = -0,05$
$v_{\beta_9} = k_3 - 0,21$	$k_4 - 0,10$	$k_5 = -0,52$

Подстановка полученных значений поправок (16.128) в уравнения (16.126) показывает выполнение указанных условий.

После вычисления уравненных значений углов выполняют проверку уравнивания подстановкой их значений в уравнения 1, 2 и 3 (16.124). Предоставляем читателю возможность завершения процесса уравнивания.

### 153.7. Уравнивание линейно-угловой сети

Линейно-угловая сеть представлена на рис. 16.13. В этой сети, имеющей базис  $AB$ , измерены направления и расстояния (табл. 16.33). Для решения задачи уравнивания координат точек линейно-угловой сети коррелятным способом вычислены значения горизонтальных углов.

Координаты пунктов  $A$  и  $B$ :  $x_A = 5343,664$  м;  $y_A = 3981,857$  м;  $x_B = 6476,326$  м;  $y_B = 4649,235$  м.

Дирекционный угол направления  $BA$ :  $\alpha_{BA} = 210^\circ 30' 25,6''$ .

Точность измерения горизонтальных углов составила  $m_\beta = 5,0''$ . Расстояния измерены с относительной погрешностью  $1 : 40000$ .

Выполним предварительные вычисления в линейно-угловой сети.

Определим веса измеренных величин (расстояний) с учетом формулы (16.102).

Определим координаты точек 1 и 2 дважды по ходам (1)  $[B-A-2-I-B-A]$  и (2)  $[B-A-I-2-B-A]$  (см. табл. 16.35).

Составим условные уравнения и уравнения поправок.

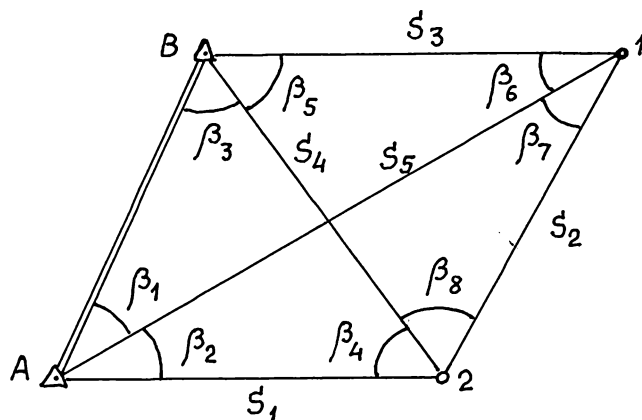


Рис. 16.13. Линейно-угловая сеть.

Таблица 16.33

Пункт	Направление	Значение измеренного направления	Значение вычисленного угла	Значение измеренного расстояния, м
А	А – В	0° 00' 00,0"		
	А – 1	42° 45' 02,6"	$\beta_1 = 42^\circ 45' 02,6''$	$S_5 = 2218,342$
	А – 2	67° 58' 17,7"	$\beta_2 = 25^\circ 13' 15,1''$	$S_1 = 1632,301$
В	В – 1	0° 00' 00,0"		$S_3 = 1538,317$
	В – 2	36° 41' 22,3"	$\beta_5 = 36^\circ 41' 22,3''$	$S_4 = 1668,220$
	В – А	101° 47' 13,6"	$\beta_3 = 65^\circ 05' 51,3''$	
1	1 – 2	0° 00' 00,0"		$S_2 = 1016,748$
	1 – А	43° 09' 48,8"	$\beta_7 = 43^\circ 09' 48,8''$	
	1 – В	78° 37' 27,2"	$\beta_6 = 35^\circ 27' 38,4''$	
2	2 – А	0° 00' 00,0"		
	2 – В	46° 55' 48,6"	$\beta_4 = 46^\circ 55' 48,6''$	
	2 – 1	111° 36' 58,1"	$\beta_8 = 64^\circ 41' 09,5''$	

Таблица 16.34

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
$m_i$ (см)	4,1	2,5	7,7	8,3	11,1
$p_i$	1,487	4,000	0,422	0,363	0,203
$q_i$	0,672	0,250	2,372	2,756	4,928

Условные уравнения:

- $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 - 180^\circ = 0;$
- $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 + \beta_8 - 360^\circ = 0;$
- $\beta_1 + \beta_3 - \beta_7 - \beta_8 = 0;$
- $x_A + s_1 \cos \alpha_{A2} + s_2 \cos \alpha_{21} + s_3 \cos \alpha_{1B} - x_B = 0;$
- $y_A + s_1 \sin \alpha_{A2} + s_2 \sin \alpha_{21} + s_3 \sin \alpha_{1B} - y_B = 0;$
- $x_A + s_5 \cos \alpha_{A1} + s_2 \cos \alpha_{12} + s_4 \cos \alpha_{2B} - x_B = 0;$
- $y_A + s_5 \sin \alpha_{A1} + s_2 \sin \alpha_{12} + s_4 \sin \alpha_{2B} - y_B = 0;$

(16.128)

Таблица 16.35

№№ точек	Гориз.углы $\beta$	Дирекц.углы $\alpha$	Рассто- яния $s$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№№ точек
				$\Delta x$	$\Delta y$	X	Y	
В		210°30'25,6"		Ход (1)				
А	67°58'17,7"	98°28'43,3"	1632,301	-240,669	+1614,461	5343,664	3981,857	А
2	111°36'58,1"	30°05'41,4"	1016,748	+879,687	+509,831	5102,995	5596,318	2°
1	78°37'27,2"	288°43'08,6"	1538,317	+493,689	-1456,946	5982,682	6106,149	1°
В	101°47'13,6"	210°30'22,2"				6476,371	4649,203	В°
А				Ход (2)				
В		210°30'25,6"						
А	42°45'02,6" (левый)	73°15'28,2"	2218,342	+639,027	+2124,308	5343,664	3981,857	А
1	43°09'48,8" (правый)	210°05'39,4"	1016,748	-879,692	-509,822	5982,691	6106,165	1°
2	64°41'09,5" (првый)	325°24'29,9"	1668,220	+1373,310	-947,089	5102,999	5596,343	2°
В	65°05'51,3" (левый)	210°30'21,2"				6476,309	4649,254	В°
А								

Условные уравнения поправок:

$$1...v_{\beta 1} + v_{\beta 2} + v_{\beta 3} + v_{\beta 4} + W_1 = 0;$$

$$2...v_{\beta 1} + v_{\beta 2} + v_{\beta 3} + v_{\beta 4} + v_{\beta 5} + v_{\beta 6} + v_{\beta 7} + v_{\beta 8} + W_2 = 0;$$

$$3...v_{\beta 1} + v_{\beta 3} - v_{\beta 7} - v_{\beta 8} + W_3 = 0;$$

$$4... - \frac{1}{\rho} [(y_B^0 - y_A)(v_{\beta 1} + v_{\beta 2}) + (y_B^0 - y_2^0)(v_{\beta 4} + v_{\beta 8}) + (y_B^0 - y_1^0)(v_{\beta 6} + v_{\beta 7})] + \quad (16.129)$$

$$+ v_{s1} \cos \alpha_{A2}^0 + v_{s2} \cos \alpha_{21}^0 + v_{s3} \cos \alpha_{1B}^0 + W_4 = 0;$$

$$5... \frac{1}{\rho} [(x_B^0 - x_A)(v_{\beta 1} + v_{\beta 2}) + (x_B^0 - x_2^0)(v_{\beta 4} + v_{\beta 8}) + (x_B^0 - x_1^0)(v_{\beta 6} + v_{\beta 7})] +$$

$$+ v_{s1} \sin \alpha_{A2}^0 + v_{s2} \sin \alpha_{21}^0 + v_{s3} \sin \alpha_{1B}^0 + W_5 = 0;$$

$$6... - \frac{1}{\rho} [(y_B^0 - y_A)v_{\beta 1} + (y_B^0 - y_1^0)v_{\beta 7} + (y_B^0 - y_2^0)v_{\beta 8}] +$$

$$+ v_{s5} \cos \alpha_{A1}^0 + v_{s2} \cos \alpha_{12}^0 + v_{s4} \cos \alpha_{2B}^0 + W_6 = 0;$$

$$7... \frac{1}{\rho} [(x_B^0 - x_A)v_{\beta 1} + (x_B^0 - x_1^0)v_{\beta 7} + (x_B^0 - x_2^0)v_{\beta 8}] +$$

$$+ v_{s5} \sin \alpha_{A1}^0 + v_{s2} \sin \alpha_{12}^0 + v_{s4} \sin \alpha_{2B}^0 + W_7 = 0.$$

Принцип составления условных уравнений поправок такой же, как и при решении аналогичной задачи для систем полигонометрических ходов, рассмотренных выше.

Вычислим свободные члены (невязки) по данным предварительных вычислений (табл. 16.35), а также по условиям фигур (свойств углов в четырехугольниках с диагоналями). В результате получим:  $W_1 = -2,4''$ ;  $W_2 = -3,4''$ ;  $W_3 = -4,4''$ ;  $W_4 = 6476,371 - 6476,326 = +45 \text{ мм} = +4,5 \text{ см}$ ;  $W_5 = 4649,203 - 4649,235 = -32 \text{ мм} = -3,2 \text{ см}$ ;  $W_6 = 6476,309 - 6476,326 = -17 \text{ мм} = -1,7 \text{ см}$ ;  $W_7 = 4649,254 - 4649,235 = +19 \text{ мм} = +1,9 \text{ см}$ .

Составим таблицу синусов и косинусов дирекционных углов и разностей координат (в км) – табл. 16.36.

Таблица 16.36

№№ точек	$\sin \alpha_i$	$\cos \alpha_i$	$(x_n^0 - x_i^0)$ , км	$(y_n^0 - y_i^0)$ , км
<b>Ход 1</b>				
А	(А-2) 0,9891	-0,1474	+1,133	+0,667
2	(2-1) 0,5014	0,8652	+1,373	-0,947
1	(1-В) -0,9471	0,3209	+0,494	-1,457
В				
<b>Ход 2</b>				
А	(А-1) 0,9576	0,2881	+1,133	+0,667
1	(1-2) -0,5014	-0,8652	+0,494	-1,457
2	(2-В) -0,5677	0,8232	+1,373	-0,947
В				

С учетом данных табл. 16.36 и значений свободных членов уравнения поправок примут окончательный вид:

$$\begin{aligned}
 &1...v_{\beta 1} + v_{\beta 2} + v_{\beta 3} + v_{\beta 4} - 2,4 = 0; \\
 &2...v_{\beta 1} + v_{\beta 2} + v_{\beta 3} + v_{\beta 4} + v_{\beta 5} + v_{\beta 6} + v_{\beta 7} + v_{\beta 8} - 3,4 = 0; \\
 &3...v_{\beta 1} + v_{\beta 3} - v_{\beta 7} - v_{\beta 8} - 4,4 = 0; \\
 &4...[-0,3234v_{\beta 1} - 0,3234v_{\beta 2} + 0,4591v_{\beta 4} + 0,4591v_{\beta 8} + 0,7064v_{\beta 6} + 0,7964v_{\beta 7}] - \\
 &\quad - 0,1474v_{s1} + 0,8652v_{s2} + 0,3209v_{s3} + 4,5 = 0; \\
 &5...[0,5493v_{\beta 1} + 0,5493v_{\beta 2} + 0,6656v_{\beta 4} + 0,6656v_{\beta 8} + 0,2395v_{\beta 6} + 0,2395v_{\beta 7}] + \\
 &\quad + 0,9891v_{s1} + 0,5014v_{s2} - 0,9471v_{s3} - 3,2 = 0; \\
 &6...[-0,3234v_{\beta 1} + 0,7064v_{\beta 7} + 0,4591v_{\beta 8}] + \\
 &\quad + 0,2881v_{s5} - 0,8652v_{s2} + 0,8232v_{s4} - 1,7 = 0; \\
 &(16.130) \\
 &7...[0,5493v_{\beta 1} + 0,2395v_{\beta 7} + 0,6656v_{\beta 8}] + \\
 &\quad + 0,9756v_{s5} - 0,5014v_{s2} - 0,5677v_{s4} + 1,9 = 0.
 \end{aligned}$$

Составим матрицу коэффициентов  $a_{ij}$  условных уравнений поправок со строкой обратных весов (табл. 16.37).

Таблица 16.37

$j \rightarrow$ $i \downarrow$	$q_i$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	-0,3234	+0,5493	-0,3234	+0,5493
2	1	1	1		-0,3234	+0,5493		
3	1	1	1	1				
4	1	1	1		+0,4591	+0,6656		
5	1		1					
6	1		1		+0,7064	+0,2395		
7	1		1	-1	+0,7064	+0,2395	+0,7064	+0,2395
8	1		1	-1	+0,4591	+0,6656	+0,4591	+0,6656
9	0,672				-0,1474	+0,9891		
10	0,250				+0,8652	+0,5014	-0,8652	-0,5014
11	2,372				+0,3209	-0,9471		
12	2,756						+0,8232	-0,5677
13	4,928						+0,2881	+0,9756

Составим нормальные уравнения коррелят:

- $4k_1 + 4k_2 + 2k_3 - 0,1877k_4 + 1,7642k_5 - 0,3234k_6 + 0,5493k_7 - 2,4 = 0;$
- $4k_1 + 8k_2 + 1,6842k_4 + 2,9088k_5 + 0,8421k_6 + 1,4544k_7 - 3,4 = 0;$  (16.131)
- $2k_1 + 4k_3 - 1,4889k_4 - 0,3558k_5 - 1,4889k_6 - 0,3558k_7 - 4,4 = 0;$
- $-0,1877k_1 + 1,6842k_2 - 1,4889k_3 + 2,0747k_4 - 0,1162k_5 + 0,0720k_6 + 0,1887k_7 + 4,5 = 0;$
- $1,7462k_1 + 2,9088k_2 - 0,3558k_3 - 0,1162k_4 + 4,4522k_5 + 0,1887k_6 + 0,7393k_7 - 3,2 = 0;$
- $-0,3234k_1 + 0,8421k_2 - 1,4889k_3 + 0,6272k_4 + 0,1887k_5 + 3,2782k_6 + 0,5027k_7 - 1,7 = 0;$
- $0,5493k_1 + 1,4544k_2 - 0,3558k_3 + 0,1887k_4 + 0,7393k_5 + 0,5027k_6 + 6,4436k_7 + 1,9 = 0.$

Из решения системы линейных уравнений получим значения коррелят:

$k_1 = -2,6464; k_2 = +2,3697; k_3 = +1,4860; k_4 = -3,5221; k_5 = +0,2898; k_6 = +1,0629; k_7 = -0,5351.$

Вычисляем значения поправок в измеренные величины:

$$v_{\beta 1} = k_1 + k_2 + k_3 - 0,3234(k_4 + k_6) + 0,5493(k_5 + k_7) = +1,87'' \approx +1,9''$$

$$v_{\beta 2} = k_1 + k_2 - 0,3234k_4 + 0,5493k_5 = +1,02'' \approx +1,0''$$

$$v_{\beta 3} = k_1 + k_2 + k_3 = +1,21'' \approx +1,2''$$

$$v_{\beta 4} = k_1 + k_2 + 0,4591k_4 + 0,6656k_5 = -1,70'' \approx -1,7''$$

$$v_{\beta 5} = k_2 = +2,37'' \approx +2,4''$$

$$v_{\beta 6} = k_2 + 0,7064k_4 + 0,2395k_5 = -0,049'' \approx -0,1''$$

$$v_{\beta 7} = k_2 - k_3 + 0,7064(k_4 + k_6) + 0,2395(k_5 + k_7) = -0,91'' \approx -0,9''$$

$$v_{\beta 8} = k_2 - k_3 + 0,4591(k_4 + k_6) + 0,6656(k_5 + k_7) = -0,41'' \approx -0,4''$$

$$v_{s1} = 0,672(-0,1474k_4 + 0,9891k_5) = +0,54 \text{ см} \approx +5 \text{ мм}$$

$$v_{s2} = 0,250[0,8652(k_4 - k_6) + 0,5014(k_5 - k_7)] = -0,89 \text{ см} \approx -9 \text{ мм}$$

$$v_{s3} = 2,372(0,3209k_4 - 0,9471k_5) = -3,33 \text{ см} \approx -33 \text{ мм}$$

$$v_{s4} = 2,756(0,8232k_6 - 0,5677k_7) = +3,25 \text{ см} \approx +32 \text{ мм}$$

$$v_{s5} = 4,928(0,2881k_6 + 0,9756k_7) = -1,06 \text{ см} \approx -11 \text{ мм}$$

Контрольная подстановка в исходные уравнения поправок (16.130) показала удовлетворительное выполнение указанных условий.

Составим ведомость уравнивания координат (по аналогии с ведомостью предварительных вычислений) с учетом полученных поправок измеренных величин (табл. 16.38).

№№ точек	Гориз.углы $\beta$	Дирекц.углы $\alpha$	Рассто- яния $s$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№№ точек
				$\Delta x$	$\Delta y$	X	Y	
B				Ход (1)				
		210°30'25,6"						
A	67°58'20,6"					5343,664	3981,857	A
		98°28'46,2"	1632,306	-240,693	+1614,463			
2	111°36'56,0"					5102,971	5596,320	2
		30°05'42,2"	1016,739	+879,677	+509,830			
1	78°37'26,2"					5982,648	6106,150	1
		288°43'08,4"	1538,284	+493,677	-1456,915			
B A	101°47'17,2"					6476,325	4649,235	B
		210°30'25,6"						
B				Ход (2)				
		210°30'25,6"						
A	42°45'04,5" (левый)					5343,664	3981,857	A
		73°15'30,1"	2218,331	+639,005	+2124,304			
1	43°09'47,9" (правый)					5982,669	6106,161	1
		210°05'42,2"	1016,739	-879,677	-509,830			
2	64°41'09,1" (првый)					5102,992	5596,331	2
		325°24'33,1"	1668,252	+1373,351	-947,086			
B A	65°05'52,5" (левый)					6476,343	4649,245	B
		210°30'25,6"						

Как видно из ведомости уравнивания, остаточные угловые невязки равны нулю, а отклонения координат точки *B* от исходных в ходе (1) составили -1 мм, в ходе (2) +17мм и + 10 мм (остаточная абсолютная погрешность составляет порядка 2 см, относительная – 1:250000). Уравнивания во втором приближении не требуются.

### § 154. Параметрический способ уравнивания

При уравнивании сложных по построению геодезических сетей, в которых имеется обычно большое число избыточных измерений, применение коррелятного способа является практически менее выгодным. Это связано с тем, что в сложных сетях образуется сравнительно большое число геометрических условий (см. § 151), т.е. возникает необходимость решения значительного числа нормальных уравнений. При уравнивании сложных геодезических сетей предпочтение отдают параметрическому способу. В данном случае его рекомендуется применять практически для любых построений: обширных геодезических сетей триангуляции и трилатерации, для весьма сложных фигур триангуляции 3 и 4 классов, в схемах различных линейно-угловых построений и др.

Чаще всего при уравнивании плановых геодезических построений параметрическим способом в качестве неизвестных величин (или необходимых параметров  $t_j$ ) выбирают координаты определяемых пунктов, для которых из предварительных вычислений находят приближенные значения  $t_j^o$ , а затем

определяют поправки  $\tau_j$  к этим приближенным значениям. В качестве уравниваемых величин в плановых построениях принимают измеренные направления, углы, дирекционные углы (азимуты), длины сторон сетей. Промежуточными уравниваемыми величинами (как косвенными величинами) могут явиться и приращения координат точек планового построения.

Для нахождения поправок при уравнивании параметрическим способом необходимо составить параметрические уравнения связи, которые в полной мере обеспечат решение поставленной задачи. Все измеренные величины практически можно выразить через координаты точек сети, т.е. через выбранные параметры  $t_j$ , что и требуется при уравнивании параметрическим способом. Так, дирекционные углы  $\alpha$  и длины  $s$  сторон можно найти по разностям координат, горизонтальные углы, в свою очередь, выразить через разность дирекционных углов и т.п.

Рассмотрим различные виды уравнений поправок, применяемых при уравнивании параметрическим способом.

*Уравнение поправок для измеренного дирекционного угла* находится из параметрического уравнения связи между дирекционным углом и координатами точек данной линии:

$$\alpha_{ki} = \arctg \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} = \arctg \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (16.132)$$

или

$$\varphi = \arctg \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} - \alpha_{ki} \quad (16.133)$$

Известно, что  $x_i - x_k = \Delta x = s_{ki} \cos \alpha_{ki}$  и  $y_i - y_k = \Delta y = s_{ki} \sin \alpha_{ki}$ . С учетом этого возьмем частные производные от функции (16.133) по переменным  $x$  и  $y$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = + \frac{\sin \alpha_{ki}}{s_{ki}}; \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \frac{\sin \alpha_{ki}}{s_{ki}}; \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} = - \frac{\cos \alpha_{ki}}{s_{ki}}; \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = + \frac{\cos \alpha_{ki}}{s_{ki}} \quad (16.134)$$

Свободный член  $l_{ki}$  уравнения поправок может быть найден из уравнения

$$l_{ki} = \arctg \frac{y_i^0 - y_k^0}{x_i^0 - x_k^0} - \alpha_{ki}' = \alpha_{ki}^0 - \alpha_{ki}', \quad (16.135)$$

где  $x^0$  и  $y^0$  – значения искоемых координат точек  $i$  и  $k$ , полученные по результатам предварительных вычислений по измеренным величинам;  $\alpha_{ki}^0$  и  $\alpha_{ki}'$  – соответственно вычисленное и измеренное значение дирекционного угла. (Вычисленные значения необходимо давать с тем же порядком точности (округления), что и непосредственно измеренные величины).

Параметрическое уравнение поправок для измеренного дирекционного угла имеет вид:

$$v_{ki} = + \frac{\sin \alpha_{ki}^0}{s_{ki}} \delta x_k - \frac{\sin \alpha_{ki}^0}{s_{ki}} \delta x_i - \frac{\cos \alpha_{ki}^0}{s_{ki}} \delta y_k + \frac{\cos \alpha_{ki}^0}{s_{ki}} \delta y_i + l_{ki} \quad (16.136)$$

Выразим поправки  $\delta x$  и  $\delta y$  в координаты  $x$  и  $y$  в дециметрах и обозначим их соответственно буквами  $\zeta$  и  $\eta$ . Поправки в углы и свободный член уравнения – в секундах, а значение длины  $s$  – в километрах. С учетом этого можно записать, что



$$v_{ki} = a_{ki}\xi_k + b_{ki}\eta_k - a_{ki}\xi_i - b_{ki}\eta_i = \Delta\alpha_{ki}, \quad (16.137)$$

где

$$a_{ki} = 20,626'' \frac{\sin \alpha_{ki}^O}{s_{ki}^O} = 20,626'' \frac{\sin \alpha_{ki}^O \cos \alpha_{ki}^O}{x_i^O - x_k^O} \quad (16.138)$$

$$b_{ki} = -20,626'' \frac{\cos \alpha_{ki}^O}{s_{ki}^O} = -20,626'' \frac{\sin \alpha_{ki}^O \cos \alpha_{ki}^O}{y_i^O - y_k^O} \quad (16.139)$$

называются *коэффициентами параметрического уравнения поправок*.

При этом необходимо учитывать, что величины  $v_{ki}$  являются поправками для измеренных углов  $\alpha_{ki}$ , а величины  $\Delta\alpha_{ki}$  - поправками для вычисленных дирекционных углов  $\alpha_{ki}^O$ .

Уравнение поправок для измеренного направления может быть получено из следующего параметрического уравнения связи:

$$M_{ki} = \alpha_{ki} - z_k, \quad (16.140)$$

где  $M_{ki}$  – измеренное направление;  $z_k$  – ориентирующий (дирекционный) угол начального направления в точке  $k$ .

Выразим значение  $\alpha_{ki}$  через выбранные параметры (16.132) и запишем параметрическое уравнение связи (16.140) в виде

$$\varphi = \alpha_{ki} - (z_k + M_{ki}) = 0 \quad (16.141)$$

или

$$\varphi = \arctg \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} - (z_k + M_{ki}) = 0 \quad (16.142)$$

Если при предварительных вычислениях значение ориентирующего угла  $z_k^O$  определено с погрешностью  $\delta z_k$ , то для любого направления на данном пункте существует постоянная погрешность величиной  $\delta z_k$ .

Параметрическое уравнение поправок для измеренного направления  $M_{ki}$  будет иметь вид:

$$v_{ki} = -\delta z_k + a_{ki}\xi_k + b_{ki}\eta_k - a_{ki}\xi_i - b_{ki}\eta_i + l_{ki}, \quad (16.143)$$

похожий на уравнение (16.137). Если дирекционный (ориентирующий) угол в исходном пункте получен без погрешности (т.е. погрешность его определения весьма мала по сравнению с погрешностями измерений других величин), то в выражении (16.143) можно исключить  $\delta z_k$ .

Свободный член уравнения поправок в направлениях находят по формуле

$$l_{ki} = \arctg \frac{y_i^O - y_k^O}{x_i^O - x_k^O} - (z_k^O + M_{ki}') = \alpha_{ki}^O - (z_k^O + M_{ki}') = (\alpha_{ki}^O - M_{ki}') - z_k^O = z_{ki}^O - z_k^O, \quad (16.144)$$

где  $\alpha_{ki}^O$  - точное значение дирекционного угла, вычисленное по координатам точек (предварительным их значениям);  $M_{ki}'$  - измеренное значение направления;  $z_{ki}^O$  - частные значения ориентирующего угла на пункте  $k$ ;  $z_k^O$  - предварительное значение дирекционного (ориентирующего) угла находят как среднее арифметическое из его частных значений:

$$z_k^O = \frac{\sum (\alpha_{ki}^O - M_{ki}')}{n}, (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (16.145)$$

В (16.145)  $n$  – число измеренных направлений на пункте  $k$ .

Отметим некоторые особенности уравнивания направлений на пункте  $k$ :

1. Сумма свободных членов на пункте должна быть равна нулю.

2. Из-за возможных погрешностей в вычислениях расстояния между пунктами следует определять дважды:

$$s_{ki}^O = (x_i^O - x_k^O) \sec \alpha_{ki}^O = (y_i^O - y_k^O) \operatorname{cosec} \alpha_{ki}^O \quad (16.146)$$

3. Сумма поправок в направления на каждом пункте должна быть равна нулю.

4. Уравнения поправок для прямого и обратного направлений различаются только значениями  $\delta z$  и свободными членами.

5. Если  $a)$  – пункт  $i$  исходный, а пункт  $k$  определяемый, либо  $b)$  – пункт  $i$  определяемый, а пункт  $k$  исходный, либо  $в)$  – оба пункта исходные, то уравнения поправок в направления имеют соответственно следующий вид:

$$\begin{aligned} a) \quad v_{ki} &= -\delta z_k + a_{ki} \xi_k + b_{ki} \eta_k + l_{ki} \\ б) \quad v_{ki} &= -\delta z_k - a_{ki} \xi_i - b_{ki} \eta_i + l_{ki} \\ в) \quad v_{ki} &= -\delta z_k + l_{ki} \end{aligned} \quad (16.147)$$

6. Порядок уравнивания направлений в триангуляции параметрическим способом следующий (в качестве измеренных величин обычно берут направления):

- вычисляют предварительные значения координат и дирекционных углов;
- составляют параметрические уравнения связи, вычисляют коэффициенты и свободные члены уравнений поправок; составляют уравнения поправок для направлений, измеренных на пункте;
- составляют и решают нормальные уравнения поправок к предварительно вычисленным координатам;
- вычисляют окончательные значения координат пунктов;
- вычисляют поправки в измеренные направления;
- выполняют контроль обработки и оценивают точность уравненных величин (элементов сети).

Уравнение поправок для угла может быть получено на основании того, что значение угла равно разности дирекционных углов двух направлений:

$$\beta_{ij}^k = \alpha_{kj} - \alpha_{ki} \quad (16.148)$$

или

$$\beta_{ij}^k = \arctg \frac{y_i - y_k}{x_j - x_k} - \arctg \frac{y_j - y_k}{x_j - x_k} \quad (16.149)$$

С учетом (16.143) можно записать, что

$$v_{ij}^k = a_{kj} \xi_k + b_{kj} \eta_k - a_{kj} \xi_j - b_{kj} \eta_j - a_{ki} \xi_k - b_{ki} \eta_k + a_{ki} \xi_i + b_{ki} \eta_i + l_{ij}^k \quad (16.150)$$

или

$$v_{ij}^k = (a_{kj} - a_{ki}) \xi_k + (b_{kj} - b_{ki}) \eta_k - b_{kj} \eta_j + a_{ki} \xi_j + b_{ki} \eta_j - a_{kj} \xi_j - b_{kj} \eta_j + l_{ij}^k \quad (16.151)$$

Вычисление свободных членов  $l_{ij}^k$  контролируют невязками  $W$  треугольников:

$$l_{ij}^k + l_{kj}^i + l_{ik}^j = -W, \quad (16.152)$$

где

$$l_{ij}^k = (\alpha_{kj}^o - \alpha_{ki}^o) - \beta_{ij}^k \quad \text{и т.д.} \quad (16.153)$$

вычисляют из предварительных определений дирекционных углов и значениям измеренных горизонтальных углов  $\beta$ .

Уравнение поправок для измеренного расстояния находят из параметрического уравнения связи

$$s_{ki} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \quad (16.154)$$

или

$$\varphi = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} - s_{ki} \quad (16.155)$$

Если продифференцировать функцию (16.155) по переменным  $x$  и  $y$ , то получим частные производные

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_o = \cos \alpha_{ki}^o; \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)_o = -\cos \alpha_{ki}^o; \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right)_o = \sin \alpha_{ki}^o; \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \right)_o = -\sin \alpha_{ki}^o \quad (16.156)$$

В этом случае параметрические уравнения поправок для измеренного расстояния будут иметь вид:

$$v_{ki}^s = -\cos \alpha_{ki}^o \xi_k - \sin \alpha_{ki}^o \eta_k + \cos \alpha_{ki}^o \xi_i + \sin \alpha_{ki}^o \eta_i + l_{ki}, \quad (16.157)$$

где

$$l_{ki} = s_{ki}^o - s_{ki}, \quad (16.158)$$

$$s_{ki}^o = \sqrt{(x_i^o - x_k^o)^2 + (y_i^o - y_k^o)^2} \quad (16.159)$$

определяют по значениям координат  $x^o$  и  $y^o$ , полученных из предварительных вычислений, а  $s_{ki}$  - измеренное значение расстояния.

В уравнении поправок (16.157) все линейные величины должны быть выражены в одних и тех же единицах.

Как было сказано выше, решение задачи уравнивания параметрическим способом основано на представлении всех измеренных величин в виде функций некоторых выбранных параметров. Пусть, например, в треугольнике из  $n$  искоемых элементов измерено  $k$  необходимых величин. В данном случае все избыточные элементы  $r$  можно выразить в виде их функций, т.е. здесь не возникает задачи уравнивания. Например, в треугольнике  $ABC$  измерены углы  $A$  и  $B$  и длина линии  $AB = c$ . Остальные элементы можно найти из соотношений:

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (A + B) \\ a &= \frac{\sin A}{\sin(A + B)} \\ b &= \frac{\sin B}{\sin(A + B)} \end{aligned} \quad (16.160)$$

Если же измерены избыточные ( $r$ ) параметры  $C$ ,  $a$  и  $b$ , либо один из них, то возникает задача уравнивания.

Обозначим необходимые элементы буквой  $T_j$ . Для указанного треугольника в этом случае имеем:  $A = T_1$ ,  $B = T_2$ ,  $c = T_3$ . Соотношения (16.160) здесь можно записать в виде:

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (T_1 + T_2) \\ a &= \frac{\sin T_1}{\sin(T_1 + T_2)} \\ b &= \frac{\sin T_2}{\sin(T_1 + T_2)} \end{aligned} \quad (16.161)$$

Пусть, как и в коррелятном способе уравнивания, истинные значения  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (нам неизвестные) измерены, в результате чего получены значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , из которых  $k$  – необходимые, а  $r = (n - k)$  – избыточные. Значения  $x_i$  получены с весами  $p_i$ .

Выберем такие независимые между собой параметры  $T_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), функциями которых можно выразить все измеренные величины  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Очевидно, что число таких параметров должно быть равно  $k$  необходимых измерений. Получим функции

$$\begin{aligned} X_1 &= f_1(T_1, T_2, \dots, T_j, \dots, T_k) \\ X_2 &= f_2(T_1, T_2, \dots, T_j, \dots, T_k) \\ &\dots \dots \dots \\ X_i &= f_i(T_1, T_2, \dots, T_j, \dots, T_k) \\ &\dots \dots \dots \\ X_n &= f_n(T_1, T_2, \dots, T_j, \dots, T_k) \end{aligned} \quad (16.162)$$

Равенства (16.162) называют *параметрическими уравнениями связи*.

Поскольку истинные значения  $T_j$  бывают неизвестными, то в процессе уравнивания получают их вероятнейшие значения, а затем находят уравнированные значения всех измеренных величин.

Обозначим уравненные значения параметров  $T_j$  буквой  $t_j$ , тогда

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + v_1 = f_1(t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_k) \\ x_2' &= x_2 + v_2 = f_2(t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_k) \\ &\dots \dots \dots \\ x_i' &= x_i + v_i = f_i(t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_k) \\ &\dots \dots \dots \\ x_n' &= x_n + v_n = f_n(t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_k) \end{aligned} \quad (16.163)$$

Из (16.163) следует, что

$$v_i = f_i(t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_k) - x_i \quad (16.164)$$

Если уравнения (16.163) имеют нелинейный вид, то решение этой системы уравнений практически невозможно.

Для решения системы уравнений (16.163) для параметров  $t_j$  находят такие значения  $t_j^o$  (с такой их точностью), чтобы равенства (16.163) можно было привести к линейному виду разложением в ряд Тейлора с ограничением только членами первого порядка.

Для значений  $t_j$  можно записать, что

$$t_j = t_j^o + \tau_j, \quad (16.165)$$

где  $\tau_j$  – поправки в приближенные значения параметров  $t_j^0$ . Тогда

$$v_i = f_i(t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2, \dots, t_j + \tau_j, \dots, t_k + \tau_k) - x_i \quad (16.166)$$

Разложим функцию (16.166) в ряд Тейлора, ограничиваясь первыми членами разложения:

$$v_i = f_i(t_1^o, t_2^o, \dots, t_k^o) + \left( \frac{\partial f_i}{\partial t_1} \right)_o \tau_1 + \left( \frac{\partial f_i}{\partial t_2} \right)_o \tau_2 + \dots + \left( \frac{\partial f_i}{\partial t_k} \right)_o \tau_k - x_i \quad (16.167)$$

$$v_i = f_i(t_1^o, t_2^o, \dots, t_k^o) + \left( \frac{\partial f_i}{\partial t_1} \right)_o \tau_1 + \left( \frac{\partial f_i}{\partial t_2} \right)_o \tau_2 + \dots + \left( \frac{\partial f_i}{\partial t_k} \right)_o \tau_k - x_i \quad (16.167)$$

[illegible]

[illegible]

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_a = a_{ij} \quad (16.169)$$

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}\right)_a = a_{ij} \quad (16.169)$$

$$l_i = \mathbf{x}_i^o - \mathbf{x}_i = f_i(t_1^o, t_2^o, \dots, t_j^o, \dots, t_k^o) - \mathbf{x}_i \quad (16.170)$$

$$l_i = \mathbf{x}_i^o - \mathbf{x}_i = f_i(t_1^o, t_2^o, \dots, t_j^o, \dots, t_k^o) - \mathbf{x}_i \quad (16.170)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}\tau_1 + a_{12}\tau_2 + a_{13}\tau_3 + \dots + a_{1j}\tau_j + \dots + a_{1k}\tau_k + l_1 \\ v_2 &= a_{21}\tau_1 + a_{22}\tau_2 + a_{23}\tau_3 + \dots + a_{2j}\tau_j + \dots + a_{2k}\tau_k + l_2 \\ v_3 &= a_{31}\tau_1 + a_{32}\tau_2 + a_{33}\tau_3 + \dots + a_{3j}\tau_j + \dots + a_{3k}\tau_k + l_3 \end{aligned} \quad (16.171)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}\tau_1 + a_{12}\tau_2 + a_{13}\tau_3 + \dots + a_{1j}\tau_j + \dots + a_{1k}\tau_k + l_1 \\ v_2 &= a_{21}\tau_1 + a_{22}\tau_2 + a_{23}\tau_3 + \dots + a_{2j}\tau_j + \dots + a_{2k}\tau_k + l_2 \\ v_3 &= a_{31}\tau_1 + a_{32}\tau_2 + a_{33}\tau_3 + \dots + a_{3j}\tau_j + \dots + a_{3k}\tau_k + l_3 \end{aligned} \quad (16.171)$$

$$v_i = a_{i1}\tau_1 + a_{i2}\tau_2 + a_{i3}\tau_3 + \dots + a_{ij}\tau_j + \dots + a_{ik}\tau_k + l_i$$

$$V_n = a_{n1}\tau_1 + a_{n2}\tau_2 + a_{n3}\tau_3 + \dots + a_{ni}\tau_i + \dots + a_{nk}\tau_k + l_n$$

Опуская промежуточные математические преобразования (о них можно посмотреть в [3, 8, 40 и др.]), приведем окончательный вид системы нормальных уравнений, которая состоит из  $k$  уравнений с  $k$  неизвестными  $\tau_j$  с учетом весов  $p_i$  измеренных величин и значений  $l_i$  свободных членов параметрических уравнений поправок:

$$[pa_1a_1] \tau_1 + [pa_1a_2] \tau_2 + [pa_1a_3] \tau_3 + \dots + [pa_1a_k] \tau_k + [pa_1l] = 0$$





**Шаг 5.** Вычисляют по формулам (16.168), в общем виде – (16.169) или (16.171), коэффициенты  $a_{ij}$  и свободные члены  $l_i$  параметрических уравнений поправок  $v_i$  (16.170), т.е. функции (16.162) приводят к линейному виду.

**Шаг 6.** Составляют таблицу коэффициентов  $a_{ij}$ , свободных членов  $l_i$  и весов  $p_i$  (табл. 15.39) и с помощью нее получают нормальные уравнения (16.172), из решения которых находят значения поправок  $t_j$  к параметрам  $t_j^o$ .

**Шаг 7.** Выражают поправки  $v_i$  к измеренным величинам  $x_i$  через значения поправок  $t_j$  (16.170) и определяют их значения.

**Шаг 8.** Выполняют уравнивание измеренных величин  $x_i' = (x_i + v_i)$  и параметров  $t_j = (t_j^o + t_j)$  и контролируют правильность решения задачи по равенствам (16.162).

Возможны несоблюдения указанных равенств из-за неточного выбора параметров  $t_j$ , либо их приближенных значений  $t_j^o$ . Из-за этого могли использоваться такие величины поправок, при которых необходимо было учитывать нелинейность систем уравнений. Несоблюдение равенств может быть также и из-за погрешностей в вычислениях. Поэтому в первую очередь следует выполнить повторные (контрольные, лучше во вторую руку) вычисления.

Если уравнивание, при отсутствии погрешностей в вычислениях, не удовлетворяет условиям (16.162), то полученные значения считают их первым приближением, т.е. уточненными значениями  $t_j^o$ , и уравнивают систему вторично.

В качестве рекомендации следует отметить, что предварительные вычисления в уравниваемых построениях лучше выполнять после предварительного, нестроого уравнивания. Например, в полигонометрическом ходе выполнить уравнивание углов, затем – приращений координат. В цепочке треугольников выполнить предварительное уравнивание углов отдельных треугольников и т.п.

## § 155. Примеры параметрического способа уравнивания

### 155.1. Уравнивание углов в полигоне

Задача решается с использованием исходных данных § 153, п. 153.1. Дополнительно известен дирекционный угол линии  $AB$  ( $\alpha_{AB} = 91^\circ 47' 14,6''$ ).

Вообще говоря, если дирекционный угол исходной стороны неизвестен, либо не может быть в настоящий момент определен, то в качестве исходного можно принять любое условное значение дирекционного угла любой стороны фигуры и выполнить уравнивание.

Шаг 1. Общее число измерений  $n = 4$ , число необходимых измерений  $k = 3$ , число избыточных измерений  $r = 1$ .

Шаг 2. Выбираем параметры  $t_j$  (их число должно быть равно числу необходимых измерений, т.е. 3).

В качестве параметров выбираем дирекционные углы сторон фигуры:

$$t_1 = \alpha_{BC}; \quad t_2 = \alpha_{CD}; \quad t_3 = \alpha_{DA}.$$



Шаг 3. Составляем параметрические уравнения, т.е. выражаем все измеренные величины через выбранные параметры  $t_j$ :

$$\begin{aligned}\beta_1' &= t_3 \pm 180^0 - \alpha_{AB} \\ \beta_2' &= \alpha_{AB} \pm 180^0 - t_1 \\ \beta_3' &= t_1 \pm 180^0 - t_2 \\ \beta_4' &= t_2 \pm 180^0 - t_3\end{aligned}\quad (16.174)$$

Шаг 4. Находим приближенные значения  $t_j^0$  параметров  $t_j$ :

$$\begin{aligned}t_1^0 &= \alpha_{AB} \pm 180^0 - \beta_2 = 80^0 02' 13,9'' \\ t_2^0 &= t_1^0 \pm 180^0 - \beta_3 = 290^0 36' 17,1'' \\ t_3^0 &= t_2^0 \pm 180^0 - \beta_4 = 352^0 03' 51,9''\end{aligned}\quad (16.175)$$

Шаг 5. В соответствии с функциями (16.174) находим коэффициенты  $a_{ij}$  и свободные члены  $l_i$  параметрических уравнений поправок  $v_i$ :

$$\begin{aligned}a_{11} &= 0; & a_{12} &= 0; & a_{13} &= +1; \\ a_{21} &= -1; & a_{22} &= 0; & a_{23} &= 0; \\ a_{31} &= +1; & a_{32} &= -1; & a_{33} &= 0; \\ a_{41} &= 0; & a_{42} &= +1; & a_{43} &= -1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_1 &= t_3 \pm 180^0 - \alpha_{AB} - \beta_1 = \alpha_{AB} + \beta_1 \pm 180^0 - \beta_1 - \alpha_{AB} = 0; \\ l_2 &= \alpha_{AB} \pm 180^0 - t_1 - \beta_2 = \alpha_{AB} \pm 180^0 - \alpha_{AB} \pm 180^0 + \beta_2 - \beta_2 = 0; \\ l_3 &= t_1 \pm 180^0 - t_2 - \beta_3 = \alpha_{AB} \pm 180^0 - \beta_2 - t_1 \pm 180^0 + \beta_3 - \beta_3 = \\ &= \alpha_{AB} \pm 180^0 - t_1 \pm 180^0 - \beta_2 = \alpha_{AB} \pm 180^0 - \alpha_{AB} \pm 180^0 - \beta_2 + \beta_2 = 0; \\ l_4 &= t_2 \pm 180^0 - t_3 - \beta_4 = t_2 \pm 180^0 - \alpha_{AB} \pm 180^0 - \beta_1 - \beta_4 = t_1 \pm 180^0 - \beta_3 \pm 180^0 - \alpha_{AB} \pm \\ &\pm 180^0 - \beta_1 - \beta_4 = \alpha_{AB} \pm 180^0 - \beta_2 \pm 180^0 - \beta_3 \pm 180^0 - \alpha_{AB} \pm 180^0 - \beta_1 - \beta_4 = \\ &= -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4) + 360 = -W_\beta\end{aligned}\quad (16.176)$$

Как видно, значение  $W_\beta$  представляет собой угловую невязку в полигоне, т.е. в данном случае свободный член равен угловой невязке с обратным знаком. Поскольку  $W_\beta = +7''$ , то  $l_4 = -7''$ .

Таблица 16.40

$j \rightarrow$ $i \downarrow$	1	2	3	$l_i$	$p_i$
1	0	0	+1	0	0,221
2	-1	0	0	0	0,459
3	+1	-1	0	0	0,473
4	0	+1	-1	-7	0,225

Составим таблицу (16.40) коэффициентов  $a_{ij}$ , свободных членов  $l_i$  и весов  $p_i$  измеренных величин.

Шаг 6. Составим и решим систему нормальных уравнений поправок  $\tau_j$ .

Запишем уравнения поправок  $\tau_j$  в развернутом виде в соответствии с параметрами, указанными в табл. 16.40:

$$\begin{aligned}1 \dots (p_1 a_{11}^2 + p_2 a_{21}^2 + p_3 a_{31}^2 + p_4 a_{41}^2) \tau_1 + (p_1 a_{11} a_{12} + p_2 a_{21} a_{22} + p_3 a_{31} a_{32} + p_4 a_{41} a_{42}) \tau_2 + \\ + (p_1 a_{11} a_{13} + p_2 a_{21} a_{23} + p_3 a_{31} a_{33} + p_4 a_{41} a_{43}) \tau_3 + (p_1 l_1 a_{11} + p_2 l_2 a_{21} + p_3 l_3 a_{31} + p_4 l_4 a_{41}) = 0; \\ 2 \dots (p_1 a_{12} a_{11} + p_2 a_{22} a_{21} + p_3 a_{32} a_{31} + p_4 a_{42} a_{41}) \tau_1 + (p_1 a_{12}^2 + p_2 a_{22}^2 + p_3 a_{32}^2 + p_4 a_{42}^2) \tau_2 + \\ + (p_1 a_{12} a_{13} + p_2 a_{22} a_{23} + p_3 a_{32} a_{33} + p_4 a_{42} a_{43}) \tau_3 + (p_1 l_1 a_{12} + p_2 l_2 a_{22} + p_3 l_3 a_{32} + p_4 l_4 a_{42}) = 0;\end{aligned}$$

$$3...(p_1 a_{13} a_{11} + p_2 a_{23} a_{21} + p_3 a_{33} a_{31} + p_4 a_{43} a_{41})\tau_1 + (p_1 a_{13} a_{12} + p_2 a_{23} a_{22} + p_3 a_{33} a_{32} + p_4 a_{43} a_{42})\tau_2 + (p_1 a_{13}^2 + p_2 a_{23}^2 + p_3 a_{33}^2 + p_4 a_{43}^2)\tau_3 + (p_1 l_{13} + p_2 l_{23} + p_3 l_{33} + p_4 l_{43}) = 0. \quad (16.177)$$

После подстановки значений, приведенных в табл. 16.40, получим окончательный вид уравнений поправок  $\tau_j$ :

$$\begin{aligned} 0,932\tau_1 - 0,473\tau_2 &= 0; \\ -0,473\tau_1 + 0,698\tau_2 - 0,225\tau_3 - 1,575 &= 0; \\ -0,225\tau_2 + 0,446\tau_3 + 1,575 &= 0. \end{aligned} \quad (16.178)$$

Из решения системы уравнений (16.178) получим:

$$\tau_1 = +1,15''; \quad \tau_2 = +2,27''; \quad \tau_3 = -2,39''$$

Шаг 7. Вычисляем значения поправок  $\tau_j$  с округлением до 0,1'':

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}\tau_1 + a_{12}\tau_2 + a_{13}\tau_3 + l_1 = a_{13}\tau_3 = \tau_3 = -2,39'' \approx -2,4''; \\ v_2 &= a_{21}\tau_1 + a_{22}\tau_2 + a_{23}\tau_3 + l_2 = a_{21}\tau_1 = -\tau_1 = -1,15'' \approx -1,2''; \end{aligned} \quad (16.179)$$

$$v_3 = a_{31}\tau_1 + a_{32}\tau_2 + a_{33}\tau_3 + l_3 = a_{31}\tau_1 + a_{32}\tau_2 = \tau_1 - \tau_2 = 1,15'' - 2,27'' = -1,12'' \approx -1,1'';$$

$$\begin{aligned} v_4 &= a_{41}\tau_1 + a_{42}\tau_2 + a_{43}\tau_3 + l_4 = a_{42}\tau_2 + a_{43}\tau_3 + l_4 = \tau_2 - \tau_3 + l_4 = \\ &= +2,27'' + 2,39'' - 7,00'' = -2,34'' \approx -2,3''. \end{aligned}$$

Контроль: сумма поправок равна невязке с обратным знаком.

Сравните полученные значения поправок с поправками, полученными в коррелятном способе уравнивания (п. 153.1).

Дальнейшие вычисления сводятся к определению уравненных значений параметров  $t_j$  по формуле (16.165), а также к вычислению уравненных значений измеренных углов по формуле (16.163).

## 155.2. Уравнивание системы нивелирных ходов с несколькими узловыми точками

При объяснении решения задачи уравнивания системы нивелирных ходов с несколькими узловыми точками параметрическим способом используем исходные данные § 153, п. 153.2.

Далее не будем обозначать пошаговым способом алгоритм решения задачи, но сохраним строгую последовательность действий, как это и производилось выше в некоторых примерах.

В качестве параметров  $t_j$  выбираем высоты точек 1, 2, 3 и 4 (число параметров должно быть равно числу необходимых измерений, т.е. 4):

$$t_1 = H_1; \quad t_2 = H_2; \quad t_3 = H_3; \quad t_4 = H_4.$$

Составим параметрические уравнения связи, т.е. выразим измеренные величины через функции выбранных параметров:

$$\begin{aligned} 1...h_1 &= t_1 - H_{P10} \\ 2...h_2 &= t_2 - H_{P10} \\ 3...h_3 &= t_2 - t_1 \\ 4...h_4 &= t_4 - t_1 \\ 5...h_5 &= t_2 - t_4 \\ 6...h_6 &= t_3 - t_2 \end{aligned} \quad (16.180)$$

$$7...h_7 = t_4 - t_3$$

$$8...h_8 = H_{P30} - t_4$$

$$9...h_9 = H_{P20} - t_3$$

Найдем приближенные значения выбранных параметров (задачу решим без предварительного уравнивания системы нивелирных ходов):

$$t_1^0 = H_{P10} + h_1 = 78336 + 3586 = 81922 \text{ мм};$$

$$t_2^0 = H_{P10} + h_2 = 78336 + 2841 = 81177 \text{ мм};$$

$$t_3^0 = H_{P20} - h_9 = 83507 - (-3024) = 86531 \text{ мм};$$

$$t_4^0 = H_{P30} - h_8 = 85301 - 4639 = 80662 \text{ мм}.$$

В соответствии с функциями (16.180) находим коэффициенты  $a_{ij}$  и свободные члены уравнений поправок.

Свободные члены находим как невязки в уравнениях (15.180):

$$l_1 = t_1^0 - H_{P10} - h_1 = 81922 - 78336 - 3586 = 0;$$

$$l_2 = t_2^0 - H_{P10} - h_2 = 81177 - 78336 - 2841 = 0;$$

$$l_3 = t_2^0 - t_1^0 - h_3 = 81177 - 81922 - (-752) = +7;$$

$$l_4 = t_4^0 - t_1^0 - h_4 = 80662 - 81922 - (-1243) = -17;$$

$$l_5 = t_2^0 - t_4^0 - h_5 = 81177 - 80662 - 509 = +6;$$

$$l_6 = t_3^0 - t_2^0 - h_6 = 85531 - 81177 - 5338 = +16;$$

$$l_7 = t_4^0 - t_3^0 - h_7 = 80662 - 86531 - (-5863) = -6;$$

$$l_8 = H_{P30} - t_4^0 - h_8 = 85301 - 80662 - 4639 = 0;$$

$$l_9 = H_{P20} - t_3^0 - h_9 = 83507 - 86531 - (-3024) = 0;$$

Составим матрицу коэффициентов, свободных членов и весов (табл.16.41).

По установленным выше правилам составим нормальные уравнения поправок с учетом данных, приведенных в табл. 16.41:

$$1...5,87\tau_1 - 0,93\tau_2 - 2,56\tau_4 + 37,01 = 0;$$

$$2... - 0,93\tau_1 + 4,14\tau_2 - 0,98\tau_3 - 0,76\tau_4 - 4,61 = 0;$$

$$(16.181)$$

$$3... - 0,98\tau_2 + 2,48\tau_3 - 0,66\tau_4 + 19,64 = 0;$$

$$4... - 2,56\tau_1 - 0,76\tau_2 - 0,66\tau_3 + 4,56\tau_4 - 52,04 = 0.$$

Из решения системы линейных уравнений (16.181) находим:

$$\tau_1 = -1,700; \quad \tau_2 = +1,466; \quad \tau_3 = -4,672; \quad \tau_4 = +10,026.$$

Таблица 16.41

$j \rightarrow$ $i \downarrow$	1	2	3	4	$l_i$	$p_i = s_0/s_i$
1	+1	0	0	0	0	2,38
2	0	+1	0	0	0	1,47
3	-1	+1	0	0	+7	0,93
4	-1	0	0	+1	-17	2,56
5	0	+1	0	-1	+6	0,76
6	0	-1	+1	0	+16	0,98
7	0	0	-1	+1	-6	0,66
8	0	0	0	-1	0	0,58

9	0	0	-1	0	0	0,84
---	---	---	----	---	---	------

Вычисляем значения поправок в превышения, предварительно составив уравнения поправок, исходя из табл. 16.41:

$$v_1 = a_{11}\tau_1 + l_1 = -1,7 \text{ мм} \approx -2 \text{ мм}$$

$$v_2 = a_{22}\tau_2 + l_2 = +1,466 \approx +1 \text{ мм}$$

$$v_3 = a_{31}\tau_1 + a_{32}\tau_2 + l_3 = 1,700 + 1,466 + 7 = +10,166 \approx +10 \text{ мм}$$

$$v_4 = a_{41}\tau_1 + a_{44}\tau_4 + l_4 = 1,700 + 10,026 - 17 = -5,274 \approx -5 \text{ мм}$$

(16.182)

$$v_5 = a_{52}\tau_2 + a_{54}\tau_4 + l_5 = 1,466 - 10,026 + 6 = -2,560 \approx -3 \text{ мм}$$

$$v_6 = a_{62}\tau_2 + a_{63}\tau_3 + l_6 = -1,466 - 4,672 + 16 = +9,862 \approx +10 \text{ мм}$$

$$v_7 = a_{73}\tau_3 + a_{74}\tau_4 + l_7 = 4,762 + 10,026 - 6 = +8,788 \approx +9 \text{ мм}$$

$$v_8 = a_{84}\tau_4 + l_8 = -10,026 \approx -10 \text{ мм}$$

$$v_9 = a_{93}\tau_3 + l_9 = 4,762 \approx +5 \text{ мм}$$

Не будем проводить дальнейшие вычисления, поскольку их результаты будут такими же, как и в примере уравнивания данной системы нивелирных ходов коррелятным способом (сравните поправки в превышения в том и другом способах). Но это делается только с целью сокращения объема учебника. Вам же во всех задачах необходимо выполнять полный контроль результатов уравнивания, т. е. необходимо полностью убедиться в правильности решения задачи. Вы можете самостоятельно проверить уравненные значения выбранных в этом примере параметров (высот точек 1, 2, 3 и 4) суммированием их приближенных значений с соответствующими поправками  $\tau_j$ . Например,  $H_1 = 81922 - 1,700 = 81920 \text{ мм} = 81,920 \text{ м}$ .

### 155.3. Уравнивание полигонометрического хода

Для решения указанной задачи воспользуемся данными примера § 153, п. 153.3.

Шаг 1. Общее число измерений  $n = 7$  (4 угла, 3 расстояния), число необходимых измерений  $k = 4$ , число избыточных измерений  $r = 3$ .

Шаг 2. Выбор параметров  $t_j$ .

В качестве параметров  $t_j$  выбираем координаты точек 1 и 2:

$$x_1 = t_1; \quad y_1 = t_2; \quad x_2 = t_3; \quad y_2 = t_4.$$

Шаг 3. Выразим измеренные величины через выбранные параметры.

Предварительно найдем дирекционные углы сторон полигонометрического хода:

$$\begin{aligned} \alpha_{AB} (\alpha_{BA}) &- \text{исходный дирекционный угол;} \\ \alpha_{B1} &= \arctg \frac{t_2 - y_B}{t_1 - x_B}; \dots \dots \alpha_{1B} = \arctg \frac{y_B - t_2}{x_B - t_1} = \alpha_{B1} \pm 180^\circ; \\ \alpha_{12} &= \arctg \frac{t_4 - t_2}{t_3 - t_1}; \dots \dots \alpha_{21} = \arctg \frac{t_2 - t_4}{t_1 - t_3} = \alpha_{12} \pm 180^\circ; \\ \alpha_{2C} &= \arctg \frac{y_C - t_4}{x_C - t_3}; \dots \dots \alpha_{C2} = \arctg \frac{t_4 - y_C}{t_3 - x_C} = \alpha_{2C} \pm 180^\circ. \\ \alpha_{CD} (\alpha_{DC}) &- \text{исходный дирекционный угол.} \end{aligned} \quad (16.183)$$

Из рис. 16.9 и формул (16.183) следует, что

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_{B1} - \alpha_{BA} = \arctg \frac{t_2 - y_B}{t_1 - x_B} - \alpha_{BA}; \\ \beta_2 &= \alpha_{12} - \alpha_{1B} = \arctg \frac{t_4 - t_2}{t_3 - t_1} - \arctg \frac{y_B - t_2}{x_B - t_1}; \\ \beta_3 &= \alpha_{2C} - \alpha_{21} = \arctg \frac{y_C - t_4}{x_C - t_3} - \arctg \frac{t_2 - t_4}{t_1 - t_3}; \\ \beta_4 &= \alpha_{CD} - \alpha_{C2} = \alpha_{CD} - \arctg \frac{t_4 - y_C}{t_3 - x_C}.\end{aligned}\quad (16.184)$$

Таблица 16.42

№№ точек	Гориз. углы $\beta$	Дирекц. углы $\alpha$	Расстояния $S$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№№ точек
A		137°13'16,4"						A
B	112°36'45,4" -0,9	69°50'00,9"	1245,638	+429,431 +0,004	+1169,274 -0,005	8365,344	5240,647	B
1	213°02'16,8" -0,9	102°52'16,8"	963,017	-214,524 +0,003	+938,819 -0,003	8794,779	6409,916	1
2	88°44'26,7" -0,8	11°36'42,7"	1033,151	+1012,006 +0,004	+207,953 -0,004	8580,258	7348,732	2
C	269°22'040" -0,9	100°58'45,8"		+1226,913	+2316,046	9592,268	7556,681	C°
D	683° 45' 32,9" 683° 45' 29,4" $f_\beta = +3,5''$			+1226,924	+2316,034			
				-0,011	+0,012			

Для расстояний:

$$\begin{aligned}s_1 &= \sqrt{(x_B - t_1)^2 + (y_B - t_2)^2}; \\ s_2 &= \sqrt{(t_1 - t_3)^2 + (t_2 - t_4)^2}; \\ s_3 &= \sqrt{(t_3 - x_C)^2 + (t_4 - y_C)^2}.\end{aligned}\quad (16.185)$$

Шаг 4. Определение приближенных значений параметров  $t_j$ .

Для этого выполним предварительную обработку полигонометрического хода (табл. 16.42), произведя в нем предварительное (раздельное) уравнивание, которое заключается в отдельном уравнивании углов с распределением угловой невязки поровну в каждый угол и в уравнивании приращений координат пропорционально горизонтальным проложениям, по которым получены данные приращения координат.

При раздельном уравнивании угловая невязка равна +3,5", невязки в координатах:  $f_x = -0,011$  м;  $f_y = +0,012$  м.

Таким образом, приближенные значения параметров  $t_j$  равны:

$t_1^0 = 8794,779$  м;  $t_2^0 = 6409,916$  м;  $t_3^0 = 8580,258$  м;  $t_4^0 = 7348,732$  м.

Шаг 5. Приведение функций (16.184) и (16.185) к линейному виду, вычисление коэффициентов  $a$  и  $b$  и свободных членов уравнений поправок.

Запишем уравнения поправок для измеренных углов и расстояний, пользуясь рекомендациями, изложенными в § 154.

$$\begin{aligned}
 1....v_{\beta 1} &= v_{A1}^B = (a_{B1} - a_{BA})\xi_B + (b_{B1} - b_{BA})\eta_B + a_{BA}\xi_A + b_{BA}\eta_A - a_{B1}\xi_1 - b_{B1}\eta_1 + l_{A1}^B; \\
 2....v_{\beta 2} &= v_{B2}^1 = (a_{12} - a_{1B})\xi_1 + (b_{12} - b_{1B})\eta_1 + a_{1B}\xi_B + b_{1B}\eta_B - a_{12}\xi_2 - b_{12}\eta_2 + l_{B2}^1; \\
 3....v_{\beta 3} &= v_{1C}^2 = (a_{2C} - a_{21})\xi_2 + (b_{2C} - b_{21})\eta_2 + a_{21}\xi_1 + b_{21}\eta_1 - a_{2C}\xi_C - b_{2C}\eta_C + l_{1C}^2; \\
 4....v_{\beta 4} &= v_{2D}^C = (a_{CD} - a_{C2})\xi_C + (b_{CD} - b_{C2})\eta_C + a_{C2}\xi_2 + b_{C2}\eta_2 - a_{CD}\xi_D - b_{CD}\eta_D + l_{2D}^C; \\
 5....v_{s1} &= v_{B1}^s = -\cos \alpha_{B1}^0 \xi_B - \sin \alpha_{B1}^0 \eta_B + \cos \alpha_{B1}^0 \xi_1 + \sin \alpha_{B1}^0 \eta_1 + l_{B1}^s; \\
 6....v_{s2} &= v_{12}^s = -\cos \alpha_{12}^0 \xi_1 - \sin \alpha_{12}^0 \eta_1 + \cos \alpha_{12}^0 \xi_2 + \sin \alpha_{12}^0 \eta_2 + l_{12}^s; \\
 7....v_{s3} &= v_{2C}^s = -\cos \alpha_{2C}^0 \xi_2 - \sin \alpha_{2C}^0 \eta_2 + \cos \alpha_{2C}^0 \xi_C + \sin \alpha_{2C}^0 \eta_C + l_{2C}^s.
 \end{aligned}
 \tag{16.186}$$

Принимая, что погрешности исходных данных равны нулю, т.е. поправки в них также равны нулю, упростим уравнения (16.186):

$$\begin{aligned}
 1....v_{\beta 1} &= v_{A1}^B = -a_{B1}\xi_1 - b_{B1}\eta_1 + l_{A1}^B; \\
 2....v_{\beta 2} &= v_{B2}^1 = (a_{12} - a_{1B})\xi_1 + (b_{12} - b_{1B})\eta_1 - a_{12}\xi_2 - b_{12}\eta_2 + l_{B2}^1; \\
 3....v_{\beta 3} &= v_{1C}^2 = (a_{2C} - a_{21})\xi_2 + (b_{2C} - b_{21})\eta_2 + a_{21}\xi_1 + b_{21}\eta_1 + l_{1C}^2; \\
 &\tag{16.187}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4....v_{\beta 4} &= v_{2D}^C = a_{C2}\xi_2 + b_{C2}\eta_2 + l_{2D}^C; \\
 5....v_{s1} &= v_{B1}^s = \cos \alpha_{B1}^0 \xi_1 + \sin \alpha_{B1}^0 \eta_1 + l_{B1}^s; \\
 6....v_{s2} &= v_{12}^s = -\cos \alpha_{12}^0 \xi_1 - \sin \alpha_{12}^0 \eta_1 + \cos \alpha_{12}^0 \xi_2 + \sin \alpha_{12}^0 \eta_2 + l_{12}^s; \\
 7....v_{s3} &= v_{2C}^s = -\cos \alpha_{2C}^0 \xi_2 - \sin \alpha_{2C}^0 \eta_2 + l_{2C}^s.
 \end{aligned}$$

Определим коэффициенты  $a$  и  $b$  и свободные члены уравнений поправок.

Пользуясь табл. 16.42, из решения обратных геодезических задач по предварительным координатам точек 1 и 2 вычислим предварительные значения дирекционных углов:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{BA} &= 317^\circ 13' 16,4'' - \text{исходный дирекционный угол}; \\
 \alpha_{B1}^0 &= 69^\circ 50' 00,0'' \dots\dots\dots \alpha_{1B}^0 = 249^\circ 50' 00,0''; \\
 \alpha_{12}^0 &= 102^\circ 52' 16,3'' \dots\dots\dots \alpha_{21}^0 = 282^\circ 52' 16,3''; \\
 \alpha_{2C}^0 &= 11^\circ 36' 41,7'' \dots\dots\dots \alpha_{C2}^0 = 191^\circ 36' 41,7''; \\
 \alpha_{CD} &= 100^\circ 58' 45,8'' - \text{исходный дирекционный угол}.
 \end{aligned}$$

При вычислении коэффициентов  $a$  и  $b$  значения  $s$  следует подставлять в км, угловые поправки в этом случае выражаются в секундах, а линейные поправки – в дециметрах. Коэффициенты  $a$  и  $b$  следует вычислять до 0,001.

$$\begin{aligned}
 a_{B1} &= 20,626 \frac{\sin \alpha_{B1}^0}{s_{B1}^0} = +15,543; \dots\dots\dots a_{1B} = -15,543. \\
 b_{B1} &= -20,626 \frac{\cos \alpha_{B1}^0}{s_{B1}^0} = -5,709; \dots\dots\dots b_{1B} = +5,709. \\
 a_{12} &= 20,626 \frac{\sin \alpha_{12}^0}{s_{12}^0} = +20,880; \dots\dots\dots a_{21} = -20,880. \\
 b_{12} &= -20,626 \frac{\cos \alpha_{12}^0}{s_{12}^0} = +4,771; \dots\dots\dots b_{21} = -4,771.
 \end{aligned}$$

$$a_{2C} = 20,626 \frac{\sin \alpha_{2C}^0}{s_{2C}^0} = +4,018; \dots a_{C2} = -4,018.$$

$$b_{2C} = -20,626 \frac{\cos \alpha_{2C}^0}{s_{2C}^0} = -19,556; \dots b_{C2} = +19,556.$$

Вычисляем по приведенным формулам значения свободных членов уравнений поправок:

$$l_1 = l_{A1}^B = (\alpha_{B1}^0 - \alpha_{BA}^0) - \beta_{A1}^B = (69^\circ 50' 00,0'' - 317^\circ 13' 16,4'') - 112^\circ 36' 45,4'' = -1,8'';$$

$$l_2 = l_{B2}^1 = (\alpha_{12}^0 - \alpha_{1B}^0) - \beta_{B2}^1 = (102^\circ 52' 16,3'' - 249^\circ 50' 00,0'') - 213^\circ 02' 16,8'' = -0,5'';$$

$$l_3 = l_{1C}^2 = (\alpha_{2C}^0 - \alpha_{21}^0) - \beta_{1C}^2 = (11^\circ 36' 41,7'' - 282^\circ 52' 16,3'') - 88^\circ 44' 26,7'' = -1,3'';$$

$$l_4 = l_{2D}^C = (\alpha_{CD}^0 - \alpha_{C2}^0) - \beta_{2D}^C = (100^\circ 58' 45,8'' - 191^\circ 36' 41,7'') - 269^\circ 22' 04,0'' = +0,1'';$$

$$l_5 = l_{B1}^s = s_{B1}^0 - s_{B1} = 1245,634 - 1245,638 = -0,004 \text{ м} = -0,04 \text{ дм};$$

$$l_6 = l_{12}^s = s_{12}^0 - s_{12} = 963,013 - 963,017 = -0,004 \text{ м} = -0,04 \text{ дм};$$

$$l_7 = l_{2C}^s = s_{2C}^0 - s_{2C} = 1033,154 - 1033,151 = +0,003 \text{ м} = +0,03 \text{ дм}.$$

С учетом полученных значений коэффициентов и свободных членов, а также значений  $\sin$  и  $\cos$  дирекционных углов соответствующих направлений составим окончательно уравнения поправок.

$$1 \dots v_{\beta 1} = v_{A1}^B = -15,543 \xi_1 + 5,709 \eta_1 - 1,8;$$

$$2 \dots v_{\beta 2} = v_{B2}^1 = 36,423 \xi_1 - 0,938 \eta_1 - 20,880 \xi_2 - 4,771 \eta_2 - 0,5;$$

$$3 \dots v_{\beta 3} = v_{1C}^2 = 24,898 \xi_2 - 14,785 \eta_2 - 20,880 \xi_1 - 4,771 \eta_1 - 1,3;$$

(16.188)

$$4 \dots v_{\beta 4} = v_{2D}^C = -4,018 \xi_2 + 19,556 \eta_2 + 0,1;$$

$$5 \dots v_{s1} = v_{B1}^s = 0,3447 \xi_1 + 0,9387 \eta_1 - 0,04;$$

$$6 \dots v_{s2} = v_{12}^s = 0,2228 \xi_1 - 0,9749 \eta_1 - 0,2228 \xi_2 + 0,9749 \eta_2 - 0,04;$$

$$7 \dots v_{s3} = v_{2C}^s = -0,9795 \xi_2 - 0,2013 \eta_2 + 0,03.$$

Составим матрицу коэффициентов, свободных членов и весов. Значения весов вычислены в примере п. 153.3.

Шаг 6. Составление и решение системы нормальных уравнений для определения поправок в координаты пунктов 1 и 2.

Правила составления указанных уравнений подробно рассмотрены в предыдущих примерах уравнивания параметрическим способом.

$$1 \dots 2004,4406 \xi_1 - 23,3295 \eta_1 - 1280,4837 \xi_2 + 135,3800 \eta_2 + 36,8749 = 0;$$

$$2 \dots -23,3295 \xi_1 + 59,2507 \eta_1 - 98,7597 \xi_2 + 73,0746 \eta_2 - 3,5712 = 0;$$

$$3 \dots -1280,4837 \xi_1 - 98,7597 \eta_1 + 1073,8363 \xi_2 - 347,1671 \eta_2 - 22,3633 = 0;$$

(16.189)

$$4 \dots 135,3800 \xi_1 + 73,0746 \eta_1 - 347,1671 \xi_2 + 624,7868 \eta_2 + 23,4712 = 0.$$

Таблица 16.43

$j \rightarrow$ $i \downarrow$	1( $\xi_1$ )	2( $\eta_1$ )	3( $\xi_2$ )	4( $\eta_2$ )	$l_i$	$p_i$
1( $\beta_1$ )	-15,543	+5,709	0	0	-1,8	1
2( $\beta_2$ )	+36,423	-0,938	-20,880	-4,771	-0,5	1
3( $\beta_3$ )	-20,880	-4,771	+24,898	-14,785	-1,3	1
4( $\beta_4$ )	0	0	-4,018	+19,556	+0,1	1

$5(s_1)$	+0,3447	+0,9387	0	0	-0,04	1,221
$6(s_2)$	0,2228	-0,9749	-0,2228	+0,9749	-0,04	2,041
$7(s_3)$	0	0	-0,9795	-0,2013	+0,03	1,778

Из решения системы уравнений (16.189) получим:

$$\xi_1 = -0,0559 \text{ дм}; \dots \eta_1 = +0,0063 \text{ дм}; \dots \xi_2 = -0,0655 \text{ дм}; \dots \eta_2 = -0,0626 \text{ дм}.$$

Шаг 7. Вычисление уравнированных значений измеренных углов, расстояний и координат.

После подстановки полученных значений поправок в координаты в уравнения (16.188) получим величины поправок в значения измеренных углов и расстояний:



$$v_{s1} = -0,0534 \text{ дм} \approx -5 \text{ мм};$$

$$v_{s2} = -0,1052 \text{ дм} \approx -10 \text{ мм};$$

$$v_{s3} = +0,1068 \text{ дм} \approx +11 \text{ мм}.$$

Обратим внимание на то, что сумма поправок в углы на  $0,1''$  больше, чем угловая невязка. Это является результатом округлений полученных в расчетах величин. В связи с этим поправку в угол 4, как меньшую из полученных, уменьшим на  $0,1''$  (по ее абсолютной величине). *Здесь мы не будем вычислять уравниваемые значения углов и расстояний, а выполним это непосредственно в шаге 8 в таблице (16.44) контроля уравнивания результатов измерений.*

Вычислим уравниваемые значения координат пунктов 1 и 2:

$$x'_1 = 8794,779 - 0,006 = 8794,773 \text{ м}; \dots y'_1 = 6409,916 + 0,001 = 6409,917 \text{ м};$$

$$x'_2 = 8580,258 - 0,007 = 8580,251 \text{ м}; \dots y'_2 = 7348,732 - 0,006 = 7348,726 \text{ м}.$$

Шаг 8. Контроль уравнивания.

Для контроля уравнивания выполним вычисление координат пунктов 1 и 2 в ведомости (табл. 16.44), измеренные величины в которой заменим на уравниваемые их значения. Совпадение вычисленных координат пунктов 1 и 2 с уравниваемыми, вычисленными в шаге 7 покажет правильность решения задачи.

Таблица 16.44

№№ точек	Гориз. углы $\beta$	Дирекц. углы $\alpha$	Расстояния $S$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№3 точек
A		137°13'16,4"						A
B	112°36'44,5"	69°50'00,9"	1245,633	+429,430	+1169,270	8365,344	5240,647	B
1	213°02'15,9"	102°52'16,8"	963,007	-214,522	+938,809	8794,774	6409,917	1
2	88°44'25,8"	11°36'42,7"	1033,162	+1012,017	+207,955	8580,252	7348,726	2



C	269°22'03,2"					9592,269	7556,681	C
		100°58'45,8"						
D								

Наблюдаем практически полное совпадение с вычислениями в шаге 7. Небольшие (до 1 мм) отклонения являются практически следствием округлений.

#### 155.4. Уравнивание системы полигонометрических ходов с двумя узловыми точками

При решении задачи уравнивания систем полигонометрических ходов с одной или несколькими узловыми точками устанавливают число независимых полигонометрических ходов, включающих данные узловые точки и узловые линии. Для каждого из выбранных ходов составляют три уравнения поправок (16.186), как это выполняется для одиночного полигонометрического хода (см. раздел 155.3).

Решение указанной задачи рассмотрим на примере системы полигонометрических ходов (рис. 16.10) с теми же исходными данными (раздел 153.4).

Шаг 1. Общее число измерений  $n = 19$ , число необходимых измерений  $k = 10$ , число избыточных измерений  $r = 9$ .

Шаг 2. Выбор параметров  $t_j$ .

В качестве параметров  $t_j$  выбираем координаты точек 1, 2, 3, M и N:  $x_1 = t_1, y_1 = t_2; x_2 = t_3, y_2 = t_4; x_3 = t_5, y_3 = t_6; x_M = t_7, y_M = t_8; x_N = t_9, y_N = t_{10}$ .

Шаг. 3. Выражение измеренных величин через выбранные параметры по аналогии с формулами (16.183), (16.184) и (16.185).

Для этого примем для расчетов три независимых полигонометрических хода: (1): A-B-1-M-F-E; (2): A-B-1-M-N-2-C-D; (3): H-G-3-N-2-C-D (как и при уравнивании коррелятным способом).

Предлагаем самостоятельно составить соответствующие формулы.

Шаг 4. Определение приближенных значений  $t_j^0$  параметров  $t_j$ .

Таблица 16.45

№№ точек	Гориз. углы $\beta$	Дирекц. углы $\alpha$	Расстояния $s$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№№ точек
				$\Delta x$	$\Delta y$	X	Y	
A				<b>Ход (1)</b>				
		71°08'14,3"						
B	226°15'25" +0,9"					7183,652	4380,124	B
		117°23'40,2"	475,885	-218,962	+422,519			
				-2	-2			
1	201°36'36" +1,0"					6964,688	4802,641	1
		139°00'17,2"	693,027	-523,072	+454,623			
				-3	-4			
M	280°34'07" +0,9"					6441,613	5257,260	M
		239°34'25,1"	625,329	-316,686	-539,209			

F	84°46'52" +0,9"			-3	-3	6124,924	4718,048	F
		144°21'18,0"	$\sum d$ 1794,241	$W_x$ +8 мм	$W_y$ +9 мм			
E	793°13'00,0" 793°13'03,7" -3,7"							
A				<b>Ход (2)</b>				
		71°08'14,3"						
B	226°15'25" +0,9"					7183,652	4380,124	B
		117°23'39,3"	475,885	-218,962 -3	+422,519 -1			
I	201°36'36" +0,9"					6964,687	4802,642	I
		139°00'15,3"	693,027	-523,072 -4	+454,623 -1			
M	85°02'31" +0,9"					6441,611	5257,264	M
		44°02'46,3"	857,338	+616,229 -6	+596,062 -2			
N	170°15'07" +0,9"					7057,834	5853,324	N
		34°17'53,3"	401,239	+331,466 -3	+226,104 -1			
2	172°53'18" +0,9"					7389,297	6079,427	2
		27°11'11,3"	841,215	+748,273 -5	+384,357 -2			
C	271°07'58" +0,9"					8137,565	6463,782	C
		118°19'14,7"	$\sum d$ 3268,704	$W_x$ +21 мм	$W_y$ +7 мм			
D	1127°10'55,0" 1127°11'00,4" -5,4"							
				<b>Ход (3)</b>				
H								
		339°58'14,2"						
G	78°21'28" +1,3"					7894,521	7173,596	G
		238°19'42,2"	573,421	-301,072 -3	-488,024 +3			
3	178°54'26" +1,3"					7593,446	6685,575	3
		237°14'08,2"	989,716	-535,610 -6	-832,262 +5			
N	337°03'44" +1,3"					7057,830	5853,318	N
		34°17'52,2"	401,239	+331,467 -2	+226,102 +2			
2	172°53'18" +1,3"					7389,295	6079,422	2
		27°11'10,2"	841,215	+748,274 -4	+384,356 +4			
C	271°07'58"					8137,565	6463,782	C
			$\sum d$	$W_x$	$W_y$			
D	1038°20'54,0" 1038°21'00,5" -6,5"	118°19'14,7"	2805,591	+15 мм	-14 мм			

Для этого по каждому из ходов выполним расчеты, аналогичные приведенным в табл. 16.20, но с использованием способа раздельного уравнивания (§ 156, п. 156.1), как это выполняется при обработке разомкнутого теодолитного хода (гл. 7). Расчеты приведены в табл. 16.45.

Приближенные значения параметров из уравнивания раздельным способом проведены в табл. 16.46.

Таблица 16.46

Пункты	1	2	3	M	N
X, м	6964,6875	7389,2960	7593,4460	6441,6120	7057,8320
Y, м	4802,6415	6079,4245	6685,5750	5257,2620	5853,3210

Шаг 5. Приведение функций взаимосвязи измеренных величин к линейному виду, вычисление коэффициентов  $a$  и  $b$  и свободных членов  $l$  уравнений поправок.

Запишем уравнения поправок в измеренные величины с учетом того, что погрешности исходных данных приняты нами равными нулю.

$$\begin{aligned}
 1. v_{\beta 1} &= v_{A1}^B = -a_{B1}\xi_1 - b_{B1}\eta_1 + l_{\beta 1} \\
 2. v_{\beta 2} &= v_{BM}^1 = (a_{1M} - a_{1B})\xi_1 + (b_{1M} - b_{1B})\eta_1 - a_{1M}\xi_M - b_{1M}\eta_M + l_{\beta 2} \\
 3. v_{\beta 3} &= v_{1N}^M = (a_{MN} - a_{M1})\xi_M + (b_{MN} - b_{M1})\eta_M + a_{M1}\xi_1 + b_{M1}\eta_1 - a_{MN}\xi_N - b_{MN}\eta_N + l_{\beta 3} \\
 4. v_{\beta 4} &= v_{M2}^N = (a_{N2} - a_{NM})\xi_N + (b_{N2} - b_{NM})\eta_N + a_{NM}\xi_M + b_{NM}\eta_M - a_{N2}\xi_2 - b_{N2}\eta_2 + l_{\beta 4} \\
 5. v_{\beta 5} &= v_{NC}^2 = (a_{2C} - a_{2N})\xi_2 + (b_{2C} - b_{2N})\eta_2 + a_{2N}\xi_N + b_{2N}\eta_N + l_{\beta 5} \\
 6. v_{\beta 6} &= v_{2D}^C = a_{C2}\xi_2 + b_{C2}\eta_2 + l_{\beta 6} \\
 7. v_{\beta 7} &= v_{1F}^M = (a_{MF} - a_{M1})\xi_M + (b_{MF} - b_{M1})\eta_M + a_{M1}\xi_1 + b_{M1}\eta_1 + l_{\beta 7} \\
 8. v_{\beta 8} &= v_{ME}^F = a_{FM}\xi_M + b_{FM}\eta_M + l_{\beta 8} \\
 9. v_{\beta 9} &= v_{32}^N = (a_{N2} - a_{N3})\xi_N + (b_{N2} - b_{N3})\eta_N + a_{N3}\xi_3 + b_{N3}\eta_3 - a_{N2}\xi_2 - b_{N2}\eta_2 + l_{\beta 9} \\
 10. v_{\beta 10} &= v_{GN}^3 = (a_{3N} - a_{3G})\xi_3 + (b_{3N} - b_{3G})\eta_3 - a_{3N}\xi_N - b_{3N}\eta_N + l_{\beta 10} \\
 11. v_{\beta 11} &= v_{H3}^G = -a_{G3}\xi_3 - b_{G3}\eta_3 + l_{\beta 11} \\
 12. v_{s1} &= \cos \alpha_{B1}\xi_1 + \sin \alpha_{B1}\eta_1 + l_{s1} \\
 13. v_{s2} &= -\cos \alpha_{1M}\xi_1 - \sin \alpha_{1M}\eta_1 + \cos \alpha_{1M}\xi_M + \sin \alpha_{1M}\eta_M + l_{s2} \\
 14. v_{s3} &= -\cos \alpha_{MN}\xi_M - \sin \alpha_{MN}\eta_M + \cos \alpha_{MN}\xi_N + \sin \alpha_{MN}\eta_N + l_{s3} \\
 15. v_{s4} &= -\cos \alpha_{N2}\xi_N - \sin \alpha_{N2}\eta_N + \cos \alpha_{N2}\xi_2 + \sin \alpha_{N2}\eta_2 + l_{s4} \\
 16. v_{s5} &= -\cos \alpha_{2C}\xi_2 - \sin \alpha_{2C}\eta_2 + l_{s5} \\
 17. v_{s6} &= -\cos \alpha_{MF}\xi_M - \sin \alpha_{MF}\eta_M + l_{s6} \\
 18. v_{s7} &= \cos \alpha_{G3}\xi_3 + \sin \alpha_{G3}\eta_3 + l_{s7} \\
 19. v_{s8} &= -\cos \alpha_{3N}\xi_3 - \sin \alpha_{3N}\eta_3 + \cos \alpha_{3N}\xi_N + \sin \alpha_{3N}\eta_N + l_{s8}
 \end{aligned} \tag{16.190}$$

Пользуясь таблицами 16.17 и 16.46, найдем из решения обратных геодезических задач предварительные значения дирекционных углов и расстояний (табл. 16.47).

Вычислим коэффициенты условных уравнений поправок по формулам (16.138) и (16.139) – табл. 16.48.

Таблица 16.47

Направление	Дирекционный угол	Расстояние, м	Направление	Дирекционный угол	Расстояние, м
B-1	117°23'41,6"	475,8850	2-C	27°11'16,3"	841,2117
1-M	139°00'18,4"	693,0280	M-F	239°34'25,3"	625,3343
M-N	44°02'50,0"	857,3292	G-3	238°19'41,9"	573,4201
N-2	34°17'57,5"	401,2371	3-N	237°14'09,1"	989,7116

Таблица 16.48

		$a$	$b$
$\cos \alpha_{B1}^0 = -0,46012$	B1	38,4828	19,9432
$\sin \alpha_{B1}^0 = 0,88786$	1B	-38,4828	-19,9432
$\cos \alpha_{1M}^0 = -0,75477$	1M	19,5241	22,4641
$\sin \alpha_{1M}^0 = 0,65599$	M1	-19,5241	-22,4641

$\cos \alpha_{MN}^o = 0,71876$	MN	16,7273	-17,2928
$\sin \alpha_{MN}^o = 0,69526$	NM	-16,7273	17,2928
$\cos \alpha_{N2}^o = 0,82610$	N2	28,9688	-42,4677
$\sin \alpha_{N2}^o = 0,56352$	2N	-28,9688	42,4677
$\cos \alpha_{2C}^o = 0,88951$	2C	11,2034	-21,8109
$\sin \alpha_{2C}^o = 0,45691$	C2	-11,2034	21,8109
$\cos \alpha_{MF}^o = -0,50643$	FM	28,4422	-16,7045
$\sin \alpha_{MF}^o = -0,86228$	MF	-28,4422	16,7045
$\cos \alpha_{3N}^o = -0,54118$	N3	17,5252	-11,2787
$\sin \alpha_{3N}^o = -0,84090$	3N	-17,5252	11,2787
$\cos \alpha_{G3}^o = -0,52505$	3G	30,6139	-18,8866
$\sin \alpha_{G3}^o = -0,85107$	G3	-30,6139	18,8866

Табл. 16.49

Обозначение поправки	Значение поправки	Обозначение поправки	Значение поправки	Обозначение поправки	Значение поправки
$l_{\beta 1}$	+2,3"	$l_{\beta 8}$	+0,7"	$l_{s4}$	-0,019
$l_{\beta 2}$	+0,8"	$l_{\beta 9}$	+4,4"	$l_{s5}$	-0,033
$l_{\beta 3}$	+0,6"	$l_{\beta 10}$	+1,2"	$l_{s6}$	+0,053
$l_{\beta 4}$	+0,5"	$l_{\beta 11}$	-0,3"	$l_{s7}$	-0,044
$l_{\beta 5}$	+0,8"	$l_{s1}$	0,000	$l_{s8}$	-0,009
$l_{\beta 6}$	+0,4"	$l_{s2}$	+0,010		
$l_{\beta 7}$	-0,1"	$l_{s3}$	-0,088		

Получим значения свободных членов: для угловых поправок – в секундах; для поправок в расстояния – в дециметрах.

Свободные члены для уравнений поправок в углы найдем как разницу вычисленного с использованием предварительных значений дирекционных углов (табл. 16.47) горизонтального угла в точке и измеренным его значением. Свободные члены в уравнения поправок в расстояния определим как разность предварительного значения расстояния (табл. 16.47) и измеренного его значения. Т.е. вычисления производятся в соответствии с формулами вычисления поправок для одиночного полигонометрического хода (раздел 155.3). Значения полученных поправок приведены в табл. 16.49).

С учетом коэффициентов (табл. 16.48) и свободных членов (табл. 16.49) уравнения поправок (16.190) примут вид:

- $v_{\beta 1} = -38,4828 \xi_1 - 19,9432 \eta_1 + 2,3$
- $v_{\beta 2} = 58,0069 \xi_1 + 42,4073 \eta_1 - 19,5241 \xi_M - 22,4641 \eta_M + 0,8$
- $v_{\beta 3} = 36,2514 \xi_M + 5,1713 \eta_M - 19,5241 \xi_1 - 22,4641 \eta_1 - 16,7273 \xi_N + 17,2928 \eta_N + 0,6$
- $v_{\beta 4} = 45,6961 \xi_N - 59,7605 \eta_N - 16,7273 \xi_M + 17,2928 \eta_M - 28,9688 \xi_2 + 42,4677 \eta_2 + 0,5$
- $v_{\beta 5} = 40,1722 \xi_2 - 64,2786 \eta_2 - 28,9688 \xi_N + 42,4677 \eta_N + 0,8$
- $v_{\beta 6} = -11,2034 \xi_2 + 21,8109 \eta_2 + 0,4$
- $v_{\beta 7} = -8,9181 \xi_M + 39,1686 \eta_M - 19,5241 \xi_1 - 22,4641 \eta_1 - 0,1$
- $v_{\beta 8} = 28,4442 \xi_M - 16,7045 \eta_M + 0,7$

(16.191)

9.

$$v_{\beta 9} = 11,4436 \xi_N - 31,1890 \eta_N + 17,5252 \xi_3 - 11,2787 \eta_3 - 28,9688 \xi_2 + 42,4677 \eta_2 + 4,4$$

$$10. v_{\beta 10} = -48,1391 \xi_3 + 30,1653 \eta_3 + 17,5252 \xi_N - 11,2787 \eta_N + 1,2$$

$$11. v_{\beta 11} = 30,6139 \xi_3 - 18,8866 \eta_3 - 0,3$$

$$12. v_{s1} = -0,46012 \xi_1 + 0,88786 \eta_1$$

$$13. v_{s2} = 0,75477 \xi_1 - 0,65599 \eta_1 - 0,75477 \xi_M + 0,65599 \eta_M + 0,010$$

$$14. v_{s3} = -0,71876 \xi_M - 0,69526 \eta_M + 0,71876 \xi_N + 0,69526 \eta_N - 0,088$$

$$15. v_{s4} = -0,82610 \xi_N - 0,56352 \eta_N + 0,82610 \xi_2 + 0,56352 \eta_2 - 0,019$$

$$16. v_{s5} = -0,88951 \xi_2 - 0,45691 \eta_2 - 0,033$$

$$17. v_{s6} = 0,50643 \xi_M + 0,86228 \eta_M + 0,053$$

$$18. v_{s7} = -0,52505 \xi_3 - 0,85107 \eta_3 - 0,009$$

$$19. v_{s8} = 0,54118 \xi_3 + 0,84090 \eta_3 - 0,54118 \xi_N - 0,84090 \eta_N - 0,044$$

Таблица 16.50

	1( $\xi_1$ )	2( $\eta_1$ )	3( $\xi_2$ )	4( $\eta_2$ )	5( $\xi_3$ )	6( $\eta_3$ )	7( $\xi_M$ )	8( $\eta_M$ )	9( $\xi_N$ )	10( $\eta_N$ )	$l_i$	$P_i$
1	-38,483	-19,943									+2,3	1
2	58,007	42,407					-19,524	-22,464			+0,8	1
3	-19,524	-22,464					36,251	5,171	-16,727	17,293	+0,6	1
4			-28,969	42,468			-16,727	17,293	45,696	-59,760	+0,5	1
5			40,172	-64,279					-28,969	42,468	+0,8	1
6			-11,203	21,811							+0,4	1
7	-19,524	-22,464					-8,918	39,169			-0,1	1
8							28,444	-16,704			+0,7	1
9			-28,969	42,468	17,525	-11,279			11,444	-31,189	+4,4	1
10					-48,139	30,165			17,525	-11,279	+1,2	1
11					30,614	-18,887					-0,3	1
12	-0,4601	0,8879									0,000	1,235
13	0,7548	-0,6560					-0,7548	0,6560			+0,010	1,235
14							-0,7188	-0,6953	0,7188	0,6953	-0,088	1,235
15			0,8261	0,5635					-0,8261	-0,5635	-0,019	1,235
16			-0,8895	-0,4569							-0,033	1,235
17							0,5064	0,8623			+0,053	1,235
18					-0,5250	-0,8511					-0,009	1,235
19					0,5412	0,8409			-0,5412	-0,8409	-0,044	1,235

Составим матрицу коэффициентов, свободных членов и весов для получения коэффициентов уравнений поправок в предварительные значения параметров (табл. 16.50).

Шаг 6. Составление и решение нормальных уравнений параметрических поправок.

В результате обработки табл. 16.50 получим систему нормальных уравнений поправок к выбранным параметрам:

$$1..... 5609,07\tau_1 + 4104,68\tau_2 - 1666,89\tau_7 - 2168,16\tau_8 + 326,59\tau_9 - 337,63\tau_{10} - 51,8576 = 0;$$

$$2..... 4104,68\tau_1 + 3206,89\tau_2 - 1441,37\tau_7 - 1949,23\tau_8 + 375,76\tau_9 - 388,47\tau_{10} - 23,1837 = 0;$$

$$3..... 3419,52\tau_3 - 5285,97\tau_4 - 507,68\tau_5 + 326,73\tau_6 + 484,57\tau_7 - 500,95\tau_8 - 2819,85\tau_9 + 4340,14\tau_{10} - 114,274 = 0;$$

$$4..... - 5285,97\tau_3 + 8215,11\tau_4 + 744,25\tau_5 - 478,98\tau_6 - 710,37\tau_7 + 734,39\tau_8 + 4288,09\tau_9 - 6592,57\tau_{10} + 165,399 = 0;$$

$$5..... - 507,68\tau_3 + 744,25\tau_4 + 3562,42\tau_5 - 2226,87\tau_6 - 643,46\tau_9 - 4,21\tau_{10} + 10,1362 = 0;$$

$$\begin{aligned}
6..... 326,73\tau_3 - 478,98\tau_4 - 2226,87\tau_5 + 1395,63\tau_6 + 399,02\tau_9 + 10,673\tau_{10} - 7,7982 &= 0; (16.192) \\
7..... - 1666,89\tau_1 - 1441,37\tau_2 + 484,57\tau_3 - 710,37\tau_4 + 2865,42\tau_7 - 487,11\tau_8 - 1371,40\tau_9 + &+ 1625,90\tau_{10} - 18,6726 = 0; \\
8..... - 2168,16\tau_1 - 1949,23\tau_2 - 500,95\tau_3 + 734,39\tau_4 - 487,11\tau_7 + 2645,69\tau_8 + 703,09\tau_9 - &- 944,60\tau_{10} - 21,6920 = 0; \\
9..... 326,59\tau_1 + 375,76\tau_2 - 2819,85\tau_3 + 4288,09\tau_4 - 673,46\tau_5 + 399,02\tau_6 - 1371,40\tau_7 + &+ 703,09\tau_8 + 3647,06\tau_9 - 4803,14\tau_{10} + 60,9894 = 0; \\
10..... - 337,63\tau_1 - 388,47\tau_2 + 4340,14\tau_3 - 6592,57\tau_4 - 4,21\tau_5 + 10,67\tau_6 + 1625,90\tau_7 - &- 944,60\tau_8 - 4803,14\tau_9 + 6775,69\tau_{10} - 136,3131 = 0;
\end{aligned}$$

Из решения системы линейных уравнений одним из известных способов получим:

$$\begin{aligned}
\tau_1 = \xi_1 &= +0,0362 \partial м = +3,6 мм; ..... \tau_2 = \eta_1 = -0,0104 \partial м = -1,0 мм; \\
\tau_3 = \xi_2 &= +0,2757 \partial м = +27,6 мм; ..... \tau_4 = \eta_2 = +0,1821 \partial м = +18,2 мм \\
\tau_5 = \xi_3 &= +0,1369 \partial м = +13,7 мм; ..... \tau_6 = \eta_3 = +0,1392 \partial м = +13,9 мм
\end{aligned}$$

(16.193)

$$\begin{aligned}
\tau_7 = \xi_M &= 0,0241 \partial м = +2,4 мм; ..... \tau_8 = \eta_M = +0,0404 \partial м = +4,0 мм \\
\tau_9 = \xi_N &= +0,2837 \partial м = +28,4 мм; ..... \tau_{10} = \eta_N = +0,2227 \partial м = +22,3 мм
\end{aligned}$$

Шаг 7. Вычисление поправок, уравненных значений измеренных величин и контроль уравнивания.

Вычислим по формулам (16.191) значения поправок в измеренные величины (табл. 16.51).

Здесь необходимо выполнить предварительный контроль вычисления поправок в углы: сумма поправок по данному полигонометрическому ходу должна быть равна невязке этого хода с обратным знаком. Допустимы расхождения в пределах погрешностей округлений. В примере имеются расхождения до 0,1" (проверьте по суммам соответствующих поправок).

Далее введем поправки в предварительные значения параметров (координат точек), т.е. выполним окончательное уравнивание координат (табл. 16.52). Для этого к значениям координат табл. 16.46 следует прибавить соответствующие поправки (16.193).

Таблица 16.51

Обозначение поправки	Значение поправки	Обозначение поправки	Значение поправки	Обозначение поправки	Значение поправки
$v_{\beta 1}$	+1,1"	$v_{\beta 8}$	+0,8"	$v_{s4}$	-4,8 мм
$v_{\beta 2}$	+1,1"	$v_{\beta 9}$	+1,3"	$v_{s5}$	-36,1 мм
$v_{\beta 3}$	+0,3"	$v_{\beta 10}$	+1,3"	$v_{s6}$	+10,0 мм
$v_{\beta 4}$	+0,2"	$v_{\beta 11}$	+1,3"	$v_{s7}$	-19,4 мм
$v_{\beta 5}$	+1,4"	$v_{s1}$	-2,6 мм	$v_{s8}$	-19,9 мм
$v_{\beta 6}$	+1,3"	$v_{s2}$	+5,2 мм		
$v_{\beta 7}$	+0,7"	$v_{s3}$	+22,5 мм		

Таблица 16.52

Пункты	1	2	3	М	N
X', м	6964,6911	7389,3236	7593,4597	6441,6144	7057,8604
Y', м	4802,6405	6079,4427	6685,5889	5257,2660	5853,3433

Используя данные табл. 16.52 и таблицы координат исходных точек, вычислить уравненные значения дирекционных углов и расстояний (таблица уравненных значений дирекционных углов и расстояний подобна табл. 16.47).

Далее необходимо проверить качество уравнивания всех горизонтальных углов и расстояний по следующей схеме:

- вычислить разность уравненных дирекционных углов направлений, образующих угол ( $\alpha_{BI} - \alpha_{BA} = 117^\circ 23' 40,4'' - 251^\circ 08' 14,3'' = 226^\circ 15' 26,1''$ );

- вычислить уравненное значение угла, т.е. к измеренному значению угла прибавить полученную в табл. 16.51 поправку ( $\beta_I' = 226^\circ 15' 25,0'' + 1,1'' = 226^\circ 15' 26,1''$ ); как видим, разница контрольного угла и уравненного его значения получились одинаковыми в пределах погрешности округлений;

- вычислить уравненное значение расстояния как сумму измеренного расстояния и поправки в него, полученной в табл. 16.51 ( $s_I' = 475,8850 + 0,0228 = 475,8824$  м); из решения обратной геодезической задачи получено такое же значение (разности могут быть также в пределах округлений).

Указанные вычисления следует выполнить для всех измеренных и уравненных элементов. После контроля необходимо выполнить обработку полигонометрических ходов с использованием значений уравненных элементов.

### 155.5. Уравнивание направлений в триангуляции

Порядок уравнивания направлений в триангуляции параметрическим способом следующий.

1. Вычисляют предварительные значения координат определяемых пунктов и дирекционные углы сторон сети.

Здесь, с целью уменьшения влияния нелинейностей дифференцируемых функций, необходимо стремиться к тому, чтобы свободные члены уравнений поправок были как можно меньше по абсолютной величине. Этого можно достичь, если предварительно выполнить уравнивание углов в каждом из треугольников. Невязки в них следует распределить с обратным знаком поровну в каждый угол треугольника.

Из решения обратной геодезической задачи находят дирекционные углы и расстояния элементов сети. Предварительные координаты пунктов находят из решения прямых геодезических задач по длинам сторон и дирекционным углам. Значения расстояний находят по теореме синусов, а дирекционные углы – по кратчайшему пути от ближайшей исходной стороны. Если геодезическое построение позволяет использовать для вычисления координат формулы Юнга, то лучше воспользоваться такой возможностью.

2. Определяют коэффициенты  $a$  и  $b$  уравнений поправок, свободные члены  $l$  и составляют параметрические уравнения поправок.

Коэффициенты  $a$  и  $b$  находят по формулам (16.138) и (16.139), либо используют формулы

$$a_{ki} = \rho'' \frac{\Delta y_{ki}}{\Delta x_{ki}^2 + \Delta y_{ki}^2} = k \Delta y_{ki} ; \quad b_{ki} = -\rho'' \frac{\Delta x_{ki}}{\Delta x_{ki}^2 + \Delta y_{ki}^2} = k \Delta x_{ki} \quad (16.194)$$

Для контроля лучше выполнять вычисления и по формулам (16.138) и по формулам (16.139).

В формулах (16.194) значения приращений координат берут в километрах. При таком выборе размерностей значения поправок в предварительные координаты получают в дециметрах.

Коэффициенты  $a$  и  $b$  вычисляют с точностью до 0,001 при уравнивании сетей 2 класса и с точностью 0,01 – при уравнивании сетей 3 и 4 классов.

Свободные члены уравнений поправок находят по формуле

$$l_{ki} = z_{ki}^0 - z_k^0, \quad (16.195)$$

где

$$z_k^0 = \frac{\sum (\alpha_{ki}^0 - M_{ki})}{n}, \quad (16.196)$$

$$z_{ki}^0 = \alpha_{ki}^0 - M_{ki} \quad (16.197)$$

В формулах (16.195) – (16.197)  $z_k^0$  – предварительное значение ориентирующего угла в пункте  $k$ ;  $\alpha_{ki}^0$  – предварительное значение дирекционного угла указанного направления;  $M_{ki}$  – измеренное направление в пункте  $k$  на пункт  $i$ .

Контроль вычисления свободных членов производится по невязкам  $W$  по формуле

$$l_{ij}^k + l_{kj}^i + l_{ik}^j = -W \quad (16.198)$$

Кроме того, сумма свободных членов на данном пункте

$$[l] = 0 \quad (16.199)$$

Невыполнение указанных условий не более 0,02" при вычислениях до 0,01" и не более 0,2" при вычислениях до 0,1".

Составляют уравнения поправок (16.143)

$$v_{ki} = -\delta z_k + a_{ki} \xi_k + b_{ki} \eta_k - a_{ki} \xi_i - b_{ki} \eta_i + l_{ki}$$

для всех направлений на данном пункте с учетом того (16.147), какой из пунктов исходный и определяемый.

Для упрощения выражений (16.143), уменьшения числа уравнений и исключения из них поправок ориентирования применяют правила Шрейбера.

**Правило 1** (исключение поправок ориентирования).

Если одно из неизвестных в параметрических уравнениях поправок имеет коэффициент «минус единица», то для получения нормального уравнения, не содержащего этого неизвестного, его можно опустить в параметрических уравнениях поправок, добавив к ним сумму этих уравнений (суммарное уравнение) с весом  $p = -1/2n$ , где  $1/2$  – вес измеренного направления,  $n$  – число данных направлений.

Пусть имеем несколько ( $n$ ) уравнений





Рассмотрим принцип составления уравнений поправок для схемы триангуляции (рис. 16.14), состоящей из двух треугольников (10 направлений). Пункты 1 и 2 – исходные, пункты 3 и 4 – определяемые.

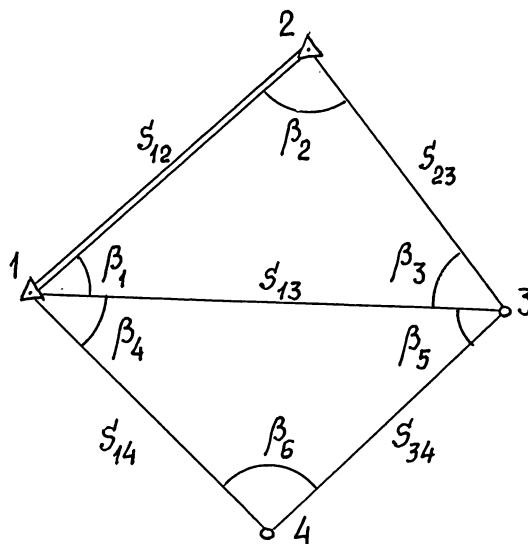


Рис. 16.14. Схема триангуляции

Составим уравнения поправок отдельно для каждого пункта, принимая, что погрешности исходных данных равны нулю: используются формулы (16.143) и (16.147).

Пункт 1 (исходный).

1.  $v_{12} = -\delta z_1 + l_{12}$
2.  $v_{13} = -\delta z_1 - a_{13}\xi_3 - b_{13}\eta_3 + l_{13}$
3.  $v_{14} = -\delta z_1 - a_{14}\xi_4 - b_{14}\eta_4 + l_{14}$

Пункт 2 (исходный).

$$4. v_{21} = -\delta z_2 + l_{21} \quad (16.207)$$

$$5. v_{23} = -\delta z_2 - a_{23}\xi_3 - b_{23}\eta_3 + l_{23}$$

Пункт 3 (определяемый).

6.  $v_{31} = -\delta z_3 + a_{31}\xi_3 + b_{31}\eta_3 + l_{31}$
7.  $v_{32} = -\delta z_3 + a_{32}\xi_3 + b_{32}\eta_3 + l_{32}$
8.  $v_{34} = -\delta z_3 + a_{34}\xi_4 + b_{34}\eta_4 - a_{34}\xi_3 - b_{34}\eta_3 + l_{34}$

Пункт 4 (определяемый).

9.  $v_{41} = -\delta z_4 + a_{41}\xi_4 + b_{41}\eta_4 + l_{41}$
10.  $v_{43} = -\delta z_4 + a_{43}\xi_4 + b_{43}\eta_4 - a_{43}\xi_3 - b_{43}\eta_3 + l_{43}$

Применим для уравнений (16.) 1-е правило Шрейбера, т.е. исключим неизвестное  $\delta z_i$ , принимая во внимание условие (16.). Получим:

- пункт 1(исходный):

1.  $v_{12} = l_{12}; \dots p = 0,5$
2.  $v_{13} = -a_{13}\xi_3 - b_{13}\eta_3 + l_{13}; \dots p = 0,5$

$$3. \nu_{14} = -a_{14}\xi_4 - b_{14}\eta_4 + l_{14}; \dots p = 0,5$$

$$4. \nu_{\sum(1)} = -a_{13}\xi_3 - b_{13}\eta_3 - a_{14}\xi_4 - b_{14}\eta_4; \dots p = -\frac{1}{6}$$

- пункт 2 (исходный):

$$5. \nu_{21} = l_{21}; \dots p = 0,5 \quad (16.208)$$

$$6. \nu_{23} = -a_{23}\xi_3 - b_{23}\eta_3 + l_{23}; \dots p = 0,5$$

$$7. \nu_{\sum(2)} = -a_{23}\xi_3 - b_{23}\eta_3 + l_{23}; \dots p = -0,25$$

- пункт 3 (определяемый):

$$8. \nu_{31} = a_{31}\xi_3 + b_{31}\eta_3 + l_{31}; \dots p = 0,5$$

$$9. \nu_{32} = a_{32}\xi_3 + b_{32}\eta_3 + l_{32}; \dots p = 0,5$$

$$10. \nu_{34} = a_{34}\xi_3 + b_{34}\eta_3 - a_{34}\xi_4 - b_{34}\eta_4 + l_{34}; \dots p = 0,5$$

$$11. \nu_{\sum(3)} = (a_{31} + a_{32} + a_{34})\xi_3 + (b_{31} + b_{32} + b_{34})\eta_3 - a_{34}\xi_4 - b_{34}\eta_4; \dots p = -\frac{1}{6}$$

- пункт 4 (определяемый):

$$12. \nu_{41} = a_{41}\xi_4 + b_{41}\eta_4 + l_{41}; \dots p = 0,5$$

$$13. \nu_{43} = a_{43}\xi_4 + b_{43}\eta_4 - a_{43}\xi_3 - b_{43}\eta_3 + l_{43}; \dots p = 0,5$$

$$14. \nu_{\sum(4)} = (a_{41} + a_{43})\xi_4 + (b_{41} + b_{43})\eta_4 - a_{43}\xi_3 - b_{43}\eta_3; \dots p = -0,25$$

Уравнения 1 и 5 в системе уравнений (16.208) можно исключить, поскольку приведенные поправки являются известными. Кроме того, следует иметь в виду, что при преобразованиях изменяются значения поправок. В связи с этим нами условно приняты такие же обозначения в формулах (16.208), как и в формулах (16.207).

Далее сгруппируем уравнения для взаимнообратных направлений и применим к ним 2-е правило Шрейбера. Примем также во внимание, что  $a_{ik} = -a_{ki}$  и  $b_{ik} = b_{ki}$ . Для удобства выполним такие преобразования, чтобы в общих формулах коэффициенты были положительными.

Направление 1-3(3-1):

$$1. \nu_{(13)(31)} = a_{31}\xi_3 + b_{31}\eta_3 + l_{(13)(31)}; \dots p = 1$$

Направление 1-4(4-1):

$$2. \nu_{(14)(41)} = a_{41}\xi_4 + b_{41}\eta_4 + l_{(14)(41)}; \dots p = 1$$

Направление 2-3(3-2):

$$3. \nu_{(23)(32)} = a_{32}\xi_3 + b_{32}\eta_3 + l_{(23)(32)}; \dots p = 1 \quad (16.209)$$

Направление 3-4(4-3):

$$4. \nu_{(34)(43)} = a_{34}\xi_3 + b_{34}\eta_3 + a_{43}\xi_4 + b_{43}\eta_4 + l_{(34)(43)}; \dots p = 1$$

Остальные уравнения – уравнения сумм в системе (16.208):

$$5. \nu_{\sum(1)} = -a_{13}\xi_3 - b_{13}\eta_3 - a_{14}\xi_4 - b_{14}\eta_4; \dots p = -\frac{1}{6}$$

$$6. \nu_{\sum(2)} = -a_{23}\xi_3 - b_{23}\eta_3 + l_{23}; \dots p = -0,25$$

$$7. \nu_{\sum(3)} = (a_{31} + a_{32} + a_{34})\xi_3 + (b_{31} + b_{32} + b_{34})\eta_3 - a_{34}\xi_4 - b_{34}\eta_4; \dots p = -\frac{1}{6}$$

$$8. \nu_{\sum(4)} = (a_{41} + a_{43})\xi_4 + (b_{41} + b_{43})\eta_4 - a_{43}\xi_3 - b_{43}\eta_3; \dots p = -0,25$$

Обратим внимание на то, что в системе (16.209) уравнения 3 и 6 можно объединить, используя 2-е правило Шрейбера. Т.е. вместо указанных уравнений записать объединенное -

$$v_{(23)(32)} - \sum_{(2)} = a_{32}\xi_3 + b_{32}\eta_3 + \frac{l_{(32)(23)}}{p_{(3)} + p_{(6)}}; \dots p = 0,75 \quad (16.210)$$

После составления уравнений поправок в них подставляют вычисленные ранее коэффициенты и свободные члены, для упрощения вычислений все уравнения приводят к весу, равному  $\pm 1$  (3-е правило) решают уравнения по установленным правилам и вычисляют поправки к предварительным координатам определяемых пунктов (в рассматриваемом случае – к координатам пунктов 3 и 4).

Все вычисления, связанные с определением уравниваемых значений результатов измерений и контрольные вычисления выполняются по правилам, изложенным в § 154.

Далее в примере рассмотрено уравнивание направлений в сети триангуляции, состоящей из двух треугольников, в одном из которых имеется базисная (исходная) сторона, определяемая пунктами 1 и 2 (рис. 16.14).

Таблица 16.53

Пункт	Направления	Значение направления, $M_{ki}$	Угол $\beta$	Значение угла
1	1 – 2	0° 00' 00,0"	$\beta_1$	60° 30' 33,6"
	1 – 3	60° 30' 33,6"	$\beta_2$	74° 50' 09,9"
	1 – 4	129° 14' 00,1"	$\beta_3$	44° 39' 17,7"
2	2 – 3	0° 00' 00,0"	$\sum \beta_{(1)}$	180° 00' 01,2"
	2 – 1	74° 50' 09,9"	$W_{(1)}$	+1,2"
3	3 – 4	0° 00' 00,0"	$\beta_4$	68° 43' 26,5"
	3 – 1	60° 58' 03,6"	$\beta_5$	60° 58' 03,6"
	3 – 2	105° 37' 21,3"	$\beta_6$	50° 18' 27,5"
4	4 – 1	0° 00' 00,0"	$\sum \beta_{(2)}$	179° 59' 57,6"
	4 – 3	50° 18' 27,5"	$W_{(2)}$	-2,4"

Координаты пунктов 1 и 2:

$X_1 = 5364,756$  м;  $Y_1 = 4256,214$  м;  $X_2 = 8836,421$  м;  $Y_2 = 5748,265$  м.

Исходный дирекционный угол  $\alpha_{12} = 23^\circ 15' 25,38''$ , длина исходной стороны (базиса)  $S_{12} = 3778,7133$  м (из решения обратной геодезической задачи).

В данном геодезическом построении измерены направления в каждом из пунктов (всего 10 направлений) и вычислены углы  $\beta_i$  (табл. 16.53).

Все вычисления в примерах будем выполнять на порядок выше, а округлять затем только уравниваемые величины.

Предварительно выполним следующую обработку в схеме триангуляции: по теореме синусов найдем стороны  $S_{23}$ ,  $S_{14}$  и  $S_{43}$ ; вычислим дирекционные углы направлений 2-3, 1-4 и 4-3 через известный дирекционный угол направления 1-2 и вычисленные значения углов: определим предварительные координаты точек 3 и 4 по ходу 1-2-3-4-1-2 и выполним предварительное уравнивание координат (табл. 16.54); по полученным данным из решения

обратной геодезической задачи найдем дирекционные углы определяемых сторон сети.

$$S_{23} = S_{12} \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_3} = 4679,799 \text{ м}; \dots S_{14} = S_{12} \frac{\sin \beta_2 \sin \beta_5}{\sin \beta_3 \sin \beta_6} = 5896,343 \text{ м}; \dots S_{34} = S_{14} \frac{\sin \beta_4}{\sin \beta_5} = 6284,090 \text{ м}.$$

$$\alpha_{23} = \alpha_{21} - \beta_2 = 128^\circ 25' 15,5''; \dots \alpha_{14} = \alpha_{12} + \beta_1 + \beta_4 = 152^\circ 29' 25,5''; \dots \alpha_{43} = \alpha_{41} + \beta_6 = 22^\circ 47' 53,0''.$$

Таблица 16.54

№№ точек	Дирекц. углы $\alpha$	Расстояния $S$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№№ точек
			$\Delta x$	$\Delta y$	X	Y	
1	23°15'25,4"						
2	128°25'15,5"	4679,799	-2908,189	+3666,464	8836,421	5748,265	2
3	202°47'53,0"	6284,090	-5793,154	-2434,986	5928,232	9414,729	3
4	332°29'25,5"	5896,343	+5229,665	-2723,503	135,078	6979,743	4
1					5364,743	4256,240	1
					<b>5364,756</b>	<b>4256,214</b>	<b>1(исх)</b>

Пользуясь табл. 16.54, вычислим по формулам (16.194) значения коэффициентов уравнений поправок (табл. 16.55).

Таблица 16.55

Направление	$a$	$b$
1-3	+3,951	-0,432
2-3	+3,453	+2,739
3-4	-1,272	+3,026
1-4	+1,616	+3,103

Вычислим по формуле (16.196) значения ориентирующих углов в пунктах:

$$\delta z_1 = 23^\circ 15' 25,29''; \dots \delta z_2 = 128^\circ 25' 15,75''; \dots \delta z_3 = 202^\circ 47' 54,56''; \dots \delta z_4 = 332^\circ 29' 26,02''$$

Значения свободных членов находим по формуле (16.195) – табл. 16.56.

Таблица 16.56

Пункт 1	$l$	Пункт 2	$l$	Пункт 3	$l$	Пункт 4	$l$
1-2	+0,09	2-1	-0,27	3-1	+0,45	4-1	-0,43
1-3	-0,28	2-3	+0,27	3-2	+0,16	4-3	+0,42
1-4	+0,20			3-4	-0,62		
$\sum l$	+0,01		0		-0,01		-0,01

Незначительные отступления от условия (16.199) объясняются погрешностями округлений.

После подстановки значений коэффициентов  $a$  и  $b$  и свободных членов  $l$  в уравнения (16.209) с учетом преобразований значений свободных членов при объединениях уравнений по правилам Шрейбера получим:

$$\begin{aligned} 1. & -3,951 \xi_3 + 0,432 \eta_3 + 0,085 ; \dots p = 1 \\ 2. & -1,616 \xi_4 - 3,103 \eta_4 - 0,115 ; \dots p = 1 \\ 3. & -3,453 \xi_3 - 2,739 \eta_3 + 0,215 ; \dots p = 1 \\ 4. & -1,272 \xi_3 + 3,026 \eta_3 + 1,272 \xi_4 - 3,026 \eta_4 - 0,100 ; \dots p = 1 \end{aligned} \quad (16.210)$$

$$\begin{aligned} 5. & -3,951 \xi_3 + 0,432 \eta_3 - 1,616 \xi_4 - 3,103 \eta_4 ; \dots p = -\frac{1}{6} \\ 6. & -3,453 \xi_3 - 2,739 \eta_3 ; \dots p = -0,25 \\ 7. & -8,676 \xi_3 + 0,719 \eta_3 + 1,272 \xi_4 - 3,026 \eta_4 ; \dots p = -\frac{1}{6} \\ 8. & -0,344 \xi_3 - 6,129 \eta_3 - 1,272 \xi_4 + 3,026 \eta_4 ; \dots p = -0,25 \end{aligned}$$

Приведем уравнения 5, 6, 7 и 8 системы (16.210) к весам, равным «минус единице». Для этого умножим коэффициенты и свободные члены этих уравнений на  $\sqrt{|p|}$ . Получим

$$\begin{aligned} 1. & -3,951 \xi_3 + 0,432 \eta_3 + 0,085 ; \dots p = 1 \\ 2. & -1,616 \xi_4 - 3,103 \eta_4 - 0,115 ; \dots p = 1 \\ 3. & -3,453 \xi_3 - 2,739 \eta_3 + 0,215 ; \dots p = 1 \\ 4. & -1,272 \xi_3 + 3,026 \eta_3 + 1,272 \xi_4 - 3,026 \eta_4 - 0,100 ; \dots p = 1 \end{aligned} \quad (16.211)$$

$$\begin{aligned} 5. & -1,613 \xi_3 + 0,176 \eta_3 - 0,660 \xi_4 - 1,267 \eta_4 ; \dots p = -1 \\ 6. & -1,727 \xi_3 - 1,370 \eta_3 ; \dots p = -1 \\ 7. & -3,542 \xi_3 + 0,294 \eta_3 + 0,519 \xi_4 - 1,235 \eta_4 ; \dots p = -1 \\ 8. & -0,172 \xi_3 - 3,065 \eta_3 - 0,636 \xi_4 + 1,513 \eta_4 ; \dots p = -1 \end{aligned}$$

Составим по уравнениям (16.211) матрицу коэффициентов, свободных членов и весов для получения нормальных уравнений поправок (табл. 16.57).

Таблица 16.57

	$1(\xi_3)$	$2(\eta_3)$	$3(\xi_4)$	$4(\eta_4)$	$l$	$p$
1	-3,951	0,432			0,085	1
2			-1,616	-3,103	-0,115	1
3	-3,453	-2,739			0,215	1
4	-1,272	3,026	1,272	-3,026	-0,100	1
5	-1,613	0,176	-0,660	-1,267	0	-1
6	-1,727	-1,370			0	-1
7	-3,542	0,294	0,519	-1,235	0	-1
8	-0,172	-3,065	-0,636	1,513	0	-1

В соответствии с правилами составления нормальных уравнений получим:

$$\begin{aligned} 1. & 10,992 \xi_3 + 2,334 \eta_3 - 0,954 \xi_4 - 2,309 \eta_4 - 0,959 = 0 \\ 2. & 2,334 \xi_3 + 5,457 \eta_3 + 1,863 \xi_4 - 3,933 \eta_4 - 0,867 = 0 \end{aligned}$$

$$3. - 0,954 \xi_3 + 1,863 \eta_3 + 3,120 \xi_4 + 1,932 \eta_4 + 0,061 = 0 \quad (16.212)$$

$$4. - 2,309 \xi_3 - 3,933 \eta_3 + 1,932 \xi_4 + 13,366 \eta_4 + 0,666 = 0$$

Из решения системы уравнений (16.212) значения поправок равны:

$$\xi_3 = +0,026 \text{ дм} = +2,6 \text{ мм}; \dots \eta_3 = +0,263 \text{ дм} = +26,3 \text{ мм};$$

$$\xi_4 = +0,207 \text{ дм} = -20,7 \text{ мм}; \dots \eta_4 = +0,062 \text{ дм} = +6,2 \text{ мм}$$

Полученные поправки следует ввести в значения предварительных координат пунктов 3 и 4 (табл. 16.54).

Вычисляем поправки (в секундах) в направления:  $\delta z_1 = +0,05$ ;  $\delta z_2 = -0,40$ ;  $\delta z_3 = -0,16$ ;  $\delta z_4 = +0,23$ .

Используя первоначальные формулы поправок (16.207), определим поправки (в секундах) в направления и в измеренные углы:

$$v_{12} = -0,05 + 0,09 = +0,04$$

$$v_{\beta 1} = v_{13} - v_{12} = -0,31 - 0,04 = -0,35$$

$$v_{13} = -0,05 + 0,01 - 0,28 = -0,31$$

$$v_{\beta 2} = v_{21} - v_{23} = 0,13 + 0,14 = +0,27$$

$$v_{14} = -0,05 + 0,14 + 0,20 = +0,29$$

$$v_{\beta 3} = v_{32} - v_{31} = -0,49 - 0,62 = -1,11$$

$$v_{21} = 0,40 - 0,27 = +0,13$$

$$\sum v_{\beta (1)} = -1,19 \text{ (невязка} = +1,2)$$

$$v_{23} = 0,40 - 0,81 + 0,27 = -0,14$$

$$v_{31} = 0,16 + 0,01 + 0,45 = +0,62$$

$$v_{32} = 0,16 - 0,81 + 0,16 = -0,49$$

$$v_{\beta 4} = v_{14} - v_{13} = 0,29 + 0,31 = +0,60$$

$$v_{34} = 0,16 + 0,31 - 0,62 = -0,15$$

$$v_{\beta 5} = v_{31} - v_{34} = 0,62 + 0,15 = +0,77$$

$$v_{41} = -0,23 + 0,14 - 0,43 = -0,52$$

$$v_{\beta 6} = v_{43} - v_{41} = 0,50 + 0,52 = +1,02$$

$$v_{43} = -0,23 + 0,31 + 0,42 = +0,50$$

$$\sum v_{\beta (2)} = +2,39 \text{ (невязка} = -2,4)$$

Убеждаемся, что поправки вычислены правильно. Небольшое несоответствие в величинах практических невязок и сумм поправок вполне объясняется погрешностями округлений.

Предлагаем самостоятельно закончить дальнейшую обработку уравнивания с выполнением необходимых контрольных вычислений.

## § 156. Способ раздельного уравнивания

### 156.1. Уравнивание полигонометрического хода

Этот способ рассматривался ранее при обработке разомкнутого теодолитного хода (гл. 7).

Суть способа заключается в следующем.

1. Уравнивают горизонтальные углы (дирекционные углы), распределяя полученную угловую невязку поровну во все углы, либо нарастающим итогом – в дирекционные углы, вычисленные по измеренным горизонтальным углам. Полученные значения дирекционных углов полагают уравненными и в дальнейшем других поправок в них уже не вводят.

2. Вычисляют по уравненным дирекционным углам и измеренным сторонам приращение координат. Невязки  $W_x$  и  $W_y$  распределяют по соответствующим приращениям пропорционально длинам сторон, которые использовались для вычисления данного приращения:

$$v_{xi} = -\frac{W_x}{[d_i]} d_i; \quad v_{yi} = -\frac{W_y}{[d_i]} d_i \quad (16.213)$$

В качестве практического уравнивания рассмотрим полигонометрический ход, приведенный в примерах п. 153.3 и п. 155.3.

Весь процесс уравнивания приведен в табл. 16.58.

Таблица 16.58

№№ точек	Гориз. углы $\beta$	Дирекц. углы $\alpha$	Расстояния $s$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№№ точек
				$\Delta x$	$\Delta y$	X	Y	
A		137°13'16,4"		<b>Ход (1)</b>				
B	-0,8" 112°36'45,4"	69°50'01,8"	1245,638	+429,431 -0,006	+1169,275 +0,005	8365,344	5240,647	B
1	-0,9" 213°02'16,8"	102°52'18,6"	963,017	-214,524 -0,005	+938,819 +0,003	8794,769	6409,927	1
2	-0,9" 88°44'26,7"	11°36'45,3"	1033,151	+1012,006 -0,005	+207,953 +0,004	8580,240	7348,749	2
C	-0,9" 269°22'04,0"	100°58'49,3"	$[d_i]$ 3241,806	$[\Delta x]$ +1226,913	$[\Delta y]$ +2316,047	9592,241	7556,706	C
D		Исходный 100°58'45,8"		$[\Delta x](\text{теор})$ +1226,897	$[\Delta y](\text{теор})$ +2316,059			
		$W_\beta = +3,5"$		$W_x$ +0,016	$W_y$ -0,012			

Пояснения к расчетам в табл. 16.58.

1. Угловая невязка (+3,5") получена как разность вычисленного и исходного дирекционных углов конечной линии хода.

2. Поправки в углы распределены поровну с обратным невязке знаком.

3. Невязки в приращениях координат равны разности сумм приращений и разности координат конечной и начальной точек хода:

$$W_x = +1226,913 - (9592,241 - 8365,344) = +0,016 \text{ м};$$

$$W_y = +2316,047 - (7556,706 - 5240,647) = -0,012 \text{ м}.$$

4. Окончательные значения координат точек вычислены с учетом поправок в приращения координат.

## 156.2. Система полигонометрических ходов с одной узловой точкой

Задача. Сгущение геодезической сети для выполнения разбивочных работ на строительной площадке шахтного ствола.

При рекогносцировке геодезической сети выявилось, что ближайшие исходные пункты находятся примерно в 2-х км от проектного центра шахтного ствола: № 1365 – пункт 2 класса, № 742 и № 751 – пункты 3 класса. Два пункта 2 класса, № 1368, видимый с пунктов № 1365 и № 742, и № 1363, видимый с пункта № 751, находятся на расстоянии примерно 12 и 8 км соответственно. На местности закреплены точки системы полигонометри-



ческих ходов 2 разряда с одной узловой точкой 3 и узловой линией 3-4 (рис. 16.15).

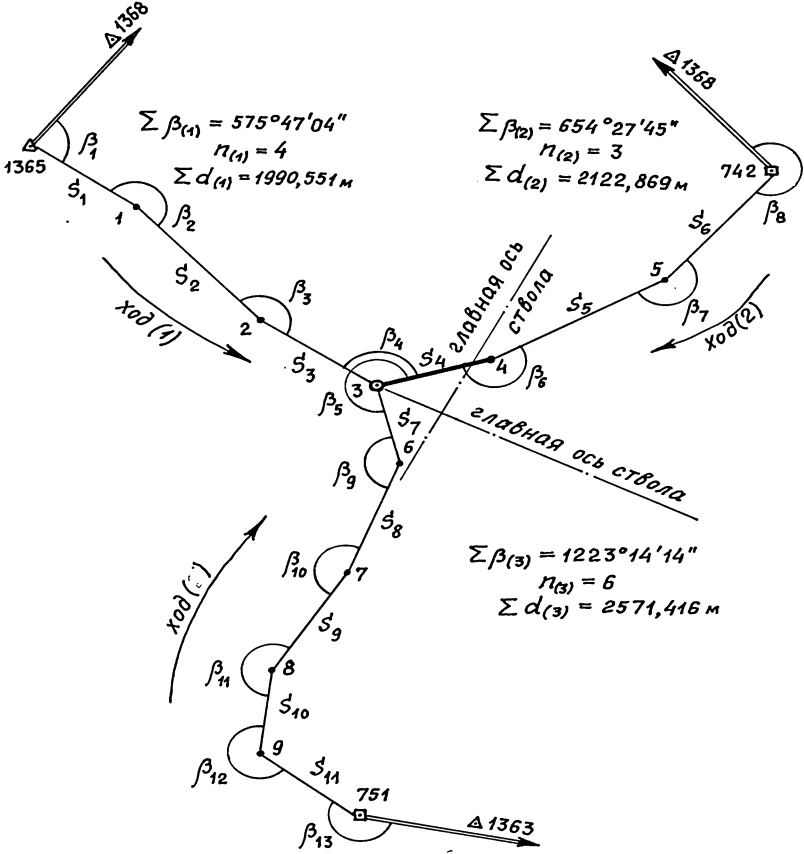


Рис. 16.15. Система полигонометрических ходов с одной узловой точкой

Координаты исходных пунктов № 1365, № 742 и № 751 и дирекционные углы исходных направлений приведены в табл. 16.59.

Таблица 16.59

№№ исходны х пунктов	X, м	Y, м	Обозначение дирекционного угла	Значение дирекционного угла прямой (обратный)
1365	22324,647	8507,422	$\alpha_{1365-1368}$	38°42'18" (218°42'18")
742	21838,950	11724,604	$\alpha_{742-1368}$	320°02'04" (140°02'04")
751	18548,319	9477,758	$\alpha_{751-1363}$	111°15'47" (291°15'47")

Значения измеренных углов и расстояний (горизонтальных проложений) приведены в табл 16.60.

Таблица 16.60

Ход (1)		Ход (2)		Ход (3)	
Г о р и з о н т а л ь н ы е                    у г л ы					
$\beta_1$	92°49'25"	$\beta_8$	272°28'00"	$\beta_{13}$	220°36'28"
$\beta_2$	191°24'18"	$\beta_7$	191°44'05"	$\beta_{12}$	222°54'35"
$\beta_3$	170°30'05"	$\beta_6$	190°15'40"	$\beta_{11}$	201°33'50"
$\beta_4$	121°03'16"			$\beta_{10}$	165°58'16"
				$\beta_9$	147°39'00"
				$\beta_5$	264°32'05"
Р а с с т о я н и я, м					
$S_1$	551,384	$S_6$	738,949	$S_{11}$	523,623
$S_2$	859,047	$S_5$	862,212	$S_{10}$	441,504
$S_3$	580,120	$S_4$	521,708	$S_9$	601,946
				$S_8$	603,005
				$S_7$	401,338

Решение задачи раздельного уравнивания производится с учетом весовых характеристик полигонометрических ходов: для дирекционных углов – число  $n$  углов в ходе; для координат – длина хода.

1. Вычисление вероятнейшего значения дирекционного угла узловой линии 3-4 по ходам (1), (2), (3).

Дирекционный угол узловой линии вычисляется в данном случае трижды, по каждому полигонометрическому ходу, по формуле левых (см. рис. 16.15) горизонтальных углов (7.65):

$$\alpha_{3-4(1)} = \alpha_{1368-1365} + \sum \beta_{(1)} \pm n_{(1)} 180^\circ \pm R \times 360^\circ = 74^\circ 29' 22''$$

$$\alpha_{3-4(2)} = \alpha_{1368-742} + \sum \beta_{(2)} \pm n_{(2)} 180^\circ \pm R \times 360^\circ = 74^\circ 29' 49''$$

$$\alpha_{3-4(3)} = \alpha_{1363-751} + \sum \beta_{(3)} \pm n_{(3)} 180^\circ \pm R \times 360^\circ = 74^\circ 30' 01''$$

Здесь следует иметь в виду, что при вычислении по ходу (2) дирекционный угол узловой линии получится обратным. Поэтому его необходимо будет изменить на  $180^\circ$ .

Веса дирекционных углов определим для единицы веса  $n_e = 4$  ( $p_i = n_e / n_i$ ):

$$p_{\alpha(1)} = 1; \quad p_{\alpha(2)} = 1,33; \quad p_{\alpha(3)} = 0,67.$$

Вероятнейшее значение дирекционных углов находим по формуле (3.39):

$$\alpha_{3-4} = \frac{\alpha_{3-4(1)} p_{\alpha(1)} + \alpha_{3-4(2)} p_{\alpha(2)} + \alpha_{3-4(3)} p_{\alpha(3)}}{p_{\alpha(1)} + p_{\alpha(2)} + p_{\alpha(3)}} = 74^\circ 29' 43''.$$

2. Уравнивание горизонтальных углов.

Угловые невязки в каждом из полигонометрических ходов определяем по формуле (7.67), считая, что конечный дирекционный угол равен вероятнейшему значению дирекционного угла узловой линии. В соответствии с этим получим:  $f_{\beta(1)} = -21''$ ;  $f_{\beta(2)} = +6''$ ;  $f_{\beta(3)} = +18''$ .

Поправки в углы распределяем поровну по формуле (7.71). Таким образом, в углы хода (1) необходимо будет внести поправки по  $+5''$  (а в один из углов  $-+6''$ ), в углы хода (2) – по  $-2''$ , хода (3) – по  $-3''$ . Значения уравненных горизонтальных углов приведены в табл. 16.61.

Таблица 16.61

Ход (1)		Ход (2)		Ход (3)	
У р а в н е н н ы е      г о р и з о н т а л ь н ы е      у г л ы					
$\beta_1$	92°49'30"	$\beta_8$	272°27'58"	$\beta_{13}$	220°36'25"
$\beta_2$	191°24'24"	$\beta_7$	191°44'03"	$\beta_{12}$	222°54'32"
$\beta_3$	170°30'10"	$\beta_6$	190°15'38"	$\beta_{11}$	201°33'47"
$\beta_4$	121°03'21"			$\beta_{10}$	165°58'13"
				$\beta_9$	147°38'57"
				$\beta_5$	264°32'02"

3. Вычисление вероятнейших значений координат узловой точки 3 по ходам (1), (2), (3).

Координаты точки 3 в каждом из полигонометрических ходов определяем по формулам *прямой геодезической задачи* :

$$\begin{aligned} X_{3(i)} &= X_{нач(i)} + \sum (d \cos \alpha)_{(i)} \\ Y_{3(i)} &= Y_{нач(i)} + \sum (d \sin \alpha)_{(i)} \end{aligned} \quad (16.214)$$

Вычисления с учетом уравненных значений горизонтальных углов приведены в табл. 16.62.

**Примечание.** Если длины сторон, образующих углы, заметно отличаются, то в горизонтальные углы, а затем и в дирекционные углы, можно вводить весовые поправки, предварительно определив веса углов.

По ходам (1), (2) и (3) вычисляем значения приращений координат и координат узловой точки 3, используя для этого значения уравненных дирекционных углов. Неуравненные значения координат точек ходов приведены в ведомости в скобках.

Определяем весовые характеристики ходов (1), (2), (3). В качестве единицы веса принимаем примерно среднюю длину хода ( $s_e = 2000$  м). Тогда

$$\begin{aligned} p_{(1)} &= \frac{s_e}{s_{(1)}} = \frac{2000}{1990,551} = 1,005; & p_{(2)} &= \frac{s_e}{s_{(2)}} = \frac{2000}{2122,869} = 0,942; \\ p_{(3)} &= \frac{s_e}{s_{(3)}} = \frac{2000}{2571,416} = 0,778 \end{aligned}$$

Таблица 16.62

№№ точек	Гориз. углы $\beta$	Дирекц. углы $\alpha$	Расстояния $s$ , м	Приращения координат, м		Координаты, м		№№ точек
				$\Delta x$	$\Delta y$	X	Y	
<b>1368</b>				<b>Ход (1)</b>				
<b>1365</b>	92°49'30"	218°42'18"				<b>22324,647</b>	<b>8507,422</b>	<b>1365</b>
		131°31'48"	551,384	-365,574 (+0,032)	+412,771 0,000	(21959,073) 21959,105	(8920,193) 8920,193	1
1	191°14'24"	142°56'12"	859,047	-685,494 (+0,050)	+517,745 0,000	(21273,579) 21273,661	(9437,938) 9437,938	2
2	170°30'10"	133°26'22"	580,120	-398,883 (+0,034)	+421,226 0,000	(20874,696) <b>20874,812</b>	(9859,164) <b>9859,164</b>	<b>3</b>
3	121°03'21"	<b>74°29'43"</b>	$[d_i]$	$W_{x(i)}$	$W_{y(i)}$			

			1990,551	-0,116	-0,000			
<b>1368</b>				<b>Ход (2)</b>				
		140°02'04"						
<b>742</b>	272°27'58"					<b>21838,950</b>	<b>11724,604</b>	<b>742</b>
		232°30'02"	738,949	-449,838	-586,252			
5	191°44'03"			-0,016	+0,009	(21389,112)	(11138,352)	5
		244°14'05"	862,212	-374,791	-776,493	21389,096	11138,361	
4	190°15'38"			-0,019	+0,0011	(21014,321)	10361,859	4
		254°29'43"	521,708	-139,462	-502,722	21014,286	10361,879	
3				-0,012	+0,007	(20874,859)	(9859,137)	3
			$[d_i]$	$W_{X(2)}$	$W_{Y(2)}$	<b>20874,812</b>	<b>9859,164</b>	
			2122,869	+0,047	-0,027			
<b>1363</b>				<b>Ход (3)</b>				
		291°15'47"						
<b>751</b>	220°36'25"					<b>18548,319</b>	<b>9477,758</b>	<b>751</b>
		331°52'12"	523,623	+461,773	-246,874			
9	222°54'32"			-0,019	-0,007	(19010,092)	(9230,884)	9
		14°46'44"	441,504	+426,898	+112,623	19010,073	9230,877	
8	201°33'47"			-0,016	-0,006	(19436,990)	(9343,507)	8
		36°20'31"	601,946	+484,864	+356,715	19436,955	9343,494	
7	165°58'13"			-0,022	-0,008	(19921,854)	(9700,222)	7
		22°18'44"	603,005	+557,857	+228,933	19921,797	9700,201	
6	147°38'57"			-0,022	-0,008	(20479,711)	(9929,155)	6
		349°57'41"	401,338	+395,194	-69,958	20479,632	9929,126	
3	264°32'02"			-0,014	-0,004	(20874,905)	(9859,197)	3
						<b>20874,812</b>	<b>9859,164</b>	
4		74°29'43"	$[d_i]$	$W_{X(3)}$	$W_{Y(3)}$			
			2571,416	+0,093	+0,033			

Находим по формуле (3.39) вероятнейшие значения координат узловой точки 3:

$$X_3 = \frac{X_{3(1)}P_{(1)} + X_{3(2)}P_{(2)} + X_{3(3)}P_{(3)}}{P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)}}; \quad Y_3 = \frac{Y_{3(1)}P_{(1)} + Y_{3(2)}P_{(2)} + Y_{3(3)}P_{(3)}}{P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)}} \quad (16.214)$$

Получим  $X_3 = 20874,812$  м;  $Y_3 = 9859,164$  м.

#### 4. Уравнивание координат точек полигонометрических ходов.

Вычисляем значения невязок в координатах точки 3 по формулам

$$W_{X(i)} = X_{3(i)} - X_3; \quad W_{Y(i)} = Y_{3(i)} - Y_3; \quad (16.215)$$

Полученные значения невязок в координатах приведены в табл. 16.

На этом этапе расчетов необходимо убедиться в качестве выполненных полевых работ. Для этого по формулам (7.80) и (7.81) вычисляют абсолютную и относительную невязки по каждому из ходов и сравнивают их с допустимой невязкой для принятого разряда геодезического построения.

Вычисляем значения поправок в приращения координат по формулам

$$v_{x(i)} = - \frac{W_{xj}}{[d_j]_{(i)}} d_{j(i)}; \quad v_{y(i)} = - \frac{W_{yj}}{[d_j]_{(i)}} d_{j(i)} \quad (16.216)$$

Полученные поправки выписаны в ведомость под значениями приращений координат.

Вычисляем с учетом поправок уравненные значения координат точек ходов. Полученные уравненные значения координат записаны без скобок под предварительно вычисленными координатами.

Качество решения задачи оценивается сходимостью координат узловой точки по всем ходам. Кроме того, как это требуется при обработке аналогичных систем, производят оценку точности по ходам по относительной погрешности хода. Т.е. необходимо вычислить абсолютную и относительную погрешности и проанализировать точность работ сравнением с допуском.

Аналогично выполняется уравнивание систем полигонометрических ходов с двумя и более узловыми точками.

### 156.3. Система нивелирных ходов с одной узловой точкой

На рис. 16.16 представлена система нивелирных ходов с одной узловой точкой  $M$ .

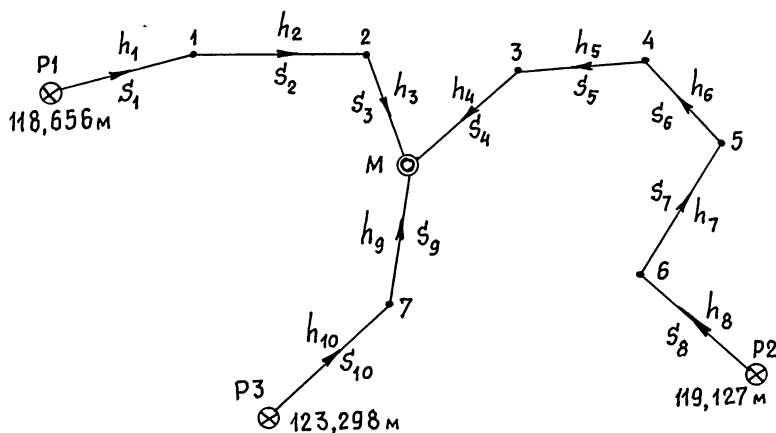


Рис. 16.16. Система нивелирных ходов с одной узловой точкой

В табл. 16.63 приведены значения превышений, длины ходов между точками (в секциях), а также весовые характеристики ходов для  $s_e = 3$  км.

Таблица 16.63

№ хода	№№ точек	Превышения, мм	Длина секции и хода, км	Вес хода
(1)	ГР1 - 1	$h_1 = +3256$	1,06	$p_{(1)} = 0,785$
	1 - 2	$h_2 = -1848$	1,24	
	2 - М	$h_3 = +2651$	1,52	
			$[s_{(1)}] = 3,82$	
(2)	ГР2 - 6	$h_8 = -2033$	1,14	$p_{(2)} = 0,637$
	6 - 5	$h_7 = +1247$	1,20	
	5 - 4	$h_6 = +3916$	0,96	
	4 - 3	$h_5 = -852$	0,84	
	3 - М	$h_4 = +1334$	0,57	
			$[s_{(2)}] = 4,71$	
(3)	ГР3 - 7	$h_{10} = -3211$	0,44	$p_{(3)} = 2,256$
	7 - М	$h_9 = +2650$	0,89	
			$[s_{(3)}] = 1,33$	

1. Трижды по ходам (1), (2) и (3) вычислить высоты узловой точки:

$$H_{M(1)} = H_{IP1} + \sum h_{(1)} = 118,656 + 4,059 = 122,715 \text{ м}$$

$$H_{M(2)} = H_{IP2} + \sum h_{(2)} = 119,127 + 3,612 = 122,739 \text{ м}$$

$$H_{M(3)} = H_{IP3} + \sum h_{(3)} = 123,298 - 0,561 = 122,737 \text{ м}$$

2. Установить единицу веса как примерно среднее арифметическое из длин ходов -

$$s_0 = \frac{[s_{(1)}] + [s_{(2)}] + [s_{(3)}]}{3} = \frac{3,82 + 4,71 + 1,33}{3} \approx 3 \text{ км}$$

и вычислить по формуле веса ходов:

$$P_{(1)} = \frac{3,00}{3,82} = 0,785; \quad P_{(2)} = \frac{3,00}{4,71} = 0,637; \quad P_{(3)} = \frac{3,00}{1,33} = 2,256$$

3. Вычислить среднюю весовую высоту узловой точки по формуле (3.39)

$$H_M^0 = \frac{H_{M(1)}P_{(1)} + H_{M(2)}P_{(2)} + H_{M(3)}P_{(3)}}{P_{(1)} + P_{(2)} + P_{(3)}}$$

Для удобства следует определять среднее весовое значение изменяемой части высоты.

$$H_M^0 = 122,000 + \frac{0,715 \times 0,785 + 0,739 \times 0,637 + 0,737 \times 2,256}{3,678} = 122,733 \text{ м}$$

4. Определить невязки в ходах по формуле

$$\begin{aligned} f_{h(i)} &= H_{M(i)} - H_M^0 \\ f_{h(1)} &= 122,715 - 122,733 = -0,018 \text{ м} = -18 \text{ мм} \\ f_{h(2)} &= 122,739 - 122,733 = +0,006 \text{ м} = +6 \text{ мм} \\ f_{h(3)} &= 122,737 - 122,733 = +0,004 \text{ м} = +4 \text{ мм} \end{aligned} \quad (16.217)$$

5. Вычислить поправки в превышения в ходах с учетом длин секций в ходе по формуле

$$v_{hi} = - \frac{f_{h(j)}}{[s_{(j)}]} s_i, \quad (16.218)$$

где  $[s_{(j)}]$  - длина хода  $j$ ;  $s_i$  - длина секции  $i$  в ходе.

Ход (1):

$$v_{h1} = - \frac{-18}{3,82} 1,06 = +5 \text{ мм}; v_{h2} = - \frac{-18}{3,82} 1,24 = +6 \text{ мм}; v_{h3} = - \frac{-18}{3,82} 1,52 = +7 \text{ мм}.$$

Ход (2):

$$v_{h4} = - \frac{+6}{4,71} 0,57 = -1 \text{ мм}; v_{h5} = - \frac{+6}{4,71} 0,84 = -1 \text{ мм}; v_{h6} = - \frac{+6}{4,71} 0,96 = -1 \text{ мм};$$

$$v_{h7} = - \frac{+6}{4,71} 1,20 = -2 \text{ мм}; v_{h8} = - \frac{+6}{4,71} 1,14 = -1 \text{ мм}.$$

$$\text{Ход (3): } v_{h9} = - \frac{+4}{1,33} 0,89 = -3 \text{ мм}; v_{h10} = - \frac{+4}{1,33} 0,44 = -1 \text{ мм}.$$

Контроль: сумма поправок в превышения хода должна быть равна невязке хода с обратным знаком.

6. Далее необходимо вычислить уравненные значения превышений в ходах с учетом полученных поправок и проконтролировать правильность

уравнивания вычислением трижды значений уравненной высоты узловых точки. Эти значения должны совпасть. Возможны в данном случае незначительные отклонения до 1 мм, что обусловлено округлением результатов вычислений.

Например, для хода (1):

- уравненные значения превышений:  $h_1^0 = +3256 + 5 = +3261$  мм;  $h_2^0 = -1848 + 6 = -1842$  мм;  $h_3^0 = +2651 + 7 = +2658$  мм;

- уравненное значение высоты узловой точки (по данному ходу):

$$H_{M(1)}^0 = H_{IP1} + h_1^0 + h_2^0 + h_3^0 = 118,656 + 3,261 - 1,842 + 2,658 = 122,733 \text{ м.}$$

## § 157. Способ эквивалентной замены

На рис. 16.17 *а* приведена схема нивелирных ходов с тремя узловыми точками *A*, *B* и *C* и двумя исходными реперами *PI* и *P2*. В кружочках на схеме отмечены секции нивелирных линий, указаны номера превышений и длин линий в соответствующих секциях. Значения превышений указаны в мм в соответствии с направлением движения, длины линий даны в км, высоты исходных реперов – в метрах.

1. В трех замкнутых ходах (1), (2), (3) и одном разомкнутом ходе (4), например, от *PI* через т. *A* на *P2*, определить невязки в превышениях:

$$W_{(1)} = +4264 + 1205 - 1652 - 3802 = +15 \text{ мм;}$$

$$W_{(2)} = -2074 - 1205 + 3287 = +8 \text{ мм;}$$

$$W_{(3)} = +1652 + 2074 - 3732 = -6 \text{ мм;}$$

$$W_{(4)} = +4264 + 3287 - (83786 - 76248) = +13 \text{ мм.}$$

2. Вычислить измеренные значения высот узловых точек *A* и *C*.

Высоты точек определим дважды: т. *A* – по ходам (1) и (5); т. *C* – по ходам (2) и (7). Результаты вычислений следует заносить в последовательности расчетов в ведомость уравнивания (табл. 16.64). Запись в таблице сравнительно сложная, поэтому внимательно посмотрите по приведенному примеру последовательность занесения в нее исходных и получаемых в расчетах величин.

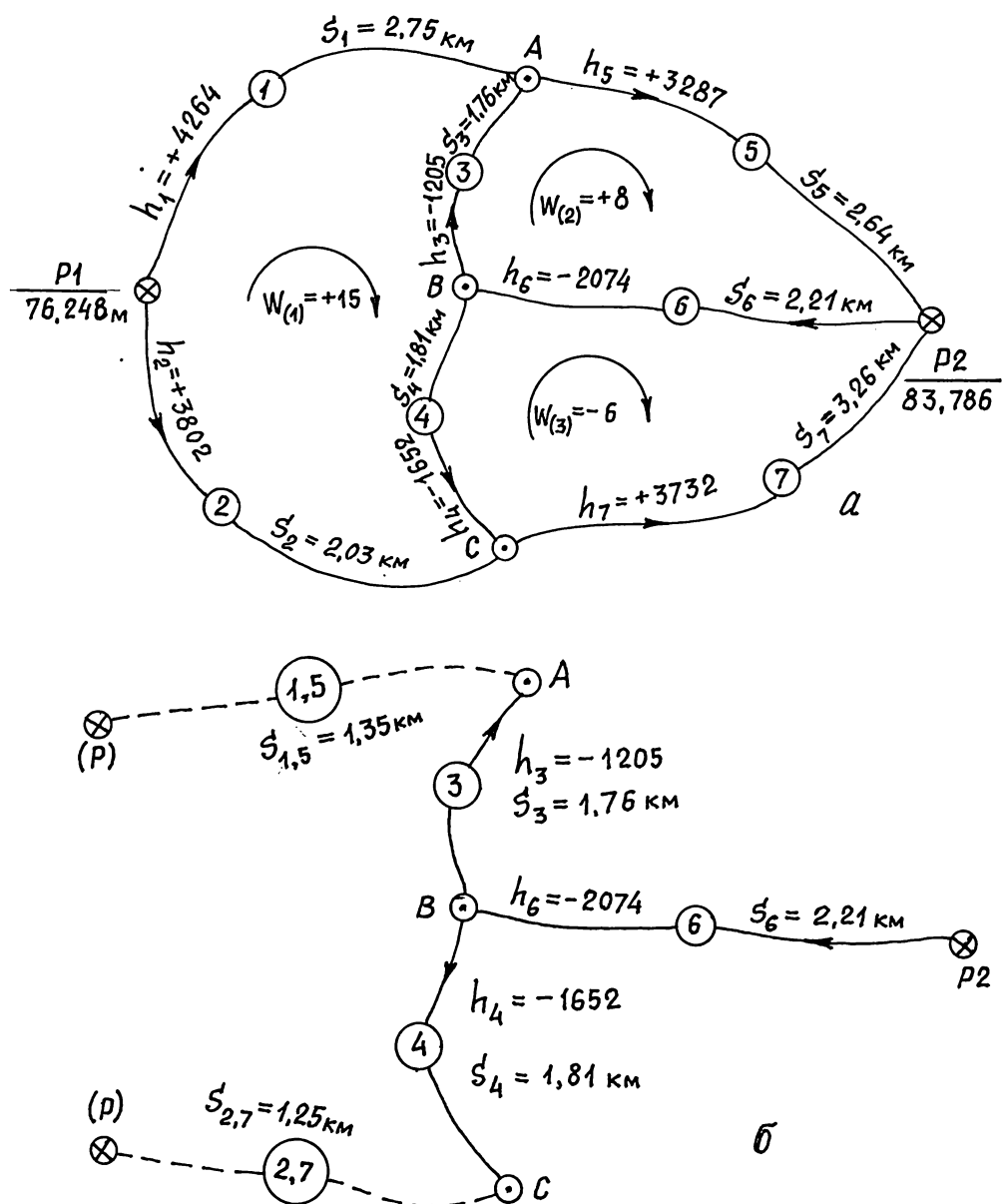


Рис. 16.17. Уравнивание нивелирных ходов способом эквивалентной замены  
 а) схема нивелирных ходов; б) эквивалентная схема



Таблица 16.64

Ход	Номер исходного пункта и	Измеренное превышение, $h$ , мм	Длина хода $S_i$ , км	Вычисленная высота узловой точки, м	Вес $P_i = 2/s_i$	Уравненное значение высоты узловой точки, м	Поправка $v_i$ , мм
	его высота, м						
				<b>Точка А</b>		80,5048	
1	P1	+4264	2,75	80,5120	0,727		-7,2
5	76,248	-3287	2,64	80,4990	0,758		+5,8
				(80,5054)			
(1,5)	P2		(1,35)		1,485		-0,6
3	83,786	+1205	1,76		1,136		-0,8
				<b>Точка С</b>		80,0537	
2	P1	+3802	2,03	80,0500	0,985		+3,7
7	P2	-3732	3,26	80,0540	0,614		-0,3
				(80,0515)			
(2,7)			(1,25)		1,599		+2,2
4		+1652	1,81		1,105		+3,3
				<b>Точка В</b>		81,7090	
(1,5)+3	A	+1205	3,11	81,7104	0,643		-1,4
(2,7)+4	C	+1652	3,06	81,7035	0,654		+5,5
6	P2	-2074	2,21	81,7120	0,905		-3,0
					2,202		

$$H_{A(1)} = H_{P1} + h_1 = 76,2480 + 4,2640 = 80,5120 ;$$

$$H_{A(5)} = H_{P2} - h_{51} = 83,786 - 3,287 = 80,4990 ;$$

$$H_{C(2)} = H_{P1} + h_2 = 76,2480 + 3,802 = 80,0500 ;$$

$$H_{C(7)} = H_{P2} - h_7 = 83,786 - (+3,732) = 80,0540 ;$$

3. Определить веса ходов (1), (2), (5) и (7) по формуле

$$P_{(i)} = \frac{C}{s_i}, \quad (16.219)$$

где  $s$  – длина хода;  $C$  – единица веса (для данных примера принято  $C = 2$  км).

$$P_{(1)} = 0,727 ; \quad P_{(5)} = 0,758 ; \quad P_{(2)} = 0,985 ; \quad P_{(7)} = 0,614 ;$$

4. Вычислить предварительные значения высот т. А и т. С как среднее весовое полученных в п. 2 значений с учетом весов каждого хода:

$$H_A = \frac{H_{A(1)}P_{(1)} + H_{A(5)}P_{(5)}}{P_{(1)} + P_{(5)}} = \frac{80,5120 \times 0,727 + 80,4990 \times 0,758}{1,485} = 80,5054 \text{ м}$$

$$H_C = \frac{H_{C(2)}P_{(2)} + H_{C(7)}P_{(7)}}{P_{(2)} + P_{(7)}} = \frac{80,0500 \times 0,985 + 80,0540 \times 0,614}{1,599} = 80,0515 \text{ м}$$

5. Заменить систему одиночных ходов к точкам А и С от реперов P1 и P2 одним ходом: (1) + (5) → (1,5); (2) + (7) → (2,7) – рис. 16. б. Ходы (1,5) и (2,7) называются *эквивалентными* (очевидно, что не друг другу, а преобразованным первоначальным ходам).

В результате произведенной замены система нивелирных ходов существенно упростится и будет представлять собой систему нивелирных ходов с одной узловой точкой В.

Веса полученных ходов будут равны суммам весов, составляющих ход:

$$P_{(1,5)} = P_{(1)} + P_{(5)} = 0,727 + 0,758 = 1,485; \quad P_{(2,7)} = P_{(2)} + P_{(7)} = 0,985 + 0,614 = 1,599;$$

Длины эквивалентных ходов определяются как отношение единицы веса к весу эквивалентного хода:

$$S_{(1,5)} = \frac{C}{P_{(1,5)}} = \frac{2}{1,485} = 1,35 \text{ км}; \quad S_{(2,7)} = \frac{C}{P_{(2,7)}} = \frac{2}{1,599} = 1,25 \text{ км}$$

Под характеристиками ходов (1,5) и (2,7) в таблицу заносим характеристики ходов (3) и (4) от эквивалентных ходов к узловой точке В.

6. Трижды вычислим предварительное значение высоты узловой точки В по сложным ходам [(1,5) + (3)] и [(2,7) + (4)] и простому ходу (6) от репера Р2:

$$\text{— по ходу } [(1,5) + (3)]: H_B^1 = H_A - h_3 = 80,5054 + 1,205 = 81,7104 \text{ м}$$

$$\text{— по ходу } [(2,7) + (4)]: H_B^{11} = H_C - h_4 = 80,0515 - (-1,652) = 81,7035 \text{ м}$$

$$\text{— по ходу (6): } H_B^{111} = H_{P_2} + h_6 = 83,786 - 2,074 = 81,7120 \text{ м}$$

7. Вычислить характеристики сложных ходов:

$$\text{— длины ходов: } S_{[(1,5)+3]} = 1,35 + 1,76 = 3,11 \text{ км}; \quad S_{[(2,7)+4]} = 1,25 + 1,81 = 3,06 \text{ км}.$$

$$\text{— веса ходов: } P_{[(1,5)+3]} = \frac{C}{S_{[(1,5)+3]}} = \frac{2}{3,11} = 0,643; \quad P_{[(2,7)+4]} = \frac{C}{S_{[(2,7)+4]}} = \frac{2}{3,06} = 0,654;$$

8. Определить окончательное уравненное значение высоты узловой точки В с учетом веса ходов, по которым были получены предварительные высоты этой точки (см. шаг 6):

$$H_B^0 = \frac{H_B^1 P_{[(1,5)+3]} + H_B^{11} P_{[(2,7)+4]} + H_B^{111} P_{(6)}}{P_{[(1,5)+3]} + P_{[(2,7)+4]} + P_{(6)}} = 81,7090 \text{ м}.$$

9. Вычислить поправки по ходам [(1,5)+(3)], [(2,7)+(4)] и (6) по формуле

$$v_i = H_B^0 - H_B^i; \quad (16.220)$$

$$v_{[(1,5)+3]} = 81,7090 - 81,7104 = -0,0014 \text{ м} = -1,4 \text{ мм};$$

$$v_{[(2,7)+4]} = 81,7090 - 81,7035 = +0,0055 \text{ м} = +5,5 \text{ мм};$$

$$v_{(6)} = 81,7090 - 81,7120 = -0,0030 \text{ м} = -3,0 \text{ мм}.$$

Поправки в составляющие ходы находят в весовом отношении к длинам ходов:

$$v_{(1,5)} = v_{[(1,5)+3]} \frac{S_{(1,5)}}{S_{[(1,5)+3]}} = -1,4 \frac{1,35}{3,11} = -0,6 \text{ мм};$$

$$v_3 = v_{[(1,5)+3]} \frac{S_{(3)}}{S_{[(1,5)+3]}} = -1,4 \frac{1,76}{3,11} = -0,8 \text{ мм};$$

$$v_{(2,7)} = v_{[(2,7)+4]} \frac{S_{(2,7)}}{S_{[(2,7)+4]}} = +5,5 \frac{1,25}{3,06} = +2,2 \text{ мм};$$

$$v_{(4)} = v_{[(2,7)+4]} \frac{S_{(4)}}{S_{[(2,7)+4]}} = +5,5 \frac{1,81}{3,06} = +3,3 \text{ мм};$$

10. Определить окончательные уравненные значения высот узловых точек А и С.

Для этого к их предварительным значениям необходимо прибавить полученные по соответствующим ходам поправки:

$$H_A^0 = H_A + v_{(1,5)} = 80,5054 - 0,6 = 80,5048 \text{ м};$$

$$H_C^0 = H_C + v_{(2,7)} = 80,0515 + 2,2 = 80,0537 \text{ м};$$

11. Определить поправки по ходам (1), (5), (2), (7).

Величины поправок по ходам (1) и (5) получаются как разность между уравненным значением высоты узловой точки  $A$  и ее высотами, полученными по соответствующим ходам:

$$v_{(1)} = H_A^0 - H_{A(1)} = 80,5048 - 80,5120 = -0,0072 \text{ м} = -7,2 \text{ мм}$$

$$v_{(5)} = H_A^0 - H_{A(5)} = 80,5048 - 80,4990 = +0,0058 \text{ м} = +5,8 \text{ мм}$$

Аналогично для ходов (2) и (7) через узловую точку  $C$ :

$$v_{(2)} = H_C^0 - H_{C(2)} = 80,0537 - 80,0500 = +0,0037 \text{ м} = +3,7 \text{ мм}$$

$$v_{(7)} = H_C^0 - H_{C(7)} = 80,0537 - 80,0540 = -0,0003 \text{ м} = -0,3 \text{ мм}$$

12. Выполнить контроль уравнивания по формуле

$$[v_i]_j = -W_j \quad (16.221)$$

по каждому из замкнутых полигонов и разомкнутому ходу. Для этого занесем на схему нивелирных ходов значения полученных поправок. Знак поправки на схеме устанавливают в соответствии с направлением движения.

$$[v_i]_{(1)} = (-7,2) + (-0,8) + (-3,3) + (-3,7) = -15 \text{ мм};$$

$$[v_i]_{(2)} = (-5,8) + (-3,0) + (+0,8) = -8 \text{ мм};$$

$$[v_i]_{(3)} = (-0,3) + (3,0) + (+3,3) = +6 \text{ мм};$$

$$[v_i]_{(4)} = (-7,2) + (-5,8) = -13 \text{ мм};$$

## § 158. Способ полигонов В.В.Попова

В этом примере используем схему нивелирных ходов, рассмотренную в § 157.

1. В крупном масштабе привести указанную схему нивелирных ходов (рис. 16.18), на которой следует отметить и пронумеровать независимые полигоны. Число полигонов должно быть равно

$$r = N + q - 1, \quad (16.222)$$

где  $N$  – число замкнутых неперекрывающихся полигонов ( $N = 3$ );  $q$  – число исходных пунктов ( $q = 2$ ). Т.е.  $r = 4$ .

2. На схеме указать длины ходов, направление обхода полигонов (для всех: либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки). Внутри полигонов (под номером полигона) построить таблички невязок, в которые будут заноситься величины невязок в приближениях. С внешней стороны каждого хода разместить таблички поправок в измеренные превышения данного хода (для смежных полигонов вычерчиваются для одного и того же хода две таблички поправок – с двух сторон хода).

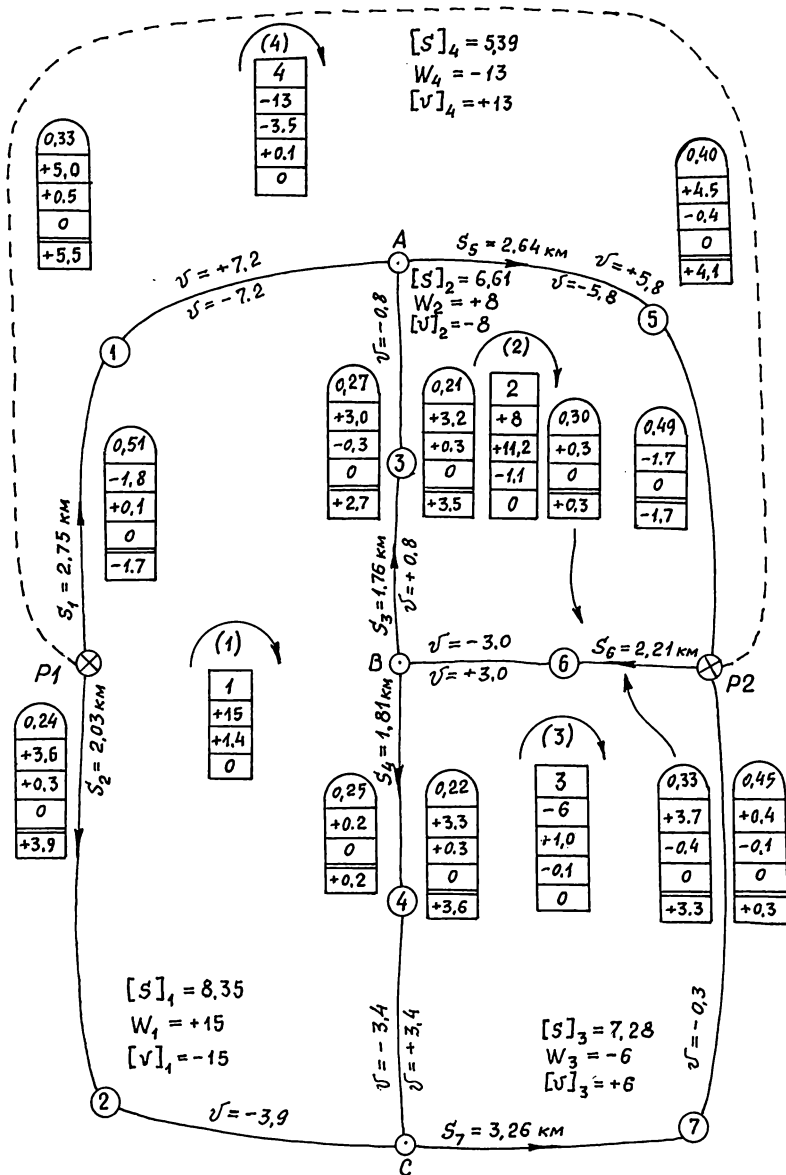


Рис. 16.18. Уравнивание способом полигонов (В.В. Попова)

3. Распределить невязки  $W$  в ходах пропорционально длинам ходов по формуле

$$v_i = \frac{W_{(j)}}{\sum S_{(j)}} s_i \quad (16.223)$$

Веса превышений  $p_i = s_i / \sum s_{(j)}$  записываются в табличке поправок в верхней полукруглой графе (с округлением до 0,01). Сумма весов для полигона должна быть равна 1.

Уравнивание целесообразно начинать с полигона, имеющего *большую* невязку. В этом случае количество приближений сокращается. В примере уравнивание следует начинать с полигона (1).

Полигон (1). Невязка + 15 мм.

$$\begin{aligned}v_1 &= +15 \times 0,33 = +5,0 \text{ мм}; & v_2 &= +15 \times 0,24 = +3,6 \text{ мм}; \\v_3 &= +15 \times 0,21 = +3,2 \text{ мм}; & v_4 &= +15 \times 0,22 = +3,3 \text{ мм}\end{aligned}$$

Полигон (2). В этот полигон входит поправка хода (3), равная +3,2 мм. Поэтому перед распределением поправок значение невязки полигона (2) следует исправить:  $+8,0 + 3,2 = +11,2$  мм.

$$v_3 = +11,2 \times 0,27 = +3,0 \text{ мм}; \quad v_5 = +11,2 \times 0,40 = +4,5 \text{ мм}; \quad v_6 = +11,2 \times 0,33 = +3,7 \text{ мм}.$$

Полигон (3).

Невязка в полигоне исправляется на величины уже известных поправок:  $-6,0 + 3,3 + 3,7 = +1,0$  мм.

$$v_4 = +1,0 \times 0,25 = +0,2 \text{ мм}; \quad v_6 = +1,0 \times 0,30 = +0,3 \text{ мм}; \quad v_7 = +1,0 \times 0,45 = +0,4 \text{ мм}.$$

Полигон (4).

Невязка в полигоне исправляется на величины уже известных поправок:  $+13,0 + 5,0 + 4,5 = +22,5$  мм.

$$v_1 = +22,5 \times 0,51 = +11,5 \text{ мм}; \quad v_5 = +22,5 \times 0,49 = +11,0 \text{ мм}.$$

4. Далее вся процедура уравнивания повторяется, начиная последовательность действий с полигона (1).

Следует иметь в виду, что в последующем во всех полигонах невязка будет образована суммой поправок, находящихся в табличках внутри полигона.

Полигон (1). Невязка:  $-1,8 + 3,0 + 0,2 = +1,4$  мм.

$$v_1 = +0,5 \text{ мм}; \quad v_2 = +0,5 \text{ мм}; \quad v_3 = +0,5 \text{ мм}; \quad v_4 = +0,5 \text{ мм}.$$

Полигон (2). Невязка:  $+0,3 - 1,7 + 0,3 = -1,1$  мм.

$$v_3 = -0,3 \text{ мм}; \quad v_5 = -0,4 \text{ мм}; \quad v_6 = -0,4 \text{ мм}.$$

Полигон (3). Невязка:  $+0,3 - 0,4 = -0,1$  мм.

$$v_4 = 0,0 \text{ мм (округлена)}; \quad v_6 = 0,0 \text{ мм (округлена)}; \quad v_7 = -0,1 \text{ мм}.$$

Полигон (4). Невязка:  $+0,5 - 0,4 = +0,1$  мм.

$$v_5 = 0,0 \text{ мм}; \quad v_1 = +0,1 \text{ мм}.$$

5. Под двойной чертой во всех табличках поправок получить их алгебраическую сумму.

6. Вычислить значения поправок по ходам.

Правило вычисления поправок следующее.

Для хода, принадлежащего двум смежным полигонам, поправка равна алгебраической сумме чисел внутренней и внешней табличек. При этом сумма поправок внешней таблички берется с обратным знаком:

$$\text{- ход (1), полигон (1): } -1,7 + (-5,5) = -7,2 \text{ мм};$$

$$\text{- ход (1), полигон (4): } +5,5 + 1,7 = +7,2 \text{ мм};$$

$$\text{- ход (5), полигон (2): } -1,7 - 4,1 = -5,8 \text{ мм};$$

$$\text{- ход (5), полигон (4): } +4,1 + 1,7 = +5,8 \text{ мм};$$

$$\text{- ход (6), полигон (2): } -3,3 + 0,0 = -3,3 \text{ мм};$$

$$\text{- ход (6), полигон (3): } +3,3 + 0,0 = +3,3 \text{ мм};$$

$$\text{- ход (4), полигон (1): } +0,2 + (-3,6) = -3,4 \text{ мм};$$

$$\text{- ход (4), полигон (4): } +3,6 + (-0,2) = +3,4 \text{ мм}.$$

Для свободного хода поправка соответствует вычисленной под двойной чертой таблички: ход (2): - 3,9 мм; ход (7): - 0,3 мм.

В данном случае окончательные значения поправок можно округлить до 1 мм. В особо ответственных случаях, например, в нивелирных сетях при измерениях деформаций сооружений, часто поправки округляют до 0,1 мм.

7. Вычислить уравненные превышения и высоты узловых точек (табл. 16.65).

Если направление хода при вычислении высот совпадает с направлением хода по полигону, которому принадлежит этот ход, то поправка в измеренное превышение вводится с тем же знаком, с которым она получена из уравнивания. Если не совпадает, то знак поправки берется обратным.

Как следует из таблицы 16.65, значения уравненных высот отличаются не более, чем на 1 мм, что связано с округлением поправок.

Таблица 16.65

№ хода	№№ точек	Высота исходного репера, м	Измеренное превышение, мм	Поправка, мм	Уравненное превышение, мм	Уравненная высота, м
1	2	3	4	5	6	7
Т о ч к а А						
1	P1	76,248	+4264	-7	+4258	80,506
5	P2	83,786	-3287	+6	-3281	80,505
						<b>80,506</b>
Т о ч к а В						
3	A	80,506	+1205	-1	+1204	81,710
6	P2	83,786	-2074	-3	-2077	81,709
						<b>81,710</b>
Т о ч к а С						
2	P1	76,248	+3802	+4	+3806	80,054
7	P2	83,786	-3732	0	-3732	80,054
4	B	81,709	-1652	-3	-1655	80,054
						<b>80,054</b>

## § 159. Способ последовательных приближений

Для иллюстрации способа последовательных приближений рассмотрим схему нивелирных ходов примера § 157 (способ эквивалентной замены).

1. В ведомость уравнивания (табл. 16.66, столбцы 1-6) выписать исходные данные со схемы нивелирной сети (рис. 16.17) для каждой узловой точки (A, B, C), а также из табл. 16.64 – значения весов превышений.

2. 1-е приближение. Точка A.

Вычислить высоту узловой точки B по результатам измерений. По формуле (3.39) получить среднее весовое значение высоты точки A по ходам (1) и (5):  $H_{A(1)} = 80,5054$  м.

Ход	Точки	Исх. высота, м	Превы- шение, м	Длина хода, км	Вес	Значения высот в приближениях, м					
						1-е	2-е	3-е	4-е	5-е	6-е
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
						Точка	А				
1	P1	76,248	+4264	2,75	0,727	80,5120	80,5120	80,5120	80,5120	80,5120	80,5120
3	В		-1205	1,76	1,136		80,5061	80,5046	80,5042	80,5041	80,5040
5	P2	83,786	-3287	2,64	0,758	80,4990	80,4990	80,4990	80,4990	80,4990	80,4990
					2,6212	80,5054	80,5057	80,5050	80,5049	80,5048	80,5048
						Точка	В				
4	С		+1652	1,81	1,105		81,7066	81,7060	81,7059	81,7058	81,7058
3	А		+1205	1,76	1,136	81,7104	81,7107	81,7100	81,7099	81,7098	81,7098
6	P2	83,786	-2074	2,21	0,905	81,7120	81,7120	81,7120	81,7120	81,7120	81,7120
					3,146	81,7111	81,7096	81,7092	81,7091	81,7090	81,7090
						Точка	С				
2	P1	76,248	+3802	2,03	0,985	80,0500	80,0500	80,0500	80,0500	80,0500	80,0500
4	В		-1652	1,81	1,105	80,0591	80,0576	80,0572	80,0571	80,0570	80,0570
7	P2	83,786	-3732	3,26	0,614	80,0540	80,0540	80,0540	80,0540	80,0540	80,0540
					2,704	80,0546	80,0540	80,0539	80,0538	80,0538	80,0538

1-е приближение. Точка В.

Вычислить среднее весовое значение высоты точки В по ходам (6) и (3), используя в ходе (3) среднее весовое значение высоты точки А:  $H_{B(1)} = 81,7111$  м.

1-е приближение. Точка С.

Вычислить среднее весовое значение высоты точки С по ходам (2) и (7), а также по ходу (4), используя среднее весовое значение точки В:  $H_{C(1)} = 80,0546$  м.

3. Во втором приближении используются средние весовые значения высот точек А, В и С, полученные в 1-м приближении. В третьем приближении – средние весовые значения высот, полученные во втором приближении и т.д. Высоты исходных реперов остаются одинаковыми во всех приближениях.

Второе, третье и последующие приближения выполняются по схеме, приведенной в п.2. Вычисления (приближения) прекращаются до повторения высот точек в двух соседних шагах, т.е. при первом повторении результатов средних весовых значений высот узловых точек.

4. Вычислить поправки в измеренные превышения по формуле

$$v_i = H^0 - H_i, \quad (16.224)$$

где  $H^0$  – уравнированное значение высоты узловой точки;  $H_i$  – значение высоты узловой точки по  $i$ -му ходу.

Получим значения поправок в превышения по последнему приближению:

$$v_1 = 80,5048 - 80,5120 = -7,2 \text{ мм};$$

$$v_2 = 80,0538 - 80,0500 = +3,8 \text{ мм};$$

$$v_3 = 80,0548 - 80,5040 = +0,8 \text{ мм};$$

$$v_3 = 81,7090 - 81,7098 = -0,8 \text{ мм} \quad (\text{знак зависит от направления движения});$$

$$v_4 = 81,7090 - 81,7058 = +3,2 \text{ мм};$$

$$v_4 = 80,0538 - 80,0570 = -3,2 \text{ мм} \quad (\text{знак зависит от направления движения});$$

$$v_5 = 80,5048 - 80,4990 = -5,8 \text{ мм};$$

$$v_6 = 81,7090 - 81,7120 = -3,0 \text{ мм};$$

$$v_7 = 80,0538 - 80,0540 = -0,2\text{мм}.$$

Как видим, полученные значения поправок совпадают с поправками, полученными в способе эквивалентной замены, и совпадают в пределах округлений с поправками, полученными в способе полигонов В.В.Попова.

## § 160. Оценка точности уравненных элементов и их функций

### 160.1. Общие положения

Оценка точности уравненных элементов и их функций заключается в определении средних квадратических погрешностей результатов измерений и функций измеренных величин после выполнения процедуры уравнивания.

Среднюю квадратическую погрешность любой величины можно определить по формуле

$$M_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \quad (16.225)$$

где  $\mu$  – средняя квадратическая погрешность единицы веса;  $p$  – вес определяемой величины.

Обе величины, входящие в правую часть формулы (16.225) обычно неизвестны, поэтому по материалам уравнивания находят как значение средней квадратической погрешности единицы веса, так и вес оцениваемой (уравниваемой) величины. Здесь следует иметь в виду, что вес измеренной и вес той же, но уравненной величины – не одно и то же. Тем более и веса функций уравненных величин, зависящих от входящих в нее аргументов со своими весами. Отношение весов  $P$  уравненных значений измеренных величин к весам  $p$  измеренных величин примерно равно отношению общего числа измерений  $n$  к числу необходимых измерений  $k$ , т.е.

$$\frac{P}{p} \approx \frac{n}{k} \quad (16.226)$$

При определении погрешности единицы веса можно использовать формулу (3.44) из теории погрешностей, в которую вместо истинных погрешностей или отклонений от среднего значения подставляют значения полученных невязок  $W$ :

$$\mu = \sqrt{\frac{pW^2}{n}}, \quad (16.227)$$

где  $n$  – число невязок однородной величины, равных числу условных уравнений. Часто для оценки  $\mu$  используют все возникающие условные уравнения ( $N > r$ ).

Пользуясь материалами уравнивания, погрешность единицы веса легко можно найти по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{p v^2}{n - k}}, \quad (16.228)$$

где  $v$  – значения поправок к измеренным величинам, имеющим вес  $p_i$ ;  $n$  – число использованных поправок, т.е. число измеренных однородных величин







Последние четыре функции содержат только одно значение  $h$ , т.е. их средние квадратические погрешности равны средней квадратической погрешности соответствующего превышения, поскольку  $H_{P10}$ ,  $H_{P20}$  и  $H_{P30}$  – исходные высоты (по условию задачи являются безошибочными).

Составим для обработки результатов измерений табл. 16.67, в которую занесем значения коэффициентов и обратных весов из примера 153.2, а также значения частных производных функций:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial h_4}\right) = +1; \left(\frac{\partial F_1}{\partial h_7}\right) = -1; \left(\frac{\partial F_2}{\partial h_1}\right) = +1; \left(\frac{\partial F_3}{\partial h_2}\right) = +1; \left(\frac{\partial F_4}{\partial h_9}\right) = -1; \left(\frac{\partial F_5}{\partial h_8}\right) = -1$$

(16.238)

Таблица 16.67

№№ изм.	$q_i$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$\Sigma$
1	0,42	+1				+1		+1				3
2	0,68	-1							+1			0
3	1,08	+1	-1									0
4	0,39		+1			+1	+1					3
5	1,32		+1	+1								2
6	1,03			+1								1
7	1,51			+1	+1		-1					1
8	1,72				+1	+1					-1	1
9	1,19				-1					-1		-2
(10)	$W$	-7	+18	-16	+6	+17						
(11)	$[qa_1]$	2,18	-1,08	0	0	0,42	0	0,42	-0,68	0	0	1,26
(12)	$[qa_2]$	(1,08)	2,79	1,32	0	0,39	0,39	0	0	0	0	3,81
(13)	$[qa_3]$	(0)	(1,32)	3,86	1,51	0	-1,51	0	0	0	0	5,18
(14)	$[qa_4]$	(0)	(0)	(1,51)	4,42	1,72	-1,51	0	0	1,19	-1,72	7,33
(15)	$[qa_5]$	(0,42)	(0,39)	(0)	(1,72)	2,53	0,39	0,42	0	0	-1,72	5,87
(16)	$[qF]$						1,90	0,42	0,68	1,19	1,72	

В таблице в скобках записаны значения коэффициентов, находящихся слева от диагональных. Строки, не относящиеся к номеру измерения (10 – 16), указаны в скобках.

В столбцах  $F$  для значений  $[qa]$  и  $[qF]$  вычисления производят по формулам (16.235):

- столбец  $F_1$ :  $[qa_1 F_1] = q_1 a_{11} F_1 + q_2 a_{12} F_1 = 0$ ;  $[qa_2 F_1] = 0,39$  и т.д.;

- столбец  $F_2$ :  $[qa_1 F_2] = 0,42$ ;  $[qa_2 F_2] = 0$  и т.д.

Полученные результаты используем для решения задачи методом краевянов. Для этого составим табл. 16.68, в которую занесем значения нижней части таблицы 16.67.

В табл. 16.68 заносят диагональные коэффициенты в строки  $N$ , а у всех остальных коэффициентов меняют знак на противоположный. На противоположный знак следует изменить и значения  $\Sigma$ .

Таблица 16.68

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$W$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$s+W$	Контр.
$N_1$	2,18	1,08	0	0	-0,42	7	0	-0,42	0,68	0	0	5,74	
$N_2$		2,79	-1,32	0	-0,39	-18	-0,39	0	0	0	0	-21,81	
$N_3$			3,86	-1,51	0	16	1,51	0	0	0	0	10,82	
$N_4$				4,42	-1,72	-6	1,51	0	0	-1,19	1,72	-11,61	
$N_5$					2,53	-17	-0,39	-0,42	0	0	1,72	-21,15	
$N_6$							1,90	0,42	0,68	1,19	1,72		
$K_1$	1,476	0,732	0	0	-0,285	4,743	0	-0,285	0,461	0	0	3,889	3,890
$K_2$		1,501	-0,879	0	-0,399	-9,679	-0,260	-0,139	0,225	0	0	-12,634	-12,632
$K_3$			1,757	-0,859	0,200	13,95	0,989	0,070	-0,113	0	0	12,479	12,479
$K_4$				1,919	-0,986	-9,371	0,344	-0,031	0,051	-0,620	0,896	-11,636	-11,636
$K_5$					1,130	-2,177	-0,378	-0,211	-0,260	0,541	0,740	-2,875	-2,875

Вычисление весов функций производят по формуле

$$\frac{1}{P_{F_i}} = N_{6i}^{(5)} = N_{6i} - (k_{1i}^2 + k_{2i}^2 + k_{3i}^2 + \dots) \quad (16.239)$$

Погрешность единицы веса определяем по формуле (16.228). При этом значение  $[p v^2]$  находим из расчетов, выполненных в примере 153.2:

$$[p v^2] = (2,38 \cdot 1,714^2 + 1,47 \cdot 1,457^2 + \dots + 0,84 \cdot 4,629^2 = 404,11.$$

$$\mu = \sqrt{\frac{404,11}{9}} = 6,7 \text{ мм}.$$

Контроль вычисления  $[p v^2]$  выполняют по формуле (16.229).

Погрешности функций вычисляем по формуле (16.225):

$$M_{F_1} = \sqrt{6,7/0,660} = 8,2 \text{ мм}; \quad M_{F_2} = 12,8 \text{ мм}; \quad M_{F_3} = 11,4 \text{ мм}; \quad M_{F_4} = 8,1 \text{ мм}; \quad M_{F_5} = 10,9 \text{ мм}.$$

Важной величиной является погрешность измерения превышений (передачи высоты) на 1 км хода. Она вычисляется по той же формуле (16.), но предварительно необходимо определить вес 1 км хода. В выполненных расчетах единицей веса являлся ход длиной 2 км (см. исходные данные примера 153.2). Вес одного километра составит  $P_{1\text{км}} = \frac{s_e}{s_i} = \frac{2\text{км}}{1\text{км}} = 2$ . Тогда  $M_{1\text{км}} = M_{1\text{км}} = 6,7/\sqrt{2} = 4,7 \text{ мм}.$

### 160.3. Оценка точности при уравнивании параметрическим способом

Как и в коррелятном способе, для определения веса функции результатов измерений используется формула (16.). Вообще говоря, приемы определения весов функций как в коррелятном, так и в параметрическом способах, практически стандартные. Здесь в качестве примера будет рассмотрен несколько другой способ определения весов функций, применительно к параметрическому способу уравнивания, на основе решения системы линейных уравнений по методу Гаусса способом Ганзена.

Воспользуемся для пояснений принципа отыскания весов функций данными примера § 155, п.155.2. В этом примере в качестве параметров  $t_j$  были выбраны высоты определяемых пунктов:  $t_1 = H_1; t_2 = H_2; t_3 = H_3; t_4 = H_4$ .

Нормальные уравнения поправок к параметрам  $t_j$  получены в виде (16.181):

$$\begin{aligned} 1... 5,87\tau_1 - 0,93\tau_2 - 2,56\tau_4 + 37,01 &= 0; \\ 2... - 0,93\tau_1 + 4,14\tau_2 - 0,98\tau_3 - 0,76\tau_4 - 4,61 &= 0; \\ 3... - 0,98\tau_2 + 2,48\tau_3 - 0,66\tau_4 + 19,64 &= 0; \\ 4... - 2,56\tau_1 - 0,76\tau_2 - 0,66\tau_3 + 4,56\tau_4 - 52,04 &= 0. \end{aligned}$$

Установим функции, оценку точности которых требуется выполнить в результате расчетов:

$$\begin{aligned} F_1 &= H_3 - H_1 = t_3 - t_1 \\ F_2 &= H_1 = t_1 \\ F_3 &= H_2 = t_2 \\ F_4 &= H_3 = t_3 \\ F_5 &= H_4 = t_4 \end{aligned} \quad (16.240)$$

Выполним предварительное уравнивание по несколько другой схеме и найдем значения параметров  $t_j$ . Предварительное уравнивание выполним только в ходе 1-2-3-4 (в таком же направлении движения):  $\sum h = -34$  мм.

Распределим полученную невязку поровну в превышения без учета весов превышений:  $(h_3) = -744$  мм;  $(h_6) = +5347$  мм;  $(h_7) = -5855$  мм;  $(h_4) = -1252$  мм (превышение против хода).

Найдем приближенные значения  $t_j$  таким образом, чтобы использовать при вычислениях и значения  $(h)$ :

$$\begin{aligned} t_1^0 &= H_{P30} - h_8 - (h_4) = 81914 \text{ мм} \\ t_2^0 &= H_{P20} - h_9 - (h_6) = 81184 \text{ мм} \\ t_3^0 &= H_{P30} - h_8 - (h_7) = 86517 \text{ мм} \\ t_4^0 &= t_1^0 + (h_4) = 80662 \text{ мм} \end{aligned}$$

Выразим измеренные превышения через параметры  $t_j$ :

$$\begin{aligned} h_1 &= t_1 - H_{P10} \\ h_2 &= t_2 - H_{P10} \\ h_3 &= t_2 - t_1 \\ h_4 &= t_4 - t_1 \\ h_5 &= t_2 - t_4 \\ h_6 &= t_3 - t_2 \\ h_7 &= t_4 - t_3 \\ h_8 &= H_{P30} - t_4 \\ h_9 &= H_{P20} - t_3 \end{aligned} \quad (16.241)$$

Вычислим свободные члены уравнений:

$$\begin{aligned} l_1 &= t_1^0 - H_{P10} - h_1 = 81914 - 78336 - 3586 = -8 \text{ мм} \\ l_2 &= t_2^0 - H_{P10} - h_2 = 81184 - 78336 - 2841 = +7 \text{ мм} \\ l_3 &= t_2^0 - t_1^0 - h_3 = 81184 - 81914 - (-752) = +22 \text{ мм} \\ l_4 &= t_4^0 - t_1^0 - h_4 = 80662 - 81914 - (-1243) = -9 \text{ мм} \\ l_5 &= t_2^0 - t_4^0 - h_5 = 81184 - 80662 - 509 = +13 \text{ мм} \end{aligned}$$

$$l_6 = t_3^0 - t_2^0 - h_6 = 86517 - 81184 - 5338 = -5 \text{ мм}$$

$$l_7 = t_4^0 - t_3^0 - h_7 = 80662 - 86517 - (-5863) = +8 \text{ мм}$$

$$l_8 = H_{p30} - t_4^0 - h_8 = 85301 - 80662 - 4639 = 0 \text{ мм}$$

$$l_9 = H_{p20} - t_3^0 - h_9 = 83507 - 86517 - (-3024) = +14 \text{ мм}$$

С учетом частных производных функций (16.241) заполним табл. 16.69 и определим с помощью нее коэффициенты нормальных уравнений поправок  $\tau$  и свободные члены. Принцип вычислений в таблице такой же, как и в табл. (16.68). В таблице 16.70 выполним решение систем нормальных уравнений. В примере параметрического способа уравнивания такая задача решена, но здесь приводится другой вид подобной таблицы, с помощью которой решается как задача уравнивания, так и задача оценки точности уравненных элементов.

Таблица 16.69

№№ изм.	$P_i$	$a_{1i}$	$a_{2i}$	$a_{3i}$	$a_{4i}$	$l$	$s$	$v$
1	2,38	+1				-8	-7	-1,700
2	1,47		+1			+7	+8	1,466
3	0,93	-1	+1			+22	+22	10,166
4	2,56	-1			+1	-9	-9	-5,274
5	0,76		+1		-1	+13	+13	-2,560
6	0,98		-1	+1		-5	-5	9,862
7	0,66		0	-1	+1	+8	+8	8,788
8	0,58		0		-1	0	-1	-10,026
9	0,84		0	-1		+14	+13	4,762
(10)		5,87	-0,93	0	-2,56	-16,46	-14,08	(-14,08)
(11)		-0,93	4,14	-0,98	-0,76	45,53	47,00	(47,00)
(12)		0	-0,98	2,48	-0,66	-21,94	-21,10	(-21,10)
(13)		-2,56	-0,76	-0,66	4,56	-27,64	-27,06	(-27,06)
(14)						1241,65	1205,90	

Таблица 16.70

	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_4$	$l$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$\Sigma$	Контр.
$N_l$	5,87	-0,93	0	-2,56	-16,46	-1	+1	0	0	0	-14,08	
$E_1$	-1	0,158	0	0,436	2,804	0,170	-0,170	0	0	0	2,399	2,398
$N_2$		4,14	-0,98	-0,76	45,53	0	0	+1	0	0	48,00	
$E_{12}N$		-0,147	0	-0,404	-2,601	-0,158	0,158	0	0	0	-2,225	
$N_2^{(1)}$		3,993	-0,98	-1,164	42,929	-0,158	0,158	+1	0	0	45,775	45,778
$E_2$		-1	0,245	0,292	-10,751	0,040	-0,040	-0,250	0	0	-11,464	-11,464
$N_3$			2,48	-0,66	-21,94	+1	0	0	+1	0	-19,100	
$E_{13}N$			0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$E_{23}N^{(1)}$			-0,240	-0,285	10,518	-0,039	0,039	0,245	0	0	11,215	
$N_3^{(2)}$			2,240	-0,945	-11,422	0,961	0,039	0,245	+1	0	-7,885	-7,882

$E_3$			-1	0,422	5,099	-0,429	-0,017	-0,109	-0,446	0	3,520	3,520
$N_4$				4,56	-27,64	0	0	0	0	+1	-26,06	
$E_{14}N$				-1,116	-7,177	-0,436	0,436	0	0	0	-6,139	
$E_{24}N^{(1)}$				-0,340	12,535	-0,046	0,046	0,292	0	0	13,366	
$E_{34}N^{(2)}$				-0,399	-4,820	0,406	0,016	0,103	0,422	0	-3,327	
$N_4^{(3)}$				2,705	-27,102	-0,076	0,498	0,395	0,422	+1	-22,160	-22,158
$E_4$				-1	10,019	0,028	-0,184	-0,146	-0,156	-0,370	8,192	8,191
$N_5$					1241,65	0	0	0	0	0	0	
$E_{15}N$					-46,154	-0,170	-0,170	0	0	0		
$E_{25}N^{(1)}$					-461,530	-0,006	-0,006	-0,250	0	0		
$E_{35}N^{(2)}$					58,241	-0,412	-0,001	-0,027	-0,446	0		
$E_{45}N^{(3)}$					-271,535	-0,002	-0,092	-0,058	-0,066	-0,370		
					$[pv^2]$							
					404,19	-0,590	-0,269	-0,335	-0,512	-0,370		

В последней части таблицы значения ( $EN$ ) получают последовательно по строкам  $E$  и  $N$  элементов  $l$  и  $F$  таблицы. Например, ( $E_{15}N : E_{15}l_5 ; E_{16}F_1 ; E_{17}F_2$  и т.д.), ( $E_{25}N^{(1)} : E_{25}l_5^{(1)} ; E_{26}F_1^{(1)} ; E_{27}F_2^{(1)}$  и т.д.) и т.д.

Сумма ( $N_5 + [EN]$ ) =  $[pv^2]$  = 404,19, что практически совпадает с таким же значением, полученным в способе коррелят.

Суммы  $[EN]$  по столбцам  $F$  равны обратному весу соответствующей функции с обратным знаком (сравните результаты вычисления весов функций с данными табл. 16.68 коррелятного способа).

Дальнейшие вычисления аналогичны вычислениям в коррелятном способе: погрешность единицы веса; погрешности выбранных для оценки функций; погрешность нивелирования на 1 км хода.

## Предметный указатель

Абрис 195  
Абсолютная высота 33  
- невязка 206, 214  
- отметка 33  
- погрешность 66  
Абсцисса 29  
Азимут  
- астрономический 87  
- гироскопический 140  
- истинный 40  
- Лапласа 87  
- магнитный 40  
- обратный 41  
- прямой 41  
Азимутальная проекция 17

Вертикальный круг 110  
- угол 102  
Вес измерения 79  
- функции измеренных величин 71  
Весовое среднее 80  
Визирная ось зрительной  
трубы 103  
Винт зажимной 108  
- наводящий 108  
- подъемный 108  
- становой 111  
- элевационный 123  
- юстировочный 120  
Водораздел 38  
Водосборный бассейн 58

- Алгоритм Гаусса (решения систем нормальных уравнений) 398
- Алидада 115
- Аналитическая сеть 84
- Арифметическая середина 80
- Арифметическое среднее 68
- Астрономический азимут 87
  - меридиан 22
  - пункт 87
  - - Лапласа 87
- Аэрофотосъемка 219
  
- Базис геодезический** 85
- Балтийская система высот 33
- Барометрическое нивелирование 237
- Бергштрих 37
- Бесселя формула 70
- Биссектор 103
- Биссектриса (кривой) 250
- Боковая рефракция 366
- Боковое нивелирование 277
- Болотова способ 52
- Бремсберг 313
- Буссоль 218
  
- Ведомость высот**
  - замкнутого теодолитного хода 216
  - разомкнутого теодолитного хода 211
  - координат
  - замкнутого теодолитного хода 214
  - разомкнутого теодолитного хода 205
- Вертикальная рефракция 365
  - соединительная съемка 314,321
- Вертикальное смещение 340,347
  - меридиан 22
  - пункт 88, 91
  - створ 223, 276, 350, 382
  - четырехугольник 85, 182, 303
- Геодезия 5
- Геоид 11
- Геометрическое нивелирование 236, 348
- Гидростатическое нивелирование 237
- Гиробуссоль 139
- Гирокомпас 137
- Гироскоп несвободный 137
  - свободный 137
- Гироскопическое ориентирование 140
- Гиротеодолит 140
- Главное условие нивелира 130
- Главные оси (сооружения) 264
  
- Водослив 38
- Вставка в угол 162
- Выгоднейшее время наблюдений 366
- Высота 33
  - абсолютная 33
  - визирования 210
  - динамическая 369
  - нормальная 369
  - ортометрическая 370
  - относительная 34
  - прибора (инструмента) 210
  - сечения рельефа 37
  
- Ганзена задача 182
- Гаусса алгоритм 398
  - проекция 23
  - система прямоугольных координат 29
  - формула 70
  - формулы 174
- Гезенк 312
- Географические координаты 22, 48
- Геодезическая долгота 30
  - задача
  - - обратная 167
  - - прямая 166
  - сеть 83
  - широта 30
- Геодезические измерения
  - координаты 22
  - построения 85, 162, 181
  - приборы 99, 143
  - разбивочные работы 264
- Геодезический
  - базис 85
  - знак 88
  - электронные 146
- Действительные координаты 29
- Деламбера формулы 180
- Детальная ось 264
  - разбивка кривой (трассы) 284
- Деформации 340
- Дирекционный угол 40
- Длиномер 134
- Доверительный интервал 75
- Долгота восточная 23
  - географическая 22
  - геодезическая 30
  - западная 23
- Домер 250
- Дудка 312



- точки (кривой) 250
- Глубина залегания 311
- Гора (холм) 37
- Горизонт прибора 255
- Горизонталь 37
- Горизонтальная рефракция 366
  - соединительная съемка 315
  - - через два вертикальных ствола 318
  - - через один вертикальный ствол 316
  - - через штольную или наклонную горную выработку 314
- Горизонтальное проложение 45, 198
  - смещение 340, 349
- Горизонтальный круг 110
  - угол 102
- Горизонтирование прибора 111
- Горные выработки 312
- Град 10
- Градус 10
- Градусные измерения 8
- График деформаций 361
  - заложений 56
- Графическая точность 21
- Гринвичский меридиан 17

- Дальномерное расстояние 135
- Дальномерные нити 104
  - штрихи 104
- Дальномеры 99
  - нитяные 104, 135
  - оптические 136
  - - с постоянной базой 137
  - - с постоянным параллактическим углом 136
  - трехградусная 24
  - шестиградусная 24
- Зональная система прямоугольных координат Гаусса 29
- Зрительная труба
  - астрономическая 103
  - земная 103

- Изгиб** 340
- Измерение вертикальных углов 113
  - высот 210, 236
  - горизонтальных углов
    - - способом круговых приемов 116
    - - способом повторений 115
    - - способом приемов 114
    - дирекционных углов 50

- Единицы измерений 9
- Единица веса 80

- Жезл** 135
- Журнал измерения горизонтальных углов 115, 116, 117
  - - углов наклона 115
  - геометрического нивелирования 252
  - тахеометрической съемки 229

- Завал 340
- Задача Ганзена 182
  - геодезическая обратная 167
  - - прямая 166
- Закон нормального распределения 68, 70
- Зажимной винт 108
- Закрепление пунктов 88, 343
- Заложение 38
- Засечка комбинированная 181
  - линейная 172
  - угловая 170, 274
  - - обратная 176, 274
  - - прямая 170, 274

- Земное сжатие 10
- Земной
  - сфероид 10
  - эллипсоид 10
- Знак геодезический 88
  - высотный 91, 342
  - деформационный 343
  - нивелирный 91, 342
  - ориентирный 343
  - плановый 88

- Зона 24
  - затопления 58
  - прогиба 341
  - топографические 15
  - шельфа 20

- Карьер 313
- Квазигеоид 11
- Квершлаг 313
- Километровая сетка 48
- Кипрегель 219
- Кодовый теодолит 152
- Коллимационная погрешность 121, 378
- Колонка (теодолита) 108
- Колонна 24
- Комбинированная засечка 181
- Компаратор 196
- Компарирование 196
- Компенсатор 107
- Конец кривой 250

- истинных азимутов 51
- площадей 59
- превышений 127
- расстояний 197
- - дальномером 99
- - длинномером 134
- - лентой (рулеткой) 197
- - нитяным дальномером 104, 135
- - по карте 45
- углов наклона 102, 113, 117, 199
- Измерения 65
  - избыточные 66
  - косвенные 65
  - необходимые 65
  - непосредственные 65
  - неравноточные 65
  - равноточные 65
- Изолиния 37
- Изотермия 366
- Инвар 125
- Инварная проволока 135
- Инверсионные треугольники 177
- Инженерная геодезия 5
- Интерполирование (горизонталей) 234
- Интерферометры 150
- Истинный азимут 40
  - меридиан 40
- Канава** 313
- Картографические проекции 16
  - поперечно-цилиндрические 23
- Картографическое изображение 16
- Карты 20
  - научно-технические 20
  - специальные 20
- Лазерный визир 161
  - надир-прибор 161
- Ламберта проекция 19
- Лапласа азимут 86
  - пункт 86
- Лента землемерная 133
- Линейка Дробышева 230
- Линейная засечка 175
  - невязка 206
- Линейный масштаб 45
- Линейно-угловые построения 303
- Линия водораздела 38
  - водослива (тальвег) 38
  - заданного уклона 57, 269
  - падения 311
  - полуденная 41
- Коническая проекция 16
- Координатная зона 29
  - сетка 48
- Координатограф
- Координаты астрономические 22
  - Гаусса (прямоугольные) 29
  - географические 22
  - геодезические 22
  - действительные 29
  - полярные 224
  - преобразованные 29
  - прямоугольные 29, 49
  - сокращенные 49
- Короткобазисная полигонометрия 379
- Коррелятный способ уравнивания 405
- Котловина (яма) 38
- Коэффициент дальномера 135
  - Стюдента 70
- Краковянов способ решения систем нормальных уравнений 402
- Красная линия 296
- Красовского референц-эллипсоид 11
- Крен 340
- Кривизна Земли 15, 241
- Кровля залежи 311
- Кронштадтский футшток 33
- Круг вертикальный 102
  - горизонтальный 102
  - лево 113
  - право 113
- Круглый уровень 105
- Круговая система ориентирования 166
- Кручение
- Лазер** 144
- Лазерные приборы 160
  - осевой (центральный) 23, 40
- Меркатора проекция 18
- Мерная лента 133
  - проволока 135
- Меры длины 9
  - площади 9
  - угла 10
- Место нуля 102, 117
- Механическое нивелирование 238
- Микроскоп отсчетный 111
- Микротриангуляция 379
- Микротрилатерация 379
- Минутная рамка (карты) 48
- Молочкова формулы 177
- Мощность залежи 311
- Мульда сдвижения 341

- простираия 311
- Локсодромия 19
- Лощина 38
- Магистраль** 335
- Магистральный ход 335
- Магнитное ориентирование 40
  - склонение 42
- Магнитный азимут 40
  - меридиан 40
- Марка деформационная 343
  - стенная 90
- Маркшейдерские опорные сети 314
  - съемки 313
  - съемочные сети 314
- Масштаб 17
  - главный 21
  - именованный 21
  - карты 17
  - линейный 45
  - плана 20
  - поперечный 46
  - частный 21
  - численный 21
- Маяк 343
- Маятниковый гирокомпас 137
  - компенсатор 107
- Мензула 219
- Меридиан 17
  - астрономический 22
  - геодезический 22
  - Гринвичский 17
  - истинный 40
  - магнитный 40
  - начальный 17
  - нулевой 17
  - гидростатическое 237, 348
  - из середины 238
  - механическое 238
  - площади 260
  - поперечных профилей 251
  - продольное 246
  - радиолокационное 238
  - сложное (последовательное) 239
  - стереофотограмметрическое 238
  - техническое 245
  - трассы 246, 251
  - тригонометрическое 210, 236, 348
  - физическое 237
- Нитяный дальномер 104, 135
- Номенклатура (карт, планов) 24
- Нормальные уравнения
- Наблюдательная станция** 343
- Навигационные системы 192
- Наводящий винт 108
- Накладка точек на план 230
- Наклон 340
- Направление измеренное 438
  - уравненное 467
- Начало кривой 250
- Начальный меридиан 17
- Невязка 203
  - абсолютная 206, 214
  - допустимая 203, 240
  - линейная 206
  - относительная 206
  - превышений 211, 215, 240
  - угловая 203, 213
  - хода
    - - высотного 211
    - - нивелирного 240
    - - полигонометрического 206
    - - теодолитного 206
- Нивелир 99, 122
  - лазерный 160
  - с компенсатором 124
  - с уровнем
    - при зрительной трубе 123
  - электронный 159
- Нивелирная рейка 125
- Нивелирный знак 91
  - репер 91, 342
- Нивелирование 236
  - барометрическое 237
  - боковое 277
  - вперед 239
  - геометрическое 236
    - хода 315
  - - через два шахтных ствола 318
  - - через один шахтный ствол 316
  - сети 315
- Ориентирующий угол 40
  - обратный 41
  - прямой 41
- Орт 313
- Ортодромия 19
- Осадка 340
- Осевой меридиан 23, 40
- Оседание 341
- Основание масштаба 45
- Основная ось 264
  - уровенная поверхность 10
- Ось визирная 103

(решение систем) 394  
 Нулевой меридиан 17  
 Нульпункт уровня 105  
 Обработка двойных равноточных измерений 77  
   - неравноточных измерений 82  
   - нивелирных ходов 254  
   - равноточных измерений 75  
   - теодолитных ходов 201, 212  
 Обноска 287  
 Обратная геодезическая задача 167  
   - однократная засечка 179  
   - угловая засечка 176  
 Обрушение 341  
 Общий земной эллипсоид 10  
 Объектив 103  
 Объекты строительства 295  
 Окуляр 103  
 Оплывание 341  
 Оплывина 341  
 Оползень 341  
 Оптико-электронные приборы 143  
 Оптические системы дальномеров 149  
 Оптический резонатор 145  
   - центр 113  
 Опорная геодезическая сеть 83  
 Опорный геодезический знак 88  
   - репер 91  
 Ордината 29  
 Ориентирование 40, 51  
   - гироскопическое 140  
   - линий 50  
   - на местности (по карте) 52  
   - подземного полигонометрического

  из зоны в зону 30  
 Перекос 340  
 Переходная кривая 286  
 Пикет 248  
 Пикетаж 248  
 Пирамида 88  
 План 20  
 Планиметр 62  
   - механический 62  
   - полярный 63  
   - роликовый 64  
   - электронный 64  
 Площадь многоугольника 60  
 Плюсовая точка 249  
 Поверка 100

  - вращения зрительной трубы 103  
   - - Земли  
   - - прибора 103  
   - - теодолита 103  
   - геометрическая 103  
   - главная 264  
   - детальная 264  
   - ложины 38  
   - оптическая 103  
   - основная 264  
   - промежуточная 264  
   - технологическая 264  
   - уровня 105  
   - - круглого 105  
   - - цилиндрического 105  
   - хребта 38  
 Осыпь 341  
 Отметка абсолютная 33  
   - относительная 34  
   - рабочая 258  
   - точки 33  
 Относительная высота 34  
   - отметка 34  
   - погрешность 66  
 Отсчетные системы теодолита 111

Падение 311  
 Палетка квадратная 61  
   - линейная 61  
   - точечная 61  
 Параллакс сетки нитей 105  
 Параллель 17  
 Параметрический способ уравнивания 443  
 Перевычисление координат  
   - за наклон местности 268  
   - за рельеф 268  
   - за рефракцию 242  
   - за температуру 268  
 Постраничный контроль 254  
 Построение водосборного бассейна 58  
   - зоны затопления 58  
   - линии заданного уклона 56  
   - плана 230  
   - поперечного профиля 259  
   - проектного  
   - - полотна дороги 259  
   - - расстояния 267  
   - - угла 266  
   - - уклона 269

- Поверки нивелира 129
  - тахеометра 157
  - теодолита 119
- Поверхность относимости 11
  - уровенная 10, 33
  - - основная 33
  - физическая Земли 10
- Погрешность абсолютная 66
  - грубая 67
  - единицы веса 81
  - измерений 66
  - коллимационная 121
  - относительная 66
  - предельная 67
  - систематическая 67
  - случайная 67
  - средняя квадратическая 69
  - центрирования 289
- Подземная съемка вертикальная 324
  - горизонтальная 323
- Подъемный винт 108
- Поле зрения зрительной трубы 105
- Полигонометрия 86, 96, 303
- Полигонометрический ход 303
- Полевое трассирование 248
- Полуденная линия 41
- Полугоризонталь 39
- Полярное сжатие 10
- Поперечно-цилиндрическая
  - Проекция 23
- Поперечный масштаб 46
  - профиль 251
- Попова способ уравнивания 487
- Поправки:
  - за компарирование 268
  - за кривизну Земли 241
- Промежуточная точка 247, 249
- Промежуточный отсчет 252, 255
- Прямая геодезическая задача 166
  - угловая засечка 170, 274
- Прямоугольные координаты 29
- Пункт астрономический 87
  - геодезический 84
  - Лапласа 87
- Пузырек уровня 105
- 
- Рабочая отметка 258
- Радииан 10
- Радиус кривизны
  - Земли 15
  - кривой (трассы) 250
  - первого вертикала 30
- проектной высоты 269
- профиля 257
- сетки квадратов 230
- Почва залежи 311
- Пранис-Праневича формулы 179
- Превышение 34
- Преобразование координат 29
- Прецессия 137
- Приведения элементы 187
- Привязка ходов
  - нивелирных 239
  - теодолитных 170, 190
  - точек 379
- Приращения координат 166
- Проволока инварная 135
- Прогиб 340
- Проекция азимутальная 17
  - Гаусса 23
  - коническая 18
  - Ламберта 19
  - Меркатора 18
  - поперечно-цилиндрическая 23
  - произвольная 17
  - равновеликая 17
  - равнопромежуточная 17
  - равноугольная 17
  - цилиндрическая 19
- Просадка 340
- Простирание 311
- Профиль местности 54
  - по карте 54
  - поперечный 249
  - продольный 249
  - проектный 255
  - трассы 255
- Профильная линия 335
- Сдвиг 340
- Сдвижение земной поверхности 341
- Седловина 38
- Середина кривой 250
- Сетка географическая 48
  - километровая 48
  - координатная 48
  - минутная 48
  - нитей 103
- Сеть аналитическая 84
  - высотная 83, 88
  - государственная геодезическая 83
  - - нивелирная 83, 88
  - линейно-угловая 86
  - опорная 92
  - плановая 83

- Разбивка кривой (трассы) 284
  - инженерных сооружений 274
  - пикетажа 248
- Элементы 277
- Разбивочные работы 264, 283, 287, 326, 337
- Разграфка карт 24
  - планов 24, 27
- Разрешающая способность зрительной трубы 105
- Рамка карты минутная 48
- Расчет точек нулевых работ 258
- Редукция направлений 187
- Редуцирование 187
- Рейка нивелирная 125
- Рекогносцировка 194
- Рельеф (местности) 36
- Репер 91, 342
  - глубинный 342
  - грунтовый 342
  - рабочий 343
  - стенной 343
- Референц-эллипсоид 11
  - Красовского 11
- Рефракция астрономическая 365
  - боковая 366
  - вертикальная 365
  - горизонтальная 366
  - земная 365
  - спутниковая 365
- Рисовка рельефа 234
- Рулетка 133
- Румбовая система ориентирования 44
- Ряд 24
- Сближение меридианов 42
- Светодальномер 148
  - расстояний 354
  - створов 223, 276, 382, 350
  - стягивающей хорды 286
  - тригонометрического нивелирования 210, 348
  - углов 285
  - угловой засечки 172, 223, 274
  - хорд 284
- Способы геометрического нивелирования 238
  - измерения углов 113
  - разбивки инженерных сооружений 274
  - кривых (трассы) 283
  - решения систем нормальных
- сгущения 84
- Сигнал 89
- Система высот Балтийская 33
  - координат 22
  - - высотных 23
  - - географических 22
  - - плановых 22, 29
  - - полярных 275
  - - прямоугольных 29
- Систематическая погрешность 67, 76
- Скат 38
  - (горная выработка) 313
- Склонение магнитное 42
- Случайная погрешность 67
- Сложное нивелирование 239
- Снесение координат 185
- Способ Болотова 52
  - бокового нивелирования 277
  - вертикального проектирования 302, 352
  - Гаусса решения уравнений 394
  - горизонтальных углов 353
  - замкнутого треугольника 274
  - комбинированной съемки 223
  - координат 284, 354
  - линейной засечки 223, 276
  - наименьших квадратов 386
  - наклонного луча 302
  - обхода 223
  - параллельных линий 262
  - перпендикуляров 223
  - полигонов 263
  - полярных координат 223, 275
  - примыкания 170
  - проектного полигона 275
  - прямоугольных координат 223
  - разбивки по частям 284
- Тахеометр электронный 155
- Тахеометрическая съемка 224
- Теодолит 99, 108
  - кодовый 152
  - лазерный 154
  - оптический 108
- Теодолитная съемка 221
- Теодолитный ход 201
  - висячий 163
  - диагональный 163
  - замкнутый 212
  - разомкнутый 201
  - свободный 163
- Технологическая ось 264
- Топографические карты 15

- уравнений 394
- уравнивания 387
- Спутниковые методы опр.к. 191
- Среднее арифметическое 68
- Средний меридиан 23, 40
- Средняя квадратическая погрешность 69
  - арифметического среднего 72
  - арифметической середины 81
  - единицы веса 81
  - функций 71
- Становой винт 111
- Станция наблюдательная 343
- Ствол шахты 312
- Створ 276
  - оптический 355
- Строительная сетка 276
- Стюдента коэффициент 70
- Сфероид 10
- Съемка вертикальная 218
  - глазомерная 218
  - горизонтальная 221
  - комбинированная 332
  - контурная 218
  - мензульная 219
  - плановая 221
  - планово-высотная
  - подземных коммуникаций 140
  - тахеометрическая 224
  - теодолитная 221
  - топографическая 218
  - фототеодолитная 218
  - экерная 218
- Съемочное обоснование 162
- Тангенс (кривой) 250
  - горизонтальный 102
  - дирекционный 40
  - левый 169
  - наклона 56, 102
  - поворота трассы 249
  - правый 169
  - примычный 86, 170
  - сближения меридианов 42
- Уклон линии 56
  - (горная выработка) 313
- Уравнивание 209
  - коррелятным способом 405
  - линейно-угловых построений 438
  - нивелирных ходов
  - - одиночных
  - - с двумя или несколькими узловыми точками 414, 454
  - планы 20
  - съемки 218
- Топография 5
- Точка икссовая 249
  - нулевых работ 258
  - плюсовая 249
  - промежуточная 247, 249
  - речная 226
  - связующая 239
  - съемочная 226
- Точность графическая 46
  - масштаба 46
  - разбивочных работ 289
  - уравнивания 493
  - центрирования 289
- Трансверсаль 46
- Транспортир 50
- Трасса 248
- Трассирование 248
- Трассоискатель 141
- Триангуляция 85, 93, 303
- Тригонометрическое нивелирование 210, 348
- Трилатерация 85, 97, 304
- Труба астрономическая 103
  - земная 103
  - зрительная 103
- Тур 90
- Увеличение зрительной трубы 104
- Угловая засечка 172
  - обратная 174
  - прямая 172
- Угол вертикальный 102
  - Пранис-Праневича 179
  - тангенсов 174
  - Юнга 172
- Формы рельефа 36
- Футшток 33
- Хребет 38
- Холм (гора) 37
- Ход нивелирный 240, 245
  - теодолитный 170
- Цена деления уровня 106
- Центральный меридиан 23, 40
- Центральная система 85, 303
- Центрирование прибора 111
  - подземной сети 315
- Центрировочный лист 189

- с одной узловой точкой 481
- параметрическим способом 443
- полигонов способом Попова 487
- полигонометрических ходов
- одиночных 417, 456, 476
- с двумя или несколькими узловыми точками 424, 461
- с одной узловой точкой 477
- способом приближений 490
- способом эквивалентной Замены 483
- триангуляции 431, 434, 467
- Уровенная поверхность 10
  - основная 33
- Уровень 105
  - компенсированный 106
  - контактный 106
  - круглый 105
  - цилиндрический 105
- Условные знаки 34
- Условный горизонт 55, 257
- Установка в рабочее положение:
  - зрительной трубы 113
  - нивелира 126
  - теодолита 111
- Фигура (форма) Земли 10**
- Физическая поверхность Земли 10**
- Физическое нивелирование 237**
- Формула Бесселя 70**
  - Гаусса 70, 174
- Формулы Делаಂಬера 180**
  - котангенсов 174
  - Молочкова 177
- Цилиндрические проекции 18, 19, 23
- Цилиндрический уровень 105
- Цифровая модель местности 220
- Частный масштаб 21**
  - створ 351, 382
- Четвертная система ориентирования 44, 166
- Четырехугольник без диагоналей 183
  - геодезический 86
- Численный масштаб 21
- Шельф 20**
- Широта географическая 22
  - северная 23
  - южная 23
- Шкала заложений 56
- Штольня 312
- Штрек 312
- Щелемер 343**
- Экватор 17
- Эклиметр 198
- Элевационный винт 123
- Электронный тахеометр 155
- Элементы приведения 187
  - редукции 187
  - теодолитного хода 170
- Эллипсоид (сфероид) 10
- Юстировка 100**
- Юстировочный винт 120
- Яма (котловина) 38**

## Список литературы

1. Астахов С.М. Фотограмметрия для геологической службы: Учебник для техникумов. – М.: Недра, 1996.
2. Билич Ю.С., Васмут А.С. Проектирование и составление карт.: Учебник для вузов./Под ред. Л.М.Бугаевского. – М.: Недра, 1984.
3. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений: Учебное пособие для вузов. – М.: Недра, 1984.
4. Борщ-Компониц В.И. Геодезия. Маркшейдерское дело: Учебник для вузов. – М.: Недра, 1989.
5. Борщ-Компониц В.И., Навитный А.М., Кныш Г.М. Маркшейдерское дело: Учебник для техникумов. – М.: Недра, 1985.
6. Витковский В.В. Практическая геодезия. С.-Петербург. Типография Ю.Н.Эрлихъ. 1911.
7. Ворковастов К.С., Агеев М.Ф. Маркшейдерские акваториальные работы. – М.:



- Недра, 1986.
8. Гайдаев П.А., Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. / Под ред. Б.С.Кузьмина и В.Е.Гмурмана. – М.: Недра, 1969.
  9. Гайдаев П.А. Математическая обработка геодезических сетей. – М.: Недра, 1977.
  10. Геодезические методы исследования деформаций сооружений/ А.К.Зайцев, С.В.Марфенко, Д.Ш.Михелев и др. – М.: Недра, 1991.
  11. Гринберг Г.М. Математическая обработка городских геодезических сетей. – М.: Недра, 1992.
  12. Гуткин В.Л., Еремин В.В. Вычисление координат и высот пунктов геодезического съемочного обоснования. – М.: Недра, 1991.
  13. Зайцев А.К. Трилатерация. – М.: Недра, 1989.
  14. Захаров А.И. Геодезические приборы: Справочник. – М.: Недра, 1986.
  15. Измерение вертикальных смещений сооружений и анализ устойчивости реперов./В.Н.Ганьшин, А.Ф.Стороженко, А.Г.Ильин и др. – М.:Недра, 1981.
  16. Инженерная геодезия. Под ред. П.С.Закатова. М.: Недра, 1976.
  17. Инженерная геодезия. Учеб. для вузов/ Е.Б.Клюшин, М.И.Киселев, Д.Ш.Михелев, В.Д.Фельдман: Под ред. Д.Ш.Михелева. – М.: Высшая школа, 2000.
  18. Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР. – М.: Недра, 1973.
  19. Инструкция по нивелированию I, II, III и IV классов. – М.:Недра, 1974.
  20. Инструкция по производству топографо-геодезических работ при геологической съемке и разведке. / Государственный геологический комитет СССР. – М.: Недра, 1964.
  21. Инструкция по топографической съемке в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 и 1:500. – ГКИНП-02-033-82. – М.: Недра, 1985.
  22. Инструкция по топографическим съемкам в масштабе 1:10000 и 1:25000. Полевые работы. – М.: Недра, 1978.
  23. Клюшин Е.Б., Михелев Д.Ш. Инженерная геодезия: Учебник для техникумов. – М.: Недра, 1990.
  24. Кочетов Ф.Г. Нивелиры с компенсаторами. – М.: Недра, 1985.
  25. Коугия В.А., Сорокин А.И. Геодезические сети на море. – М.: Недра, 1979.
  26. Кузнецов П.Н., Васютинский И.Ю., Ямбаев Х.К. Геодезическое инструментоведение: Учебник для вузов. – М.: Недра, 1984.
  27. Лавриков А.С., Свиридов А.Е. Геодезические работы при геологических исследованиях. /Под ред. В.Г.Селиханович. – М.: Недра, 1968.
  28. Лебедев Н.Н. Курс инженерной геодезии. – М.: Недра, 1974.
  29. Левчук Г.П., Новак В.С., Конусов В.Г. Прикладная геодезия. М.: Недра, 1981.
  30. Лобанов А.Н., Буров М.И., Краснопевцев Б.В. Фотограмметрия. – М.: Недра, 1987.
  31. Маркшейдерское дело./ В.И.Борщ-Компониец, В.М.Гудков, В.Г.Николаенко и др. М.: Недра, 1979.
  32. Маркшейдерское дело /Д.Н.Оглоблин, Г.И.Герасименко, А.Г.Акимов и др. – М.: Недра, 1981.
  33. Неумывакин Ю.К. Обоснование точности топографических съемок для проектирования. – М.: Недра, 1976.
  34. Пискунов М.Е. Методика наблюдений за деформациями сооружений. – М.: Недра, 1980.
  35. Поликашечкин А.И. Геодезическо-маркшейдерское обеспечение строительства подземных сооружений в городах. – М.: Недра, 1990.
  36. Применение геодезических засечек, их обобщенные схемы и способы машинного решения. / П.И.Баран, В.И.Мицкевич, Ю.В.Полищук и др. – М.: Недра, 1986.
  37. Руководство по топографическим съемкам в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 и 1:500. Высотные сети. – М.: Недра, 1976.

38. Руководство по топографическим съемкам в масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 и 1:500. Наземные съемки. – М.: Недра, 1977.
39. Руководство по топографической съемке шельфа и внутренних водоемов. ГКИНП-11-157-82. – М.: ЦНИИГАиК, 1982.
40. Смолич Б.А. Уравнительные вычисления: Учеб. Для техникумов. – М.: Недра, 1989.
41. Спиридонов А.И. Теодолиты. – М.: Недра, 1985.
42. Справочник геодезиста ( двух книгах)/Под ред. В.Д.Большакова и Г.П.Левчука. – 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Недра 1985.
43. Судаков С.Г. Основные геодезические работы. – М.: Недра, 1975.
44. Техническая инструкция по производству маркшейдерских работ (маркшейдерские измерения и документация). – Л.: Недра, 1971.
45. Топографо-геодезические термины: Справочник. /Б.С.Кузьмин, Ф.Я.Герасимов, В.М.Молоканов и др. – М.: Недра, 1989.
46. Условные знаки для топографических планов масштабов 1:5000, 1:2000, 1:1000 и 1:500. – М.: Недра, 1984.
47. Условные знаки для топографических карт масштаба 1:10000. – М.: Недра, 1984.
48. Федоров В.И., Титов А.И., Холдобаев В.А. Практикум по инженерной геодезии и аэрогеодезии: Учебное пособие для вузов. – М.: Недра, 1987.
49. Хохлов И.В. Геодезические приборы для съемки инженерных сооружений. – М.: Недра, 1981.
50. Черемисин М.С., Воробьев А.В. Геодезическо-маркшейдерская разбивочная основа при строительстве подземных сооружений. – М.: Недра, 1982.

Оглавление	Стр.
Предисловие .....	3
<b>Глава 1. Вводная часть</b> .....	<b>5</b>
§ 1. Предмет и задачи геодезии .....	5
§ 2. Краткие исторические сведения .....	5
§ 3. Единицы измерений, применяемые в геодезии .....	10
§ 4. Фигура и размеры Земли .....	10
§ 5. Содержание курса и рекомендации по его изучению .....	12
<b>Глава 2. Топографические карты и планы</b> .....	<b>15</b>
§ 6. Влияние кривизны Земли на измеренные расстояния .....	15
§ 7. Краткие сведения о картографических проекциях .....	17
§ 8. Общие сведения о топографических картах и планах .....	20
§ 9. Система географических координат .....	22
§ 10. Равноугольная поперечно-цилиндрическая проекция Гаусса-Крюгера .....	23

§ 11. Разграфка и номенклатура топографических карт и планов .....	25
§ 12. Зональная система плоских прямоугольных координат Гаусса .....	30
§ 13. Перевычисление координат из зоны в зону .....	31
§ 14. Система высот .....	34
§ 15. Условные знаки топографических карт и планов .....	35
§ 16. Изображение рельефа на топографических картах и планах .....	37
§ 17. Ориентирование .....	41
§ 18. Решение некоторых задач с использованием топографической карты .....	46
18.1. Измерение расстояний .....	46
18.2. Определение географических и прямоугольных координат .....	49
18.3. Ориентирование линий .....	51
18.4. Ориентирование карты на местности .....	53
18.5. Определение высот точек .....	54
18.6. Построение профиля .....	55
18.7. Построение линии заданного уклона .....	57
18.8. Построение границ водосборного бассейна и зоны затопления .....	59
18.9. Определение площадей на топографических картах и планах .....	60
<b>Глава 3. Краткие сведения из теории погрешностей измерений .....</b>	<b>66</b>
§ 19. Виды измерений .....	66
§ 20. Классификация погрешностей измерений .....	67
§ 21. Свойства случайных погрешностей .....	69
§ 22. Среднее арифметическое .....	69
§ 23. Средняя квадратическая погрешность .....	70
§ 24. Средние квадратические погрешности функций измеренных величин .....	72
§ 25. Обработка ряда равноточных измерений одной величины .....	75
§ 26. Об учете систематических погрешностей в измерениях .....	77
§ 27. Средняя квадратическая погрешность двойных равноточных однородных измерений .....	78
§ 28. Понятие о весе результата измерения .....	80
§ 29. Средняя квадратическая погрешность единицы веса и арифметической середины .....	82
§ 30. Обработка ряда неравноточных измерений одной величины .....	83
<b>Глава 4. Государственные геодезические сети .....</b>	<b>84</b>
§ 31. Назначение Государственных геодезических сетей .....	84
§ 32. Классы геодезических сетей .....	85
§ 33. Методы построения Государственных геодезических сетей .....	86
§ 34. Закрепление пунктов геодезических сетей .....	89
§ 35. Оценка точности построения опорных геодезических сетей .....	93
§ 36. Оценка точности построения сетей триангуляции .....	94
§ 37. Оценка точности построения звена полигонометрии .....	97
§ 38. Оценка точности построения сетей трилатерации .....	99
<b>Глава 5. Геодезические приборы .....</b>	<b>100</b>
§ 39. Классификация геодезических приборов .....	100
§ 40. Теодолиты .....	101
§ 41. Зрительные трубы .....	104
§ 42. Уровни и компенсаторы наклона .....	106
§ 43. Устройство теодолита .....	109
§ 44. Установка теодолита в рабочее положение .....	113
§ 45. Измерение горизонтальных углов и углов наклона .....	115
45.1. Способ приемов .....	116
45.2. Способ повторений .....	117
45.3. Способ круговых приемов .....	118

45.4. Измерение углов наклона .....	119
§ 46. Поверки теодолитов .....	121
§ 47. Нивелиры .....	124
§ 48. Устройство нивелира .....	125
§ 49. Нивелирные рейки .....	127
§ 50. Установка нивелира в рабочее положение .....	128
§ 51. Измерение превышений .....	129
§ 52. Поверки нивелиров .....	131
§ 53. Приборы для линейных измерений .....	135
§ 54. Гироскопические приборы .....	139
§ 55. Приборы для поиска подземных коммуникаций .....	143
<b>Глава 6. Оптико-электронные геодезические приборы</b> .....	145
§ 56. Общие замечания .....	145
§ 57. Краткие сведения о лазерных источниках излучения .....	146
§ 58. Электромагнитные дальномеры .....	148
§ 59. Светодальномеры .....	150
§ 60. Интерферометры .....	152
§ 61. Угломерные приборы .....	154
§ 62. Электронные тахеометры .....	157
§ 63. Электронные нивелиры .....	161
§ 64. Лазерные приборы .....	162
<b>Глава 7. Построение съёмочного обоснования</b> .....	164
§ 65. Назначение и виды теодолитных ходов .....	164
§ 66. Прямая и обратная геодезические задачи на плоскости .....	168
§ 67. Взаимосвязь дирекционных углов с измеренными на местности горизонтальными углами .....	171
§ 68. Привязка теодолитных ходов .....	172
68.1. Способ примыкания .....	172
68.2. Прямая угловая засечка .....	174
68.3. Линейная засечка .....	177
68.4. Обратная угловая засечка .....	178
68.5. Комбинированные засечки .....	182
68.6. Задача П.А.Ганзена .....	184
§ 69. Особые системы теодолитных ходов .....	185
§ 70. Снесение координат с вершины знака на землю .....	186
§ 71. Определение элементов приведения и редукции .....	189
§ 72. Привязка теодолитных ходов к стенным геодезическим знакам .....	192
§ 73. Спутниковые методы определения координат .....	193
§ 74. Организация полевых работ при построении съёмочного обоснования .....	196
74.1. Рекогносцировка и закрепление точек съёмочного обоснования .....	196
74.2. Подготовка абрисов горизонтальной съёмки .....	197
74.3. Поверки теодолита и нивелира .....	197
74.4. Компарирование мерных приборов .....	198
74.5. Измерение длин линий .....	199
74.6. Измерение горизонтальных углов и углов наклона .....	201
§ 75. Вычисления в разомкнутом теодолитном ходе .....	203
75.1. Предварительные вычисления .....	204
75.2. Обработка результатов угловых измерений .....	205
75.3. Вычисление приращений координат и оценка точности хода .....	207
75.4. Рекомендации к поиску вероятных погрешностей в измерениях и вычислениях при обработке ведомости координат .....	209
75.5. Уравнивание приращений координат и вычисление координат точек .....	

хода .....	210
75.6. Обработка ведомости высот .....	211
§ 76. Вычисления в замкнутом теодолитном ходе .....	213
76.1. Оценка точности угловых измерений и вычисление дирекционных углов .....	215
76.2. Вычисление приращений координат и оценка точности хода .....	216
76.3. Уравнивание приращений координат и вычисление координат точек хода .....	216
76.4. Обработка ведомости высот .....	217
§ 77. Обработка диагонального хода .....	218
<b>Глава 8. Топографические съемки</b> .....	219
§ 78. Назначение и виды топографических съемок .....	219
§ 79. Понятие о цифровой модели местности .....	221
§ 80. Теодолитная съемка .....	223
§ 81. Тахеометрическая съемка .....	226
§ 82. Составление плана местности по результатам топографической съемки .....	232
82.1. Построение и оцифровка координатной сетки .....	232
82.2. Нанесение на план точек съемочного обоснования .....	234
82.3. Нанесение на план результатов тахеометрической съемки .....	235
82.4. Рисовка рельефа и ситуации .....	236
82.5. Построение на плане ситуации по результатам теодолитной съемки .....	237
<b>Глава 9. Нивелирные работы</b> .....	238
§ 83. Способы и методы нивелирования .....	238
§ 84. Способы геометрического нивелирования .....	240
§ 85. Основные источники погрешностей геометрического нивелирования .....	243
§ 86. Техническое нивелирование .....	247
§ 87. Трассирование .....	250
§ 88. Расчет и разбивка главных точек кривых на трассе .....	252
§ 89. Нивелирование поперечных профилей .....	253
§ 90. Обработка результатов нивелирования трассы .....	253
§ 91. Построение профиля трассы .....	257
§ 92. Построение проектной линии .....	259
§ 93. Построение поперечного профиля и проектного полотна дороги .....	261
§ 94. Нивелирование площадей .....	262
<b>Глава 10. Геодезические разбивочные работы</b> .....	266
§ 95. Назначение и организация разбивочных работ .....	266
§ 96. Построение на местности проектного горизонтального угла .....	268
§ 97. Построение на местности проектного расстояния .....	269
§ 98. Построение на местности проектных отметок и линий заданного уклона .....	271
§ 99. Способы разбивочных работ .....	276
§ 100. Расчет разбивочных элементов .....	279
§ 101. Разбивочные работы при трассировании .....	284
§ 102. Разбивка фундаментов инженерных сооружений .....	289
§ 103. Оценка точности разбивочных работ .....	291
<b>Глава 11. Геодезические работы в строительстве</b> .....	295
§ 104. Общие положения .....	295
§ 105. Краткие сведения об объектах строительства .....	297
§ 106. Геодезические работы при строительстве промышленных сооружений .....	298
§ 107. Геодезические работы при строительстве гражданских зданий .....	302
§ 108. Геодезические работы при строительстве дорог и мостовых сооружений .....	304
§ 109. Геодезические работы при планировании и застройке населенных пунктов ..	307
§ 110. Геодезические работы при строительстве подземных коммуникаций .....	309

§ 111. Геодезические работы при строительстве гидротехнических сооружений ...	310
§ 112. Геодезические работы при строительстве линий электропередач, связи и магистральных трубопроводов .....	312
<b>Глава 12. Геодезические работы в подземном строительстве .....</b>	<b>313</b>
§ 113. Горные выработки. Основные понятия и определения .....	313
§ 114. Общие понятия о подземных маркшейдерских съемках, опорных и съемочных сетях .....	315
§ 115. Горизонтальная соединительная съемка .....	317
115.1. Горизонтальная соединительная съемка через штольню или наклонную горную выработку .....	317
115.2. Горизонтальная соединительная съемка через один шахтный ствол ..	318
115.3. Горизонтальная соединительная съемка через два вертикальных шахтных ствола .....	320
§ 116. Вертикальная соединительная съемка .....	323
§ 117. Подземная горизонтальная съемка .....	325
§ 118. Подземная вертикальная съемка .....	326
§ 119. Геодезические разбивочные работы в подземном строительстве .....	328
<b>Глава 13. Геодезические работы на геологических предприятиях .....</b>	<b>331</b>
§ 120. Задачи и содержание топографо-геодезических работ .....	331
§ 121. Точность геодезических работ .....	332
§ 122. Создание топографических карт и планов .....	333
§ 123. Разбивка геодезических сеток и профильных линий .....	335
§ 124. Разбивочные работы при проведении геологической разведки .....	339
§ 125. Привязка геологоразведочных выработок к опорной геодезической сети ....	341
<b>Глава 14. Наблюдения за деформациями инженерных сооружений .....</b>	<b>342</b>
§ 126. Виды деформаций инженерных сооружений .....	342
§ 127. Задачи наблюдений и организация работ .....	343
§ 128. Геодезические знаки и их конструкции .....	344
§ 129. Размещение геодезических знаков на инженерных сооружениях .....	345
§ 130. Точность измерения деформаций .....	347
§ 131. Периодичность наблюдений .....	348
§ 132. Наблюдения за вертикальными перемещениями .....	349
§ 133. Наблюдения за горизонтальными смещениями .....	351
§ 134. Наблюдения за кренами .....	354
§ 135. Наблюдения за деформациями земной поверхности .....	356
§ 136. Разработка методики наблюдений .....	357
§ 137. Обработка и анализ результатов наблюдений .....	362
<b>Глава 15. Особенности точных и высокоточных измерений .....</b>	<b>365</b>
§ 138. Основные группы погрешностей измерений .....	365
§ 139. Учет влияния рефракции атмосферы .....	366
§ 140. Высокоточное и точное геометрическое нивелирование .....	370
§ 141. Нивелирование I класса .....	373
§ 142. Нивелирование II класса .....	375
§ 143. Нивелирование III и IV классов .....	376
§ 144. Особенности точного и высокоточного нивелирования при наблюдениях за деформациями .....	377
§ 145. Высокоточные и точные угловые измерения .....	379
§ 146. Высокоточные и точные измерения в схемах микротриангуляции, микро-трилатерации и короткобазисной полигонометрии .....	381
<b>Глава 16. Уравнивание геодезических построений .....</b>	<b>385</b>
§ 147. Основные задачи уравнивательных вычислений .....	385
§ 148. Метод наименьших квадратов .....	388

§ 149. Классификация основных способов уравнивания .....	389
§ 150. Основные геометрические условия, возникающие в построениях .....	390
150.1. Условие фигуры .....	390
150.2. Условие горизонта .....	391
150.3. Условие суммы углов .....	391
150.4. Условие дирекционных углов .....	392
150.5. Условие сторон .....	393
150.6. Условие полюса .....	394
150.7. Условие координат .....	395
§ 151. Методы решения систем линейных нормальных уравнений .....	396
151.1. Способ последовательной подстановки .....	396
151.2. Способ матричных преобразований .....	397
151.3. Решение систем линейных уравнений по алгоритму Гаусса .....	401
151.4. Способ краковянов .....	405
§ 152. Коррелятный способ уравнивания .....	409
§ 153. Примеры коррелятного способа уравнивания .....	415
153.1. Уравнивание углов в полигоне .....	415
153.2. Уравнивание системы нивелирных ходов с несколькими узловыми точками .....	417
153.3. Уравнивание полигонометрического хода .....	420
153.4. Уравнивание системы полигонометрических ходов с двумя узловыми точками .....	427
153.5. Уравнивание триангуляции .....	434
153.6. Уравнивание триангуляции по условию координат .....	437
153.7. Уравнивание линейно-угловой сети .....	441
§ 154. Параметрический способ уравнивания .....	446
§ 155. Примеры параметрического способа уравнивания .....	455
155.1. Уравнивание углов в полигоне .....	455
155.2. Уравнивание системы нивелирных ходов с несколькими узловыми точками .....	457
155.3. Уравнивание полигонометрического хода .....	459
155.4. Уравнивание системы полигонометрических ходов с двумя узловыми точками .....	464
155.5. Уравнивание направлений в триангуляции .....	470
§ 156. Способ раздельного уравнивания .....	478
156.1. Уравнивание полигонометрического хода .....	478
156.2. Система полигонометрических ходов с одной узловой точкой .....	479
156.3. Система нивелирных ходов с одной узловой точкой .....	484
§ 157. Способ эквивалентной замены .....	486
§ 158. Способ полигонов В.В.Попова .....	490
§ 159. Способ последовательных приближений .....	493
§ 160. Оценка точности уравненных элементов и их функций .....	495
160.1. Общие положения .....	495
160.2. Оценка точности при уравнивании коррелятным способом .....	496
160.3. Оценка точности при уравнивании параметрическим способом .....	499
Предметный указатель .....	502
Список литературы .....	511